5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Дифференциалы высших порядков

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial x_k} dx_k dx_j$$

$$d^m f = D^m f$$

$$D^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m$$

5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.7. Формула Тейлора для функций многих переменных

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^\theta)$$

5.8. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия

Определение. Пусть $u=f(x)$ определена в окрестности точки x^0 . *Локальный максимум в точке* x^0 *: Для некоторой окрестности* $U(x^0)$ *выполнено* $\forall x \in U(x^0): f(x) \le f(x^0)$.

Строгий локальный максимум в точке x^0 *: Для некоторой окрестности* $U(x^0)$ *выполнено* $\forall x \in U(x^0),\ x \ne x^0 : f(x) < f(x^0)$.

Теорема *(необходимое условие экстремума). Если функция* $f(x)$ *определена в окрестности точки* x^0 *, имеет в этой точке частные производные первого порядка и* x^0 *экстремум, то все частные производные равны нулю в этой точке.*

Определение. Точка, в которой все частные производные первого порядка равны нулю, называется стационарной точкой функции.

Замечание 1. Стационарность точки x^0 *эквивалентна условию* $df(x^0)=0$.

Замечание 2. Глобальные максимумы или глобальные минимумы функции надо искать среди

1. стационарных точек,

2. точек, где не существуют частные производные первого порядка,

3. граничных точек.

$q(\xi)=$

5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.9. Достаточные условия экстремума

Теорема. *Если функция $f(x)$ определена в окрестности стационарной точки x^0, имеет там непрерывные частные производные второго порядка, тогда если форма*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)\xi_k\xi_j$$

где $a_{kj}=\dfrac{\partial^2 f(x^t)}{\partial x_k\,\partial x_j}$, $x^t = x^0 + t\,\Delta x$, $\Delta x = x - x^0$, $\xi_k = \Delta x_k$

в точке x^0 положительно определена, то x^0 строгий локальный минимум, отрицательно определена, то x^0 строгий локальный максимум, знакопеременна, то x^0 не является экстремумом В остальных случаях ничего определенного сказать нельзя.

Пример 1. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$

Пример 2. Найти *sup, inf* функции $z = x^2 - xy + y^2$, на множестве $|x| + |y| \le 1$

5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Критерий Сильвестра

1. Для того чтобы квадратичная форма с симметричной матрицей являлась положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы были положительны, т. е. чтобы были справедливы неравенства $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, ... , $A_m > 0$.

2. Для того чтобы квадратичная форма с симметричной матрицей являлась отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров матрицы чередовались, причем знак A_1 был отрицателен, т. е. чтобы были справедливы неравенства

$A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, $A_4 > 0$,...

Пример. $$u = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 + 2x_2 + \ldots + 2x_m,$$

6. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯ

6.1. Понятие неявной функции . Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции и некоторые ее применения

Теорема. Пусть функция $F(u, x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(u^0, x^0, y^0)$, причем частная производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ - непрерывна в точке M_0 . Тогда, если в точке M_0 функция F обращается в нуль, а частная производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ не обращается в нуль, то для любого достаточно малого положительного числа ε найдется такая окрестность точки $M_0'(x^0, y^0)$, что в пределах этой окрестности существует единственная функция $u = \varphi(x, y)$, которая удовлетворяет условию $|u - u^0| < \varepsilon$ и является решением уравнения $F(u, x, y) = 0$, причем эта функция $u = \varphi(x, y)$ непрерывна и дифференцируема в указанной окрестности точки M_0.

6. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯ