Ашық сабақ:

Иррационал теңдеулер

11 сынып

Мұғалім: Токтобоянова С.К,
2016-17 оқу жылы

Ой қозғау

Ауызша есепте:

$x^2 - 1 = 0$

$x^3 - 8 = 0$

$x^4 - 16 = 0$

$x^5 + 1 = 0$

$x^3 - 27 = 0$

$x^3 + 27 = 0$

Қатесін тап

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1$$

$$x^4 + 16 = 0$$
$$x^4 = -16$$
$$x = -2$$

$$x^3 - 8 = 0$$
$$x^3 = 8$$
$$x = \pm 2$$

$$x^3 - 27 = 0$$
$$x^3 = 27$$
$$x = \pm 3$$

$$x^5 + 1 = 0$$
$$x^5 = -1$$
$$x = -1$$

Иррационал теңдеулер

Иррационал теңдеу деп айнымалысы түбір таңбасының ішінде, сонымен қатар бөлшек көрсеткішті дәреженің негізі болатын теңдеуді айтамыз.

$$3\sqrt{x}-2=0 \qquad \sqrt{3x-1}=2$$

$$\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}$$

x саны теңдеулердің түбірі бола ма?

$$а)\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}, x_0=4$$

$$б)\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[3]{x-2}, x_0=2$$

$$в)\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-13}, x_0=6$$

$$г)\sqrt{1-x}=-\sqrt{1+x}, x_0=0$$

Иррационал теңдеуді шешудің жалпы әдісі:

1)Егер иррационал теңдеуде бір ғана түбір белгісі болса, онда түбір белгісі теңдеудің бір жақ бөлігінде қалатын етіп түрлендіреміз. Одан кейін теңдеудің екі жақ бөлігін де бірдей дәрежеге шығару арқылы рационал теңдеуді аламыз.
2)Егер иррационал теңдеуде екі немесе одан да көп түбір белгісі болса, онда түбір белгісі теңдеудің бір жақ бөлігінде қалатын етіп түрлендіреміз. Одан кейін теңдеудің екі жақ бөлігін де бірдей дәрежеге шығарамыз. Содан кейін рационал теңдеуді алғанша осы тәсілді қайталаймыз.
3) Жаңа айнымалы енгізу әдісі;
4) теңдеулер жүйесіне келтіру;
5) теңдеуге кіретін функциялар қасиеттерін пайдалану.

Естеріңде болсын:

тексеру *иррационал теңдеулерді шешудің құрамдас бөлігі болып табылады.*

Ең қарапайым түрі: $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

Мұндай теңдеулерді шешкенде дәреженің жұп, тақ екендігі өте маңызды.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x), g(x) \geq 0$$

$$\left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n} = \left(g(x)\right)^{2n}$$

$$f(x) = g^{2n}(x)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$$

$$\left(\sqrt[2n+1]{f(x)}\right)^{2n+1} = \left(g(x)\right)^{2n+1}$$

$$f(x) = g^{2n+1}(x)$$

Дәрежелеу арқылы шығару.

№1. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1$

түбірдің дәрежесі 3-ке тең, сондықтан
екі жағында үш дәрежеге шығарамыз, мәндес теңдеу шығады.

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 1^3 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$$

№2. Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 0$

Берілген теңдеуді мынандай түрде жазып аламыз: $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+1}$,
теңдеудің екі жағын да $x + 1 \geq 0$ ескере отырып,
квадраттаймыз.
теңдеуінің шешімі x=-5, бірақ есеп шартын қанағатандырмайды.
Жауабы: шешімі жоқ.

Иррационал теңдеулер кейде бірнеше түбір белгісі болуы мүмкін. Мұндай кезде түбір белгілерінен құтылу үшін бірнеше рет дәрежеге шығаруымыз керек болады.Дәрежеге шығармас бұрын теңдеудің екі жағынының да оң екендігіне көзіміз жету керек.Ең маңыздысы анықталу облысын дұрыс табу керек.

Теңдеуді шешіңдер: $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-3}=1$ теңдеуді мынандай түрде көшіріп аламыз.

$$\sqrt{2x+9}=1+\sqrt{x-3}$$

теңдеудің екі жағы да оң болғандықтан квадраттауға болады, квадраттаймыз:

$$2x+9=1+x-3+2\sqrt{x-3}\Leftrightarrow x-7=\sqrt{x-3}$$

бұл теңдеу біздің берілген теңдеуімізге мәндес. Оның шешімін табу үшін келесі жүйені қарастырамыз.

$$\begin{cases} x-7\ge 0 \\ (x-7)^2=4(x-3) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-14x-49=4x-12 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-18x+61=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 7 \\ x=9\pm\sqrt{20} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=9+\sqrt{20}$$

Жауабы: $x=9+\sqrt{20}$

Жаңа айнымалы енгізу әдісі,бұл әдісті қолданғанда иррационал теңдеуден рационал теңдеу алуға болады.

№1.Теңдеуді шешіңіздер: $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-5}=10$

Шешуі: Жаңа айнымалы енгіземіз $y=\sqrt{x^2+3x-5},\ y\geq 0$

$$y^2+4y-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$$

Алғашқы айнымалыға қайтып келеміз: $\sqrt{x^2+3x-5}=1$

және $\sqrt{x^2+3x-5}=-5$

Екінші теңдеудің шешімі жоқ, бірінші теңдеудің шешімі:

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{33}}{2} \qquad x_2=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$$

Иррационал теңдеулерді шешудің әдісі: **функциялардың монотондығын** пайдалану.

Мысалы: Теңдеуді шешейік. $\sqrt{2(x+6)} = 6 - \sqrt[3]{x+6}$

Теңдеуді басқаша көшіреміз. $\sqrt{2(x+6)} + \sqrt[3]{x+6} = 6$

теңдеуді құрайтын дәрежелік функциялар $y = \sqrt{2(x+6)}$ және $y = \sqrt[3]{x+6}$ өздерінің анықталу облыстарында $[-6;\infty)$ өспелі, сондықтан олардың қосындысы $y(x) = \sqrt{2(x+6)} + \sqrt[3]{x+6}$ осы аралықта өспелі

әрқайсысы жеке, жеке өз мәнін бір рет ғана қабылдайды., ол мән x=2, басқа түбірі болмайды.

Берілген иррационал теңдеулерді қандай әдістермен шығарамыз?

1. $\sqrt{x}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$

2. $\sqrt{x^2+x-1}=x$

3. $\sqrt{x^2+7}=\sqrt{3-4x}$

4. $\sqrt{2x-1}=x-2$

5. $\sqrt{x^2+x-2}=-2$

6. $\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}=6$

7. $\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+5}=2$

8. $\sqrt[3]{x^3-19}=x-1$

9. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$

10. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$