Комбинаторика (Комбинаторный анализ)

Подготовил студент 146 группы
Селин Владислав
Преподаватель
Шульгина С.А.

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них.

Комбинаторика связана со многими другими областями математики — алгеброй, геометрией, теорией вероятностей и имеет широкий спектр применения в различных областях знаний (например, в генетике, информатике, статистической физике).

История комбинаторики
Древний период.

Комбинаторные мотивы можно заметить в символике китайской «Книги Перемен» (V век до н. э.). По мнению её авторов, всё в мире комбинируется из различных сочетаний мужского и женского начал, а также восьми стихий: земля, горы, вода, ветер, гроза, огонь, облака и небо.

Классическая задача комбинаторики: «сколько есть способов извлечь m элементов из N возможных» упоминается ещё в сутрах древней Индии (начиная примерно с IV века до н. э.).

Античные греки также рассматривали отдельные комбинаторные задачи, хотя систематическое изложение ими этих вопросов, если оно и существовало, до нас не дошло.

Аристоксен рассмотрел различные чередования длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Какие-то комбинаторные правила пифагорейцы, вероятно, использовали при построении своей теории чисел и нумерологии (совершенные числа, фигурные числа, пифагоровы тройки и др.).

История комбинаторики
Средневековье.

В XII веке индийский математик Бхаскара в своём основном труде «Лилавати» подробно исследовал задачи, связанные с перестановками и сочетаниями, включая перестановки с повторениями.

Несколько комбинаторных задач содержит «Книга абака» (Фибоначчи, XIII век). Например, он поставил задачу найти наименьшее число гирь, достаточное для взвешивания любого товара весом от 1 до 40 фунтов.

История комбинаторики
Новое время.

Джероламо Кардано написал математическое исследование игры в кости, опубликованное посмертно. Теорией этой игры занимались также Тарталья и Галилей. В историю зарождавшейся теории вероятностей вошла переписка заядлого игрока шевалье де Мерэ с Пьером Ферма и Блезом Паскалем, где были затронуты несколько тонких комбинаторных вопросов. Помимо азартных игр, комбинаторные методы использовались (и продолжают использоваться) в криптографии — как для разработки шифров, так и для их взлома. После появления математического анализа обнаружилась тесная связь комбинаторных и ряда аналитических задач.

Джероламо Кардано - итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог.

История комбинаторики

Сам термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Внимание к конечной математике и, в частности, к комбинаторике значительно повысилось со второй половины XX века, когда появились компьютеры. Сейчас это чрезвычайно содержательная и быстроразвивающаяся область математики.

Разделы комбинаторики
Перечислительная комбинаторика.

Перечислительная комбинаторика (или исчисляющая комбинаторика) рассматривает задачи о *перечислении* или *подсчёте количества* различных конфигураций (например, перестановок) образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться определённые ограничения, такие как: различимость или неразличимость элементов, возможность повторения одинаковых элементов и т. п.

-Количество конфигураций, образованных несколькими манипуляциями над множеством, подсчитывается согласно правилам сложения и умножения.

-Типичным примером задач данного раздела является подсчёт количества перестановок.

Разделы комбинаторики.

Вероятностная комбинаторика.

Этот раздел отвечает на вопросы вида: какова вероятность присутствия определённого свойства у заданного множества.

Топологическая комбинаторика.

Аналоги комбинаторных концепций и методов используются и в топологии, при изучении дерева принятия решений, частично упорядоченных множеств, раскрасок графа и др.

Открытые проблемы

Комбинаторика, и в частности, теория Рамсея, содержит много известных открытых проблем, подчас с весьма несложной формулировкой. Например, неизвестно, при каком наименьшем N в любой группе из N человек найдутся 5 человек, либо попарно знакомых друг с другом, либо попарно незнакомых (хотя известно, что 49 человек достаточно).

Примеры комбинаторных конфигураций и задач.

Для формулировки и решения комбинаторных задач используют различные модели комбинаторных конфигураций. Примерами комбинаторных конфигураций являются:

-Размещением из *n* элементов по *k* называется упорядоченный набор из *k* различных элементов некоторого *n*-элементного множества.

-Перестановкой из *n* элементов (например чисел 1,2,…,*n*) называется всякий упорядоченный набор из этих элементов. Перестановка также является размещением из *n* элементов по *n*.

-Сочетанием из *n* по *k* называется набор *k* элементов, выбранных из данных *n* элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.

-Композицией числа *n* называется всякое представление *n* в виде упорядоченной суммы целых положительных чисел.

-Разбиением числа *n* называется всякое представление *n* в виде неупорядоченной суммы целых положительных чисел.

Примеры комбинаторных конфигураций и задач.

Сколькими способами можно разместить *n* предметов по *m* ящикам так, чтобы выполнялись заданные ограничения?

Сколько существует функций *F* из *m*-элементного множества в *n*-элементное, удовлетворяющих заданным ограничениям?

Сколько существует различных перестановок из 52 игральных карт?

Ответ: 52! (52 факториал) то есть 80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000 или примерно 8.0658 × 1067.

При игре в кости бросаются две кости и выпавшие очки складываются, сколько существует комбинаций, таких, что сумма очков на верхних гранях равна двенадцати?

Решение: Каждый возможный исход соответствует функции (аргумент функции - это номер кости, значение - очки на верхней грани). Очевидно, что лишь 6+6 даёт нам нужный результат 12. Таким образом существует лишь одна функция, ставящая в соответствие 1 число 6, и 2 число 6. Или, другими словами, существует всего одна комбинация, такая, что сумма очков на верхних гранях равна двенадцати.

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля — бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван в честь Блеза Паскаля. Имеет применение в теории вероятностей.

В математике биномиальные коэффициенты — это коэффициенты в разложении бинома Ньютона (1+x)^n по степеням x.

Бином Ньютона — формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Треугольник Паскаля

0: 1

1: 1 1

2: 1 2 1

3: 1 3 3 1

4: 1 4 6 4 1

5: 1 5 10 10 5 1

6: 1 6 15 20 15 6 1

7: 1 7 21 35 35 21 7 1

8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1

9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

11: 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

12: 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

13: 1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

14: 1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

Первые 14 строк треугольника Паскаля (n = 0, 1, …, 14)

Свойства Треугольник Паскаля

Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.

В строке с номером n:

первое и последнее числа равны 1.

второе и предпоследнее числа равны n.

Если вычесть из центрального числа в строке с чётным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.

Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.

Все числа в n-й строке, кроме единиц, делятся на число n, если и только если n является простым числом.

Если в строке с нечётным номером сложить все числа с порядковыми номерами вида 3n, 3n+1, 3n+2, то первые две суммы будут равны, а третья на 1 меньше.

Каждое число в треугольнике равно количеству способов добраться до него из вершины, перемещаясь либо вправо-вниз, либо влево-вниз.

Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.

Мартин Гарднер - математик-любитель, писатель, популяризатор науки. 1974 год.

Конец.