ГАПОУ КК
«Новороссийский колледж строительства и экономики»

Равномерное распределение случайной величины

Дисциплина Теория вероятностей и математическая статистика

Преподаватель математики НКСЭ
Козлова О.В.

К важнейшим непрерывным распределениям случайной величины относятся

- Нормальное,
- Равномерное,
- Показательное.

Равномерное распределение и его числовые характеристики

Равномерное распределение непрерывной случайной величины встречается в тех ситуациях, когда мы имеем дело с различными циферблатами (часы, весы, физические приборы и т.д.). Также равномерное распределение возникает как распределение ошибок при округлении чисел.

Определение

Равномерным называется распределение таких случайных величин, все значения которых лежат на некотором отрезке [a, b] и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке.

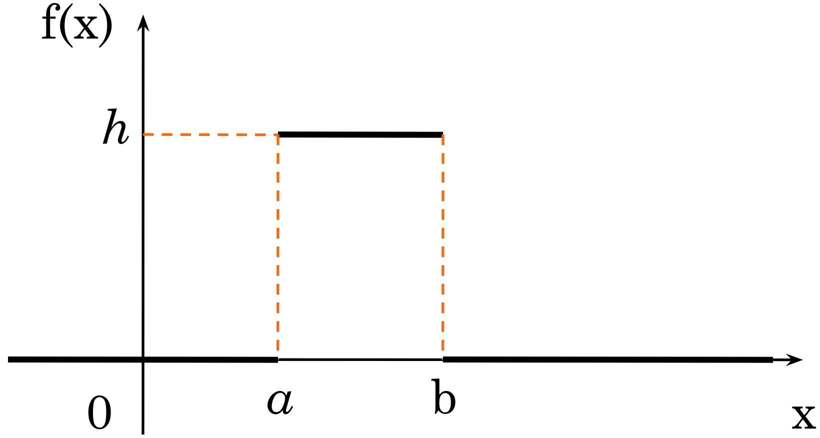
Плотность вероятности задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ h = const & \text{при } a \le x \le b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Равномерное распределение задается указанием соответствующего отрезка, поэтому СВ X , распределенная равномерно на [a, b] обозначается

$$X \in U[a; b]$$

При равномерном распределении график плотности вероятности имеет вид



Поскольку площадь прямоугольника равна $h(b\text{-}a)=1$, то $h=1/(b\text{-}a)$. Тогда функцию плотности вероятности можно записать в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Числовые характеристики

Математическое ожидание *НСВ* при равномерном распределении равно

$$M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b+a}{2},$$

т.е. среднему арифметическому концов отрезка

$$. \; M(X) = \frac{b+a}{2}$$

Дисперсия равномерного распределения вычисляется по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Действительно,

$$. \quad M(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^2+ab+b^2}{3}.$$

Тогда

$$D(X) = \frac{b^2 + ab + b^2}{3} - \frac{b^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}},$$

так как $b > a$ по условию.

Случайные величины с равномерным распределением встречаются в тех случаях, когда по условиям эксперимента случайная величина X принимает значения в конечном промежутке

[*a, b*], причем все значения *равновероятны*:

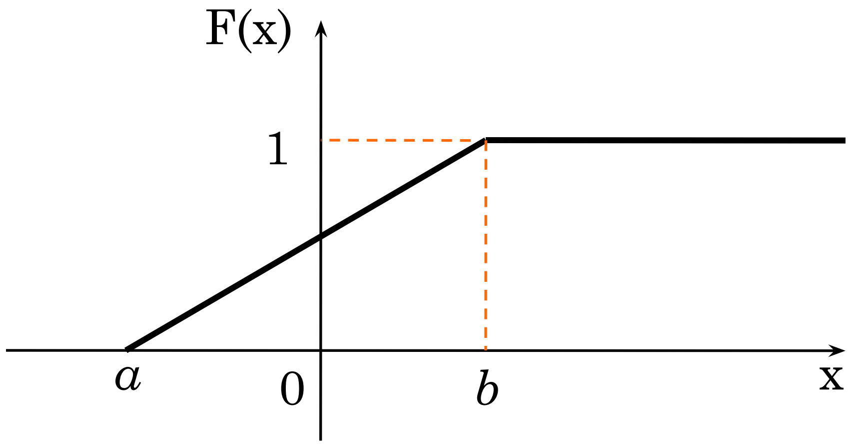
- *X* – время ожидания автобуса на остановке (случайная величина X равномерно распределена на отрезке [*0, b*], где *b* – интервал движения между автобусами);
- *X* – ошибка при взвешивании некоторого предмета, полученная при округлении результата до целого значения (в этом случае

  x принадлежит [-0,5;0,5), если цена деления равна единице) и др.

Функция распределения НСВ, равномерно распределенной на отрезке [a, b], имеет вид

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Ее график изображен на рисунке



Если некоторый отрезок [α, β] длиной l целиком содержится в отрезке [a; b], то вероятность попадания в него случайной величины , распределенной равномерно, $X \in U[a;b]$ формуле

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}(\beta - \alpha) = \frac{l}{b-a},$$

Задача 1.

Непрерывная случайная величина X распределена равномерно. Найдите:

а) функцию распределения НСВ X и постройте ее график;

б) плотность вероятности НСВ X и постройте ее график;

в) ее числовые характеристики;

г) вероятность попадания НСВ X на интервал (α, β), если $a = 2$; $b = 4$; $\alpha = 3$; $\beta = 5$.

Используемая литература

- М.С. Спирина Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования