

Комбинаторика (Комбинаторный анализ)

Подготовил студент 146
группы
Селин Владислав
Преподаватель
Шульгина С.А.

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них.

Комбинаторика связана со многими другими областями математики — алгеброй, геометрией, теорией вероятностей и имеет широкий спектр применения в различных областях знаний (например, в генетике, информатике, статистической физике).

История комбинаторики Древний период.

Комбинаторные мотивы можно заметить в символике китайской «Книги Перемен» (V век до н. э.). По мнению её авторов, всё в мире комбинируется из различных сочетаний мужского и женского начал, а также восьми стихий: земля, горы, вода, ветер, гроза, огонь, облака и небо.

Классическая задача комбинаторики: «сколько есть способов извлечь t элементов из N возможных» упоминается ещё в сутрах древней Индии (начиная примерно с IV века до н. э.).

Античные греки также рассматривали отдельные комбинаторные задачи, хотя систематическое изложение ими этих вопросов, если оно и существовало, до нас не дошло.

Аристоксен рассмотрел различные чередования длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Какие-то комбинаторные правила пифагорейцы, вероятно, использовали при построении своей теории чисел и нумерологии (совершенные числа, фигурные числа, пифагоровы тройки и др.).

История комбинаторики Средневековье.

В XII веке индийский математик Бхаскара в своём основном труде «Лилавати» подробно исследовал задачи, связанные с перестановками и сочетаниями, включая перестановки с повторениями.

Несколько комбинаторных задач содержит «Книга абака» (Фибоначчи, XIII век). Например, он поставил задачу найти наименьшее число гирь, достаточное для взвешивания любого товара весом от 1 до 40 фунтов.

История комбинаторики Новое время.

Джероламо Кардано написал математическое исследование игры в кости, опубликованное посмертно. Теорией этой игры занимались также Тарталья и Галилей. В историю зарождавшейся теории вероятностей вошла переписка заядлого игрока шевалье де Мерэ с Пьером Ферма и Блезом Паскалем, где были затронуты несколько тонких комбинаторных вопросов. Помимо азартных игр, комбинаторные методы использовались (и продолжают использоваться) в криптографии — как для разработки шифров, так и для их взлома. После появления математического анализа обнаружилась тесная связь комбинаторных и ряда аналитических задач.



Джероламо Кардано -
итальянский математик,
инженер, философ, медик и
астролог.

История комбинаторики

Сам термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».



Внимание к конечной математике и, в частности, к комбинаторике значительно повысилось со второй половины XX века, когда появились компьютеры. Сейчас это чрезвычайно содержательная и быстроразвивающаяся область математики.

Разделы комбинаторики

Перечислительная комбинаторика.

Перечислительная комбинаторика (или исчисляющая комбинаторика) рассматривает задачи о *перечислении* или *подсчёте* количества различных конфигураций (например, перестановок) образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться определённые ограничения, такие как: различимость или неразличимость элементов, возможность повторения одинаковых элементов и т. п.

-Количество конфигураций, образованных несколькими манипуляциями над множеством, подсчитывается согласно правилам сложения и умножения.

-Типичным примером задач данного раздела является подсчёт количества перестановок.

Разделы комбинаторики.

Вероятностная комбинаторика.

Этот раздел отвечает на вопросы вида: какова вероятность присутствия определённого свойства у заданного множества.

Топологическая комбинаторика.

Аналоги комбинаторных концепций и методов используются и в топологии, при изучении дерева принятия решений, частично упорядоченных множеств, раскрасок графа и др.

Открытые проблемы

Комбинаторика, и в частности, теория Рамсея, содержит много известных открытых проблем, подчас с весьма несложной формулировкой. Например, неизвестно, при каком наименьшем N в любой группе из N человек найдутся 5 человек, либо попарно знакомых друг с другом, либо попарно незнакомых (хотя известно, что 49 человек достаточно).

Примеры комбинаторных конфигураций и задач.

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели комбинаторных конфигураций. Примерами комбинаторных конфигураций являются:

- Размещением из n элементов по k называется упорядоченный набор из k различных элементов некоторого n -элементного множества.
- Перестановкой из n элементов (например чисел $1, 2, \dots, n$) называется всякий упорядоченный набор из этих элементов. Перестановка также является размещением из n элементов по n .
- Сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данных n элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.
- Композицией числа n называется всякое представление n в виде упорядоченной суммы целых положительных чисел.
- Разбиением числа n называется всякое представление n в виде неупорядоченной суммы целых положительных чисел.

Примеры комбинаторных конфигураций и задач.

Сколькими способами можно разместить n предметов по m ящикам так, чтобы выполнялись заданные ограничения?

Сколько существует функций F из m -элементного множества в n -элементное, удовлетворяющих заданным ограничениям?

Сколько существует различных перестановок из 52 игральные карты?

Ответ: $52!$ (52 факториал) то есть
80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000 или
примерно 8.0658×10^{67} .

При игре в кости бросаются две кости и выпавшие очки складываются, сколько существует комбинаций, таких, что сумма очков на верхних гранях равна двенадцати?

Решение: Каждый возможный исход соответствует функции (аргумент функции - это номер кости, значение - очки на верхней грани). Очевидно, что лишь $6+6$ даёт нам нужный результат 12. Таким образом существует лишь одна функция, ставящая в соответствие 1 число 6, и 2 число 6. Или, другими словами, существует всего одна комбинация, такая, что сумма очков на верхних гранях равна двенадцати.

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля — бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван в честь Блеза Паскаля. Имеет применение в теории вероятностей.

В математике биномиальные коэффициенты — это коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(1+x)^n$ по степеням x .

Бином Ньютона — формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных.

Свойства Треугольник Паскаля

Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.

В строке с номером n :

первое и последнее числа равны 1.

второе и предпоследнее числа равны n .

Если вычесть из центрального числа в строке с чётным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.

Сумма чисел n -й строки треугольника Паскаля равна 2^n .

Все числа в n -й строке, кроме единиц, делятся на число n , если и только если n является простым числом.

Если в строке с нечётным номером сложить все числа с порядковыми номерами вида $3n$, $3n+1$, $3n+2$, то первые две суммы будут равны, а третья на 1 меньше.

Каждое число в треугольнике равно количеству способов добраться до него из вершины, перемещаясь либо вправо-вниз, либо влево-вниз.

Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.

*Мартин Гарднер - математик-любитель,
писатель, популяризатор науки. 1974 год.*

Конец.