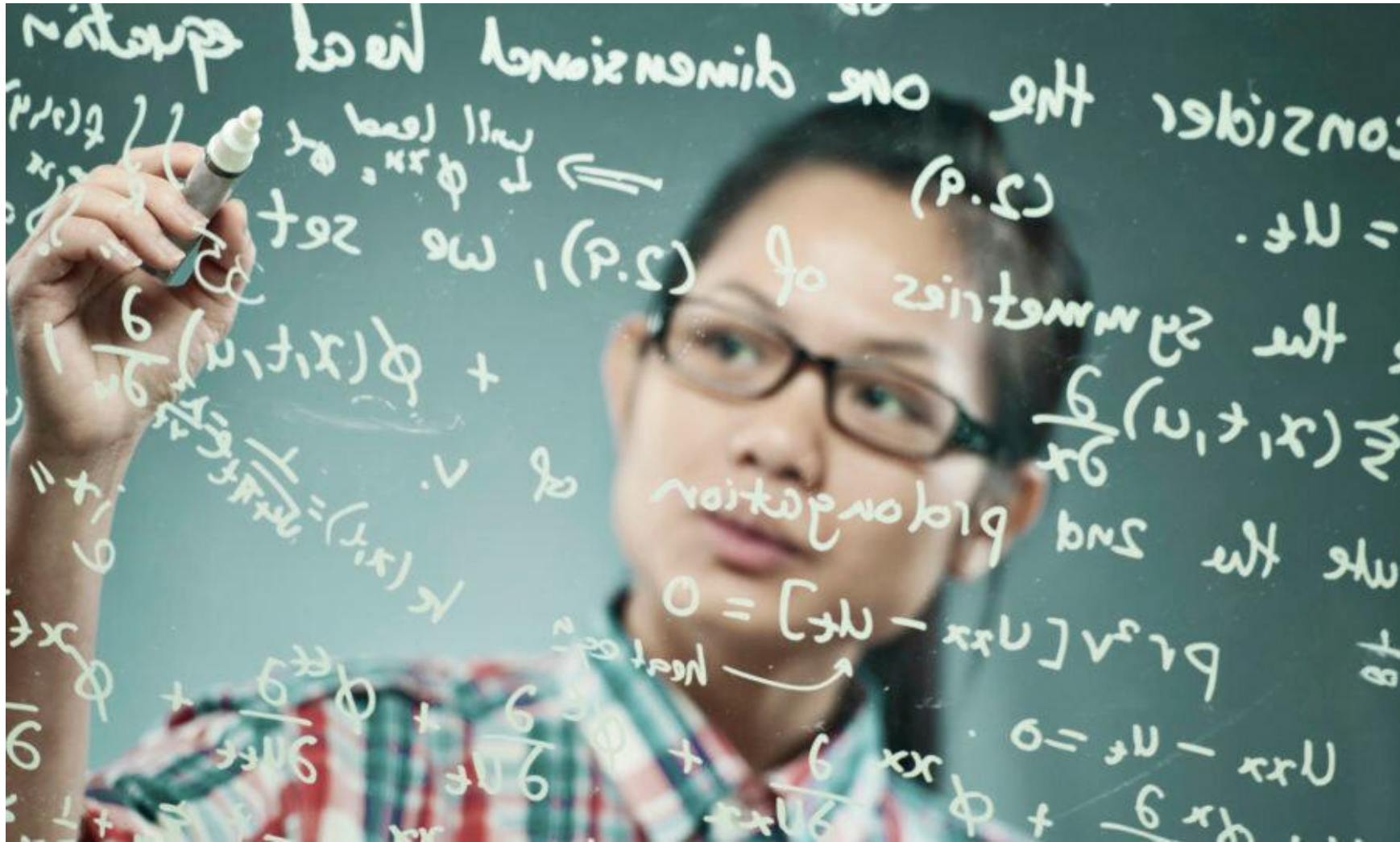


# ТЕМА ЗАНЯТИЯ: «Олимпиадная математика»



# **Тематика заданий муниципального этапа олимпиады**

## **VI-VII**

**Специальные олимпиадные темы.**

**Числовые ребусы. Взвешивания.**

**Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.**

**«Оценка + пример».**

**Построение примеров и контрпримеров.**

**Инвариант.**

**Принцип Дирихле.**

**Разрезания.**

**Раскраски.**

**Игры.**

## VIII-IX КЛАССЫ

**Специальные олимпиадные темы.**

**Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.**

**«Оценка + пример».**

**Построение примеров и контрпримеров.**

**Принцип Дирихле.**

**Разрезания.**

**Раскраски.**

**Игры.**

**Инвариант.**

**Чётность.**

**Элементы комбинаторики.**

**Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).**

# ЧЁТНОСТЬ

## Теоретический материал

Известно, что целые числа бывают четными и нечетными. Четные числа можно записать в виде  $2k$ , где  $k$  - целое число, а нечетные – в виде  $2k + 1$  или  $2k - 1$ . Применение идеи четности и нечетности для решения олимпиадных задач основано на двух важных утверждениях:

- 1. Четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.**

Пример. Число  $1+2+3+\dots+10$  – нечетное, так как в сумме 5 нечетных слагаемых..

Число  $3+5+7+9+11+13$  – четное, так как в сумме 6 нечетных слагаемых.

- 1. Знак произведения нескольких (отличных от 0) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.**

## **Свойства четности:**

- 1) Сумма четных чисел четна.**
  - 2) Сумма двух нечетных чисел четна.**
  - 3) Сумма четного и нечетного чисел нечетна.**
  - 4) Произведение любого числа на четное число четно.**
  - 5) Если произведение нечетно, то все сомножители нечетны.**
  - 6) Сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.**
  - 7) Сумма четного количества нечетных чисел четна.**
  - 8) Разность и сумма двух данных чисел есть числа одной четности.**
  - 9) Если объекты можно разбить на пары, то их количество четно.**
- Все эти соображения можно на олимпиаде вставлять в текст решения задачи, как очевидные утверждения.**

**Пример 1. Могут ли 20 тетрадей ценой в 9, 11 и 13 рублей стоить в сумме 193 рубля?**

**Пример 2. Может ли сумма  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot M + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot K$ , где  $M, K$  принадлежит  $N$  и больше 3, оканчиваться на 9?**

**Пример 3. На столе лежат 6 монет, одна из них вверх орлом, другие – решкой. Можно ли все монеты положить вверх орлом, если можно одновременно переворачивать по две монеты?**

**Пример 4. 1. Кузнецу заказали выковать десять мечей. Каждый меч может стоить 3, 5 или 7 златников. Могут ли они стоить в сумме 53 златника?**

**Пример 5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2005, 2006. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?**

## Теоретический материал

**Принцип Дирихле** – утверждение, сформулированное немецким математиком Дирихле в 1834 году, устанавливающее связь между объектами («кроликами») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий.

Принцип Дирихле выражает соотношение между двумя множествами. Самая популярная следующая формулировка принципа: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух кроликов».

*Общая формулировка: Если  $n$  кроликов сидят в  $k$  ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем  $n/k$  кроликов, и найдётся ящик, в котором сидят не больше чем  $n/k$  кроликов.* Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

Допустим, что в каждом ящике сидят меньше чем  $n/k$  кроликов. Тогда во всех ящиках вместе кроликов меньше чем  $(n/k) \cdot k = n$ . Противоречие.

**Пример 1.** В магазин привезли 25 ящиков яблок трех сортов, причем в каждом ящике лежат яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

**Пример 2.** На олимпиаде 10 школьников решили в сумме 35 задач, причем среди них были решившие ровно одну, ровно две и ровно три задачи. Доказать, что кто-то из них решил не менее 5 задач.

**Пример 3.** В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

**Пример 4.** В классе учится 27 школьников, знающих (всего) 109 стихотворений. Докажите, что найдётся школьник, знающий не менее пяти стихотворений.

**Пример 5.** Докажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых кратна 5

**Пример 6.** 100 человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое мужчин сидят друг напротив друга.

**Пример 7.** Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 2013.



**Перейдем теперь к обобщенному принципу Дирихле. На языке кроликов и клеток его можно записать так:**

если в 10 клетках сидит 51 кролик, то по крайней мере в одной клетке сидит не менее 6 кроликов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

Доказательство аналогично обычному принципу Дирихле. Действительно, если в каждой клетке сидит менее 6 кроликов, то во всех 10 клетках кроликов не более 50 — противоречие.

В математических терминах это выглядит так:

если элемент разбит на  $n$  множеств, то по крайней мере одно множество содержит не менее  $\frac{n}{k} + 1$  элементов.

**Пример. Имеется 101 пуговица одного из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов**

## Оценка плюс пример

**Оценка плюс пример** — это метод решения задач, который применяется при нахождении наибольших или наименьших значений. Суть метода состоит в следующем. Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины  $A$ .

**Действуем в два этапа:**

1. Оценка. Показываем, что выполнено неравенство  $A \geq \alpha$
2. Пример. Предъявляем пример, когда достигается равенство  $A = \alpha$

Тем самым доказываем, что наименьшее значение величины  $A$  равно  $\alpha$

**Пример 1. Натуральные числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать частное от деления первого произведения на второе?**

**Пример 2. Каково наименьшее натуральное  $n$  такое, что  $n!$  делится на 18, на 19, на 20 и на 21?**

**Пример 3 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075. Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?**

# Инвариант

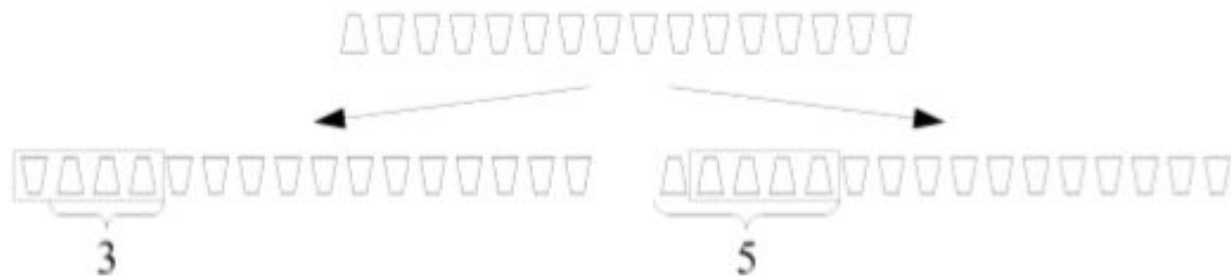
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

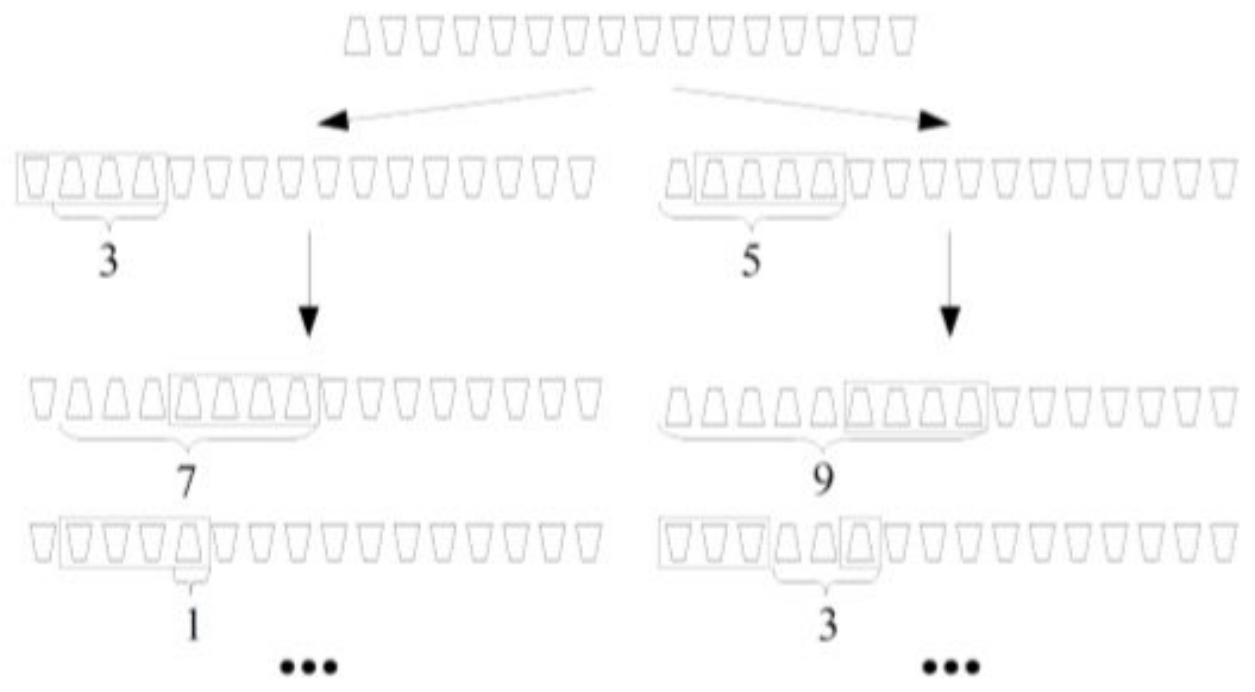
**Инвариантом называется величина или некоторое свойство, которое не меняется при заданных преобразованиях.**

Инвариант — термин, используемый в математике и физике, а также в программировании, обозначает нечто неизменяемое. Все задачи, объединённые условным названием «инвариант», имеют следующий вид: даны некоторые объекты, над которыми разрешается выполнять определённые операции. Как правило, в задаче спрашивается, можно ли при помощи этих операций из одного объекта получить другой? Если можно, то нужно привести пример, как это сделать. Если нельзя, нужно доказать, что это невозможно.

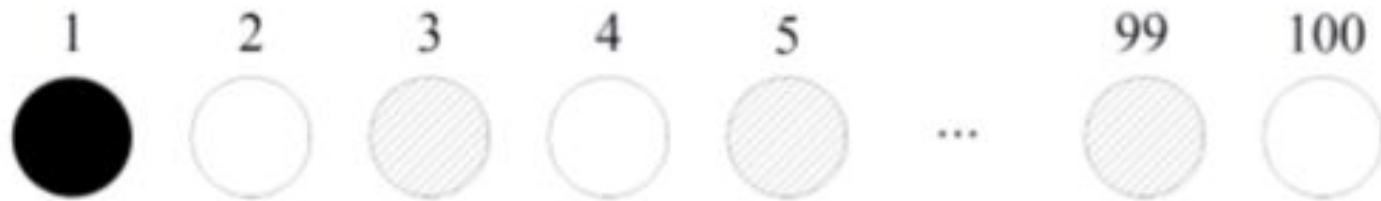
В качестве инварианта могут выступать самые разные величины: чётность, сумма, произведение, остаток по некоторому модулю и т.д.

**Пример1. На столе стоят 16 стаканов. При этом 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые 4 стакана. Можно ли при помощи таких операций добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?**

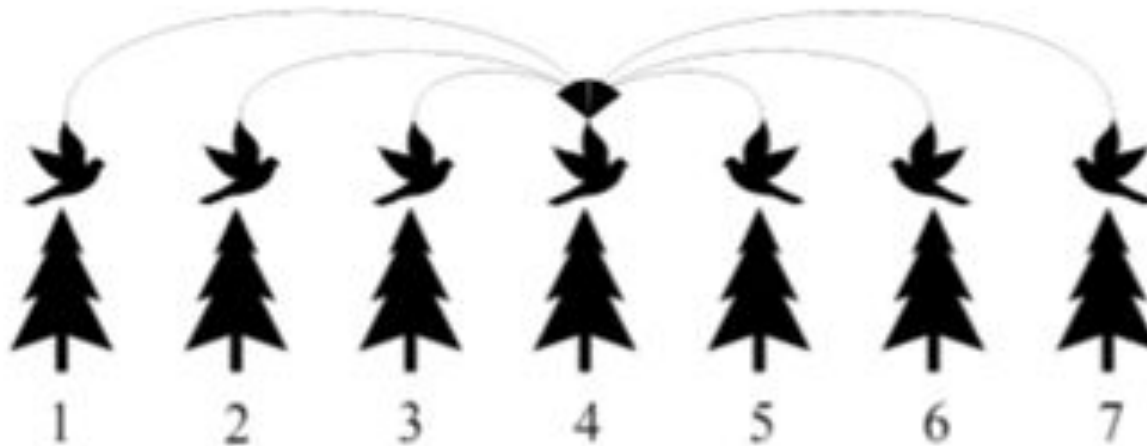




**Пример. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?**



**Пример3.** На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, только в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке? А если чижей и ёлок – семь?





Какова общая стратегия решения задач на инварианты?

**Во-первых**, инвариант нужно заметить.

Для этого можно смоделировать разные последовательности применения операций и выделить какое-то характерное условие, которое всегда выполняется.

**Во-вторых**, нужно доказать, что инвариант будет выполняться при любом применении операций. В разобранных задачах это довольно очевидно. Строго говоря, для доказательства используется **метод математической индукции**.

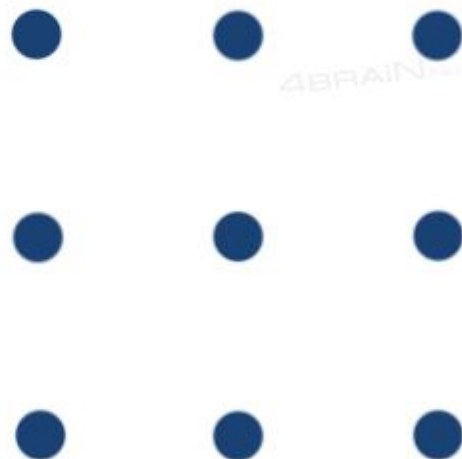
Пусть нужно доказать, что некоторый инвариант будет выполняться после любого числа допустимых операций. Обозначим число операций через  $n$  и начнём доказательство по индукции. Сначала нужно **доказать базу индукции** — инвариант выполняется в самом начале, т.е. при  $n = 0$ .

Затем доказывается **переход индукции**: показывается, что из выполнения инварианта после  $n$  операций следует его выполнение после  $n + 1$  операции, т.е. что допустимые операции не влияют на инвариант. По индукции отсюда следует, что инвариант будет выполняться после любых  $n$  операций для любого целого  $n > 0$ .

#### **Пример 4.**

**На столе лежит куча из  $n$  ракушек. Из нее убирают одну ракушку и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какойнибудь кучи, содержащей более одной ракушки, снова убирают одну ракушку и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трёх ракушек при  $n = 635$  и  $n = 637$ ?**

# ПЕРЕМЕНКА



**Условие:** нужно соединить нарисованные девять точек четырьмя прямыми линиями не отрывая ручки от листа бумаги.

# Рефлексия.

