Динамическое программирование

Оглавление

Динамическое программирование

- Это раздел математики, посвященный теории и методам решения многошаговых задач оптимального управления

- В динамическом программирование для управляемых процессов среди всевозможных управлений ищется то, которое доставляет экстремальное (наименьшее или наибольшее) значение целевой функции - некоторой числовой характеристики процесса. Под многошаговостью понимают либо многоступенчатую структуру процесса, либо что управление разбивается на ряд последовательных этапов (шагов), соответствующих, как правило, различным моментам времени. Таким образом, в названии динамическое программирование под программированием понимают принятие решений, планирование, а слово динамическое указывает на существенную роль времени и порядка выполнения операций в рассматриваемых процессах и методах.

Основная идея динамического программирование

- Пусть процесс управления некоторой системой X состоит из t шагов (этапов); на i-м шаге управление y_i переводит систему из состояния xi-1, достигнутого в результате (i-1)-го шага, в новое состояние ж,-. Этот процесс перехода осуществляет заданная функция fi(x, y), и ново

$$x_i = f_i(x_{i-1}, y_i)$$

значениями xi-1, yi :

- Таким образом, управления $y_1, y_2, \dots, y_m$ переводят систему из начального состояния в конечное - где x_o и X_m - совокупности допустимых начальных и конечных состояний системы X. Опишем одну из возможных постановок экстремальной задачи. Начальное состояние x_o задано. Требуется выбрать управления $y_1, y_2, \dots, y_m$ таким образом, чтобы система X перешла в допустимое конечное состояние и при этом заданная целевая функция $F(x_o, y_1, x_1, y_2, \dots, y_m, x_m)$ достигла максимального значения F^*, т. е.

$$F^* = \max_{y_1, y_2, \dots, y_m} F(x_0, y_1, x_1, y_2, \dots, y_m, x_m)$$

- Важной особенностью метода динамического программирования является то, что он применим лишь для аддитивной целевой функции.. В рассмотренном примере это означает, что

$$F = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_{i-1}, i)$$

- Кроме того, в методе динамического программирования требуется, чтобы задача характеризовалась отсутствием "последействия": решения (управления), принимаемые на шаге, оказывают влияние только на состояние x_i системы в момент i. Другими словами, процессы, описываемые функциями вида $x_i = f_i(x_{i-1}, y_i, x_{i-2}, y_{i-1}, \ldots, y_1, x_0)$ не рассматриваются. Оба упомянутых ограничительных условия можно ослабить, но только за счет существенного усложнения метода.

- Для решения задач динамического программирования обычные методы математического анализа либо вообще неприменимы, либо приводят к огромному числу вычислений. В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом (R. Bellman): предположим, что осуществляя управление дискретной системой *X*, мы уже выбрали некоторые управления дискретной системой $y_1, y_2, \ldots, y_k$ тем самым траекторию состояний $x_0, x_1, \ldots, x_k$, и хотим завершить процесс, т. е. выбрать $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$ (а значит и $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m$);тогда, если завершающая часть процесса не будет оптимальной в смысле достижения максимума функции

$$F_k = \sum_{i=k+1}^{m} \varphi_i(x_{i-1}, y_i)$$

- То и весь процесс не будет оптимальным

- Пользуясь принципом оптимальности, легко получить основное функциональное соотношение.
  Определим последовательность функций переменной x:

$$\omega_m(x) = o, \omega_{k-1}(x) = \max_y\left[\varphi_k(x,y) + \omega_k\left(f_k(x,y)\right)\right],$$

где *k=1, 2,…, m*

- Здесь максимум берется по всем управлениям, допустимым на шаге *к*. Соотношение, определяющее зависимость w_{k-1} от w_k, принято называть *Беллмана уравнением*.

- Смысл функций w_{k-1} (x). нагляден: если система на шаге k-1 оказалась в состоянии *x*, то w_{k-1}(x) есть максимально возможное значение функции *F*. Одновременно с построением функций w_{k-1} (x). находятся условные оптимальные управления y_k (x)на каждом шаге (т. е. значения оптимального управления при всевозможных предположениях о состоянии x системы на шаге k-1). Окончательно оптимальные управления находятся последовательным вычислением величин

$$\omega_0(x_0) = F^*, y_1, x_1, y_2, \dots, y_m, x_m$$

Вывод

- С помощью динамического программирования решается не одна конкретная задача при определенном x_o, а сразу все подобные однотипные задачи при любом начальном состоянии. Поскольку численная реализация метода динамического программирования весьма сложна, т. к. требует большого объема памяти ЭВМ, то его целесообразно применять в тех случаях, когда необходимо многократно решать типовые задачи (скажем, определение оптимального режима полета самолета при меняющихся погодных условиях). Несмотря на то, что задача динамического программирования формулируется для дискретных процессов, в ряде случаев метод динамического программирования с успехом применяется для решения динамических задач с непрерывными параметрами.