Стратегические игры

Игры «НИМ» – игры для 2 игроков, ходы которых можно просчитать математически.

Среди возможных версий — староанглийское слово «ним», означавшее «брать», «красть». Некто очень остроумный заметил, что если применить к слову **NIM** центральную симметрию, получится слово **WIN** — «выиграть» в переводе с английского. Как бы то ни было, игре Ним больше ста лет: первый анализ выигрышной стратегии для игр

подобного типа был впервые опубликован в **1902** году математиком Гарвардского университета Чарльзом Леонардом Боутоном.

Игра в шахматы

«Игра в шахматы» — полотно, созданное в 1555 году художницей эпохи Возрождения Софонисбой Ангиссолой. В этой игре отсутствует элемент случайности, но число возможных ходов столь велико, что не поддается математическому контролю.

Как белке выиграть орехи?

Имеются 6 орехов. Белка и заяц берут по очереди по одному, по два или по три ореха. Проигрывает тот, кому достался последний орех.

Как правильно играть белке (начинающему), чтобы не проиграть?

Решение

- Рассмотрим три варианта.
- 1) Начинающий берет три ореха. Тогда противник, взяв 2 ореха, выигрывает, так как начинающему игру остается один орех.
- 2) Начинающий берет 2 ореха, тогда противник, взяв 3 ореха, выигрывает, так как начинающему игру достается 1 орех.
- 3) Начинающий берет один орех. Тогда при любом числе орехов, взятым противником (1; 2; 3), начинающий должен брать столько орехов, чтобы остался один орех (4 - 1 = 3; 4 - 2 = 2; 4 - 3 = 1).

Ответ

Таким образом, взяв сначала 1 орех и действуя далее правильно (беря столько орехов, чтобы они с числом, взятым противником, давали в сумме 4), начинающий всегда выигрывает.

Любит - не любит?

Две девочки играют в игру - отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно отрывать либо 1 лепесток, либо 2 лепестка расположенных друг с другом. Побеждает та девочка, которая оторвала последний лепесток.

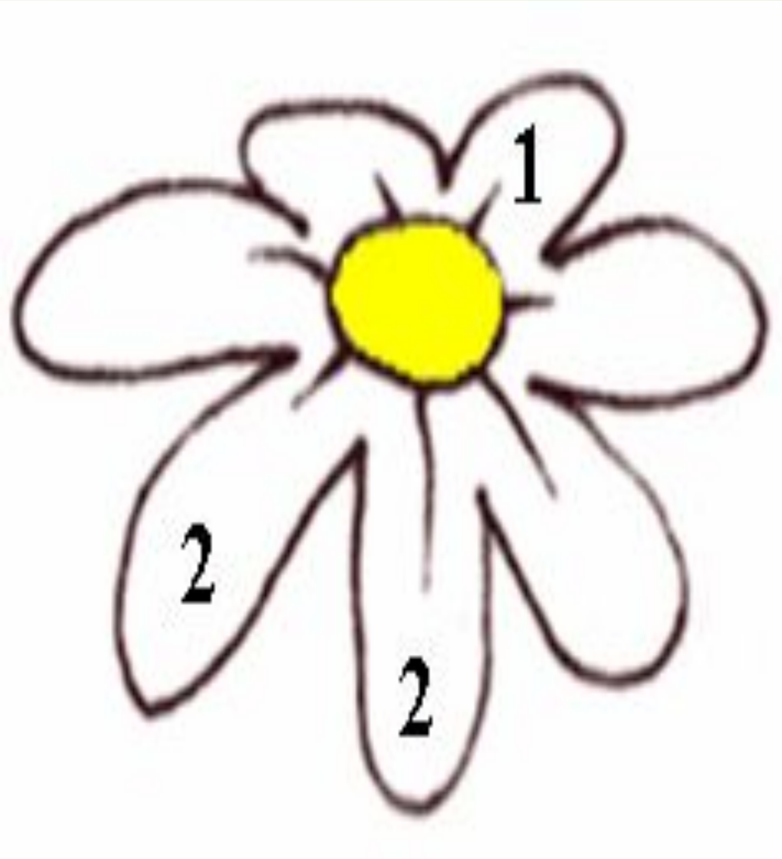
Кто выигрывает при правильной игре?

Решение

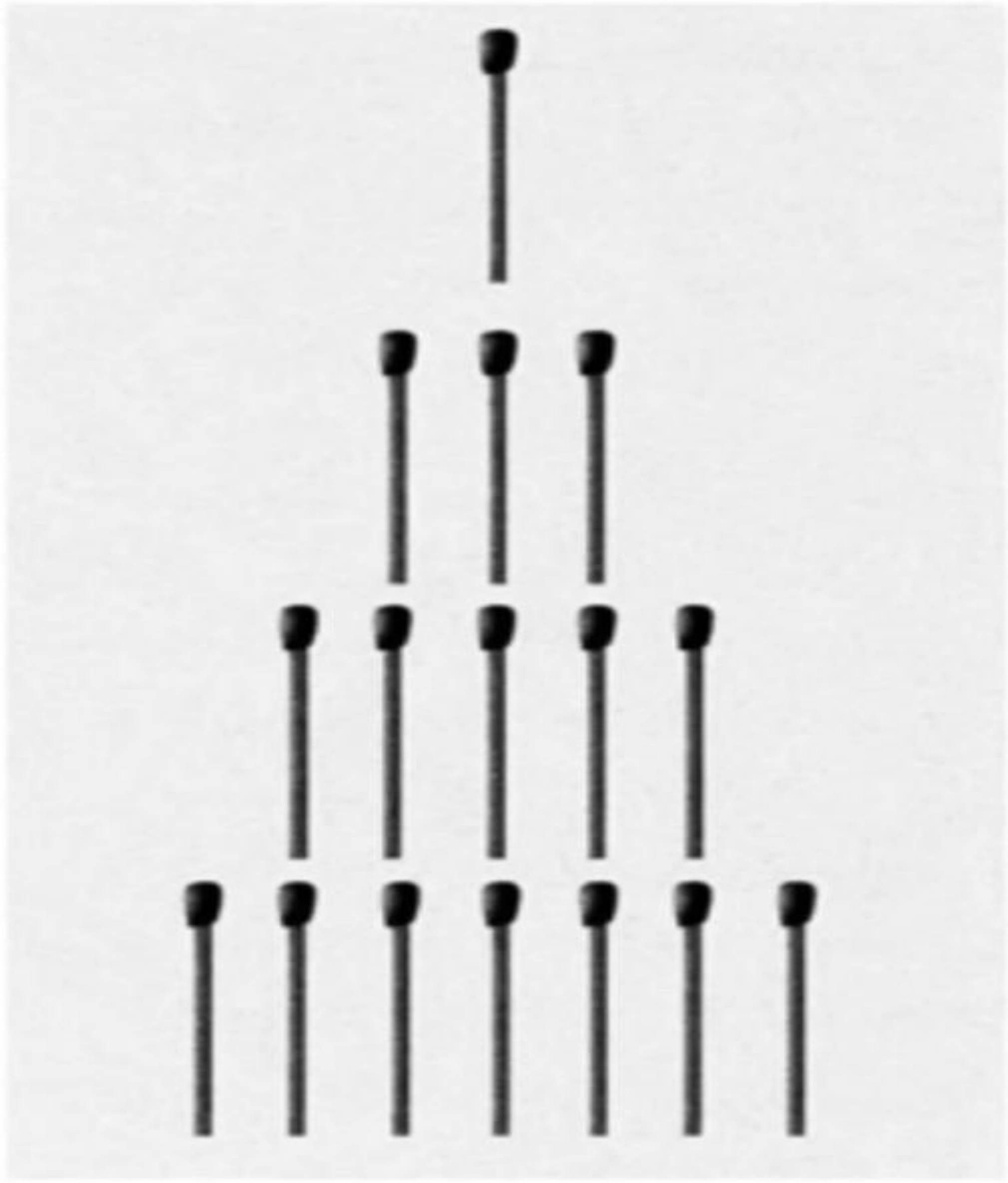
При правильной игре выигрывает вторая девочка.

При любом первом ходе есть возможность сделать такой второй ход, который разобьет все оставшиеся лепестки на две симметричные части (смотри рисунок).

Далее вторая девочка делает ходы симметрично ходам первой.



Мариенбад



«Мариенбад» — одна из версий игры Ним.

Игра 1: выигрывает первый

На стол выкладываются **20** фишек одного цвета. На каждом ходу один из двух игроков может брать **одну** или **две** фишки. Тот, кто берет последнюю фишку, выигрывает.

- Какой из игроков имеет преимущество — тот, кто ходит первым, или второй участник?
- Как нужно играть, чтобы всегда выигрывать?
- Что произойдет, если изменится число фишек?
- Что поменяется, если мы изменим правила игры и тот, кто берет последнюю фишку, будет проигрывать?

Стратегия

Всегда выигрывает тот, кто оставляет на столе число фишек, кратное **3**. Это позволяет сформулировать выигрышную стратегию: когда в начальной позиции на столе **20** фишек, первый игрок будет всегда выигрывать, если будет брать первым ходом **2** фишки и затем всегда оставлять на столе количество фишек, кратное **3** (если второй игрок снимает **одну** всегда выигрывает тот, кто оставляет на столе число фишек, кратное **3**. Это позволяет сформулировать выигрышную стратегию: когда в начальной позиции на столе **20** фишек, первый игрок будет всегда выигрывать, если будет брать первым ходом **2** фишки и затем всегда оставлять на столе количество фишек, кратное **3** (если второй игрок снимает **одну** фишку, первый игрок должен взять **две**, и наоборот). В этой игре первый игрок имеет преимущество, так как для него существует выигрышная стратегия.

На чьей стороне преимущество?

Чтобы узнать, на чьей стороне преимущество, достаточно разделить начальное количество фишек на **3** и посмотреть, каков остаток от деления. Если остаток равен **2** (как в исходном случае), то первый игрок всегда выигрывает, если берет первым ходом **2** фишки, а затем оставляет на столе число фишек, кратное **3** (если противник берет **одну** фишку, первый игрок берет **две**, и наоборот). Если остаток от деления равен **1** (например, число фишек равно **19**, **25**, **100**или **2017**), то первый игрок также выигрывает. Для этого достаточно взять первым ходом **одну** фишку. Наконец, если остаток равен **0** (количество фишек делится на **3**), то выигрывает второй игрок: ему нужно взять **две** фишки, если первый игрок взял **одну**, и наоборот. В этом случае первый игрок никогда не сможет оставить на столе число фишек, кратное **3**.

Игра 2: выигрывает второй

Первый игрок пишет на бумаге число от **1** до **10**. Второй игрок придумывает число от **1** до **10** и записывает результат сложения этого числа с первым. На каждом ходу игрок прибавляет к общей сумме новое придуманное им число от **1** до **10**. Тот игрок, который запишет трехзначное число (**100** и больше), проигрывает.

- Как нужно играть, чтобы выигрывать?
- Какой из игроков имеет преимущество: тот, кто ходит первым или вторым?
- Что произойдет, если изменится цель игры или правила?

Стратегия

Будем анализировать игру следующим образом: если проигрывает тот, кто напишет **100**, выигрывает тот, кто напишет **99**. Какое число нужно написать до этого, чтобы гарантированно получить **99** на следующем ходу? Это **88**, так как в этом случае противник напишет любое число между **89** и **98**, после чего первый игрок легко получит **99**. Как и в прошлой игре, продолжая подобные рассуждения (перейдя к числу **88**, затем **77**, **66**, ..., **11**), мы увидим, что на этот раз нужно формировать группы по **11**. Теперь нам известна выигрышная стратегия: тот, кто первым записывает **11** и последующие числа, кратные **11**, первым получит **99** и выиграет. Если противник прибавляет **n**, нужно прибавлять **11 - n**. Так как на первом ходу первый игрок не может получить **11**, а второй может, это означает, что существует выигрышная стратегия для второго игрока. Как и в прошлой игре, при изменении конечного числа будет выигрывать первый игрок, если это число не будет кратно **11**. Если это число будет делиться на **11**, всегда будет побеждать второй игрок.

Игра 3: общий случай

Допустим, что на столе **m** фишек и каждым ходом можно брать от **1** до **m** фишек (**n < m**). Выигрывает тот, кто забирает последнюю фишку.

- Для какого из игроков существует выигрышная стратегия — для первого или второго?
- В чем она заключается?
- Если игрок, взявший последнюю фишку, будет проигрывать, как изменится стратегия?

Суть игры

Речь идет не об одной игре, а о группе абстрактных игр. Две предыдущие игры — ее частные случаи. Следовательно, выигрышная стратегия для этой игры — это общая стратегия, которая применима к бесконечному множеству аналогичных игр. Эта стратегия формулируется так. Поделим **m** на **n + 1** и определим остаток от деления. Он будет находиться в интервале от **0** до **n**. Возможны два случая:

1 случай

Остаток от деления равен **0**. В этом случае существует выигрышная стратегия для второго игрока, который должен оставлять на столе число фишек, кратное **n + 1**. Для этого на каждом ходу, если первый игрок берет **ρ** фишек (**0 < ρ < n + 1**), второй должен брать **n + 1 - ρ** фишек. Это число всегда положительно, так как находится на интервале от **0** до **n**.

2 случай

Остаток от деления равен **r** (**0 < r < n + 1**).В этом случае существует выигрышная стратегия для первого игрока. На первом ходу он должен взять **r** фишек, оставив на столе число фишек, кратное **n + 1**. Теперь он может действовать подобно второму игроку из первого случая. Иными словами, если второй игрок берет **ρ** фишек (**0 < ρ < n + 1**), первый должен взять **n + 1 - ρ**.

Обобщение

Это общее решение применимо к бесконечному множеству игр. Вы можете применить его для такой игры: на столе 2010 фишек, на каждом ходу можно брать от 1 до 49 фишек. Для какого игрока существует выигрышная стратегия? В чем она заключается? Если мы изменим правила и тот, кто берет последнюю фишку, будет проигрывать, то достаточно заметить следующее: для победы будет достаточно взять предпоследнюю фишку, оставив на столе всего одну. В этом случае стратегия не изменится, просто нужно будет учесть, что число фишек равно

m - 1, а не **m**.