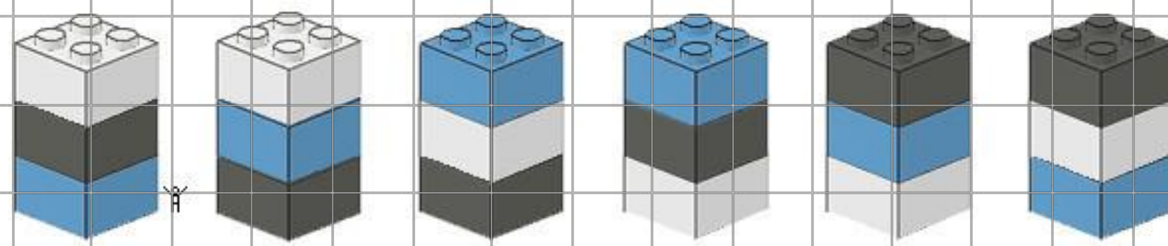
Введение в комбинаторику.

1) Комбинаторика
2) Факториал
3) Перестановки
4) Размещения
5) Сочетания

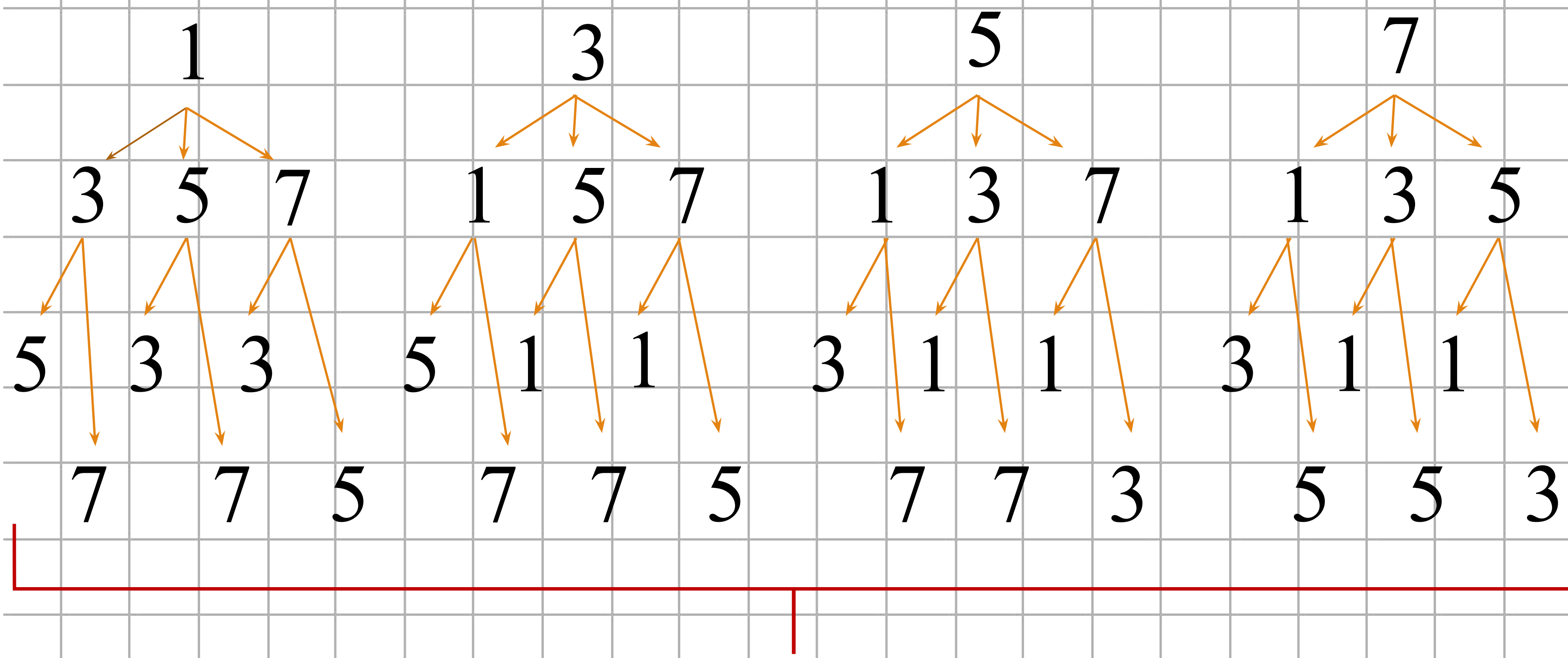


Комбинаторика.

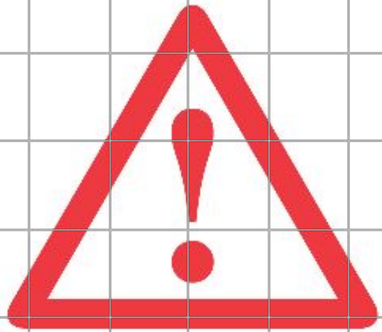
«комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare* – «соединять, сочетать».

Комбинаторика изучает количество соединений, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Пример 2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую цифру не более одного раза?



дерево вариантов



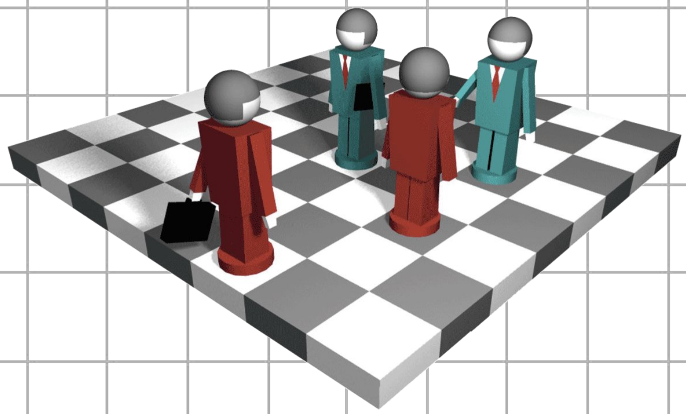
Факториал.

<u>Определение.</u> ***Факториалом*** натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Обозначение $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

<u>*Таблица факториалов:*</u>

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800



Перестановки.

<u>Определение.</u> Перестановками называют соединения, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всевозможных перестановок из *n* элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Пример 1.

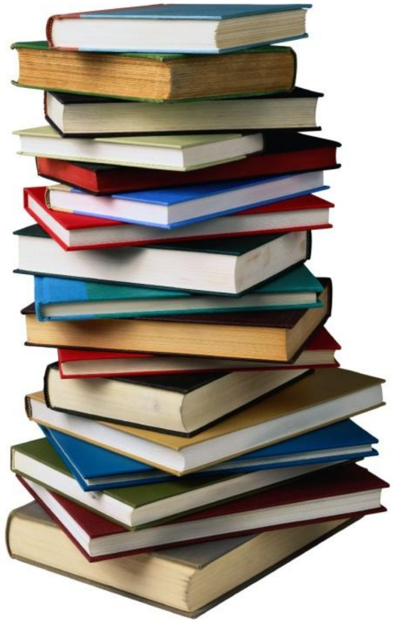
Сколькими способами могут быть расставлены восемь участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение: $P_8 = 8! = 40\,320$

Пример 2.

Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, причём в каждом числе цифры должны быть разные?

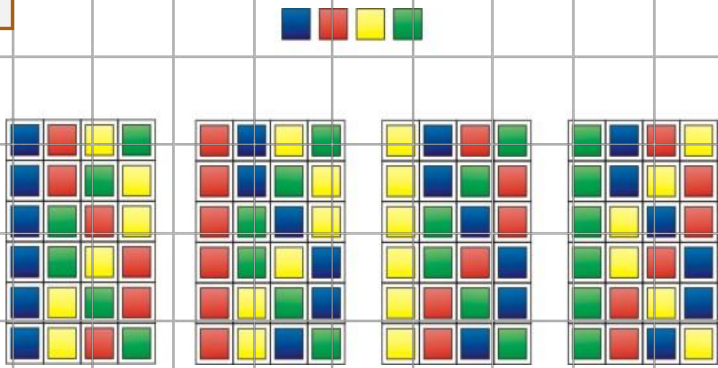
Решение: $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18.$



Пример 3.

Имеется 10 различных книг, среди которых есть трёхтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, если книги трёхтомника должны находиться вместе, но в любом прядке?

Решение: $P_7 \cdot P_3 = 7! \cdot 3! = 30240$



Размещения.

<u>Определение.</u> ***Размещением*** A_n^m из n элементов конечного множества по m, где $m \le n$, называют упорядоченное множество, состоящее из m элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 1.

Из 12 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$A_{12}^{4}=\frac{12!}{(12-4)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}=9\cdot10\cdot11\cdot12=11\,880$$

Пример 2.

Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?

Решение:

$$A_{10}^{7} - A_{9}^{6} = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9! \cdot 9}{3!} = 544\ 320$$

Сочетания.

<u>Определение</u>. Подмножества, составленные из *n* элементов данного множества и содержащие *m* элементов в каждом подмножестве, называют ***сочетаниями*** из *n* элементов по *m*. (Сочетания различаются только элементами, порядок их не важен: *ab* и *ba* – это одно и тоже сочетание).

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 1.

Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных из класса, в котором 20 человек?

Решение:

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{6} = 1\,140$$

Пример 2.

Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

Решение:

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$$

Перестановки с повторениями

Перестановкой с повторениями из n элементов, среди которых k разных, при этом насчитывается n_1 неразличимых элементов первого типа, n_2 неразличимых элементов второго типа и так далее, n_k неразличимых элементов k-го типа (где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), называется любое расположение этих элементов по n различным местам.

$$\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Пример 1.

Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Решение:

Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв. Следовательно, число перестановок с повторениями равно:

$$\bar{P}_9(1,4,3,1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520.$$

Размещения с повторениями

Если в размещениях из n элементов по m некоторые из элементов могут оказаться одинаковыми, то такие размещения называют размещениями с повторениями из n элементов по m.

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Пример 1.

У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера– составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

Решение:

Можно считать, что опыт состоит в 5-кратном выборе с возращением одной из 3 цифр (1, 3, 7). Таким образом, число пятизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 5:

$$\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243$$