проект

Тема:

Тела вращения

- **Автор:**
- Пичковская Галина Михайловна
- **МОБУ Тумаковская средняя общеобразовательная школа.**
- **Учитель математики.**

Участники проекта:

- **ЯЦКО ВЕРА-ученица 11 класса**

Творческое название проекта

ИХ ВЕЛИЧЕСТВО –

- ЦИЛИНДР

КОНУС

ШАР!

Вопросы

Основополагающий вопрос

Какова роль темы: «Тела вращения» при изучении геометрии?

Вопросы учебной темы (проблемные):

- ***Понятие непрямого цилиндра и конуса, вывод формул площади поверхности цилиндра и конуса, объёма цилиндра и конуса разными способами.***
- ***В каких областях применяются тела вращения и с какой целью?***
- ***Зачем решать задачи в геометрии на тела вращения?***
- ***Можно ли научиться строить тела вращения не школьной программы?***
- ***Кто подарил человечеству первые сведения о телах вращения?***

Темы самостоятельных исследований:

- ***«История возникновения тел вращения».***
- ***«Понятие цилиндра, конуса, шара».***

- ***«Объёмы цилиндра, конуса и шара».***
- ***«Площади поверхностей цилиндра, конуса и сферы».***
- ***«Сложные задачи, которые решаются с помощью формул: $S=2\pi r(r+h)$, $S=\pi rl$,***

$S=4\pi R$, $V=\pi R^2H$, $V=1/3\pi R^2H$, $V=4/3\pi R^3$

Учебные темы:

Учебные темы:

Цилиндр. Площадь поверхности цилиндра. Объём цилиндра.

- Конус. Площадь поверхности конуса. Объём конуса.
- Сфера. Формула площади сферы.
- Шар. Формула объёма шара.
- Разные задачи на вписанные и описанные многогранники, цилиндр, конус и шар.

Цели и задачи проекта

- Дидактические цели

- Формирование математической грамотности и усвоения способов решения задач на применение формул площадей и объёмов тел вращения.
- Формирование критического мышления;
- Формирование навыков исследовательской работы.
- Формирование умения самостоятельно анализировать, синтезировать,делать выводы.
- Развитие интереса к процессу познания на уроках математики.

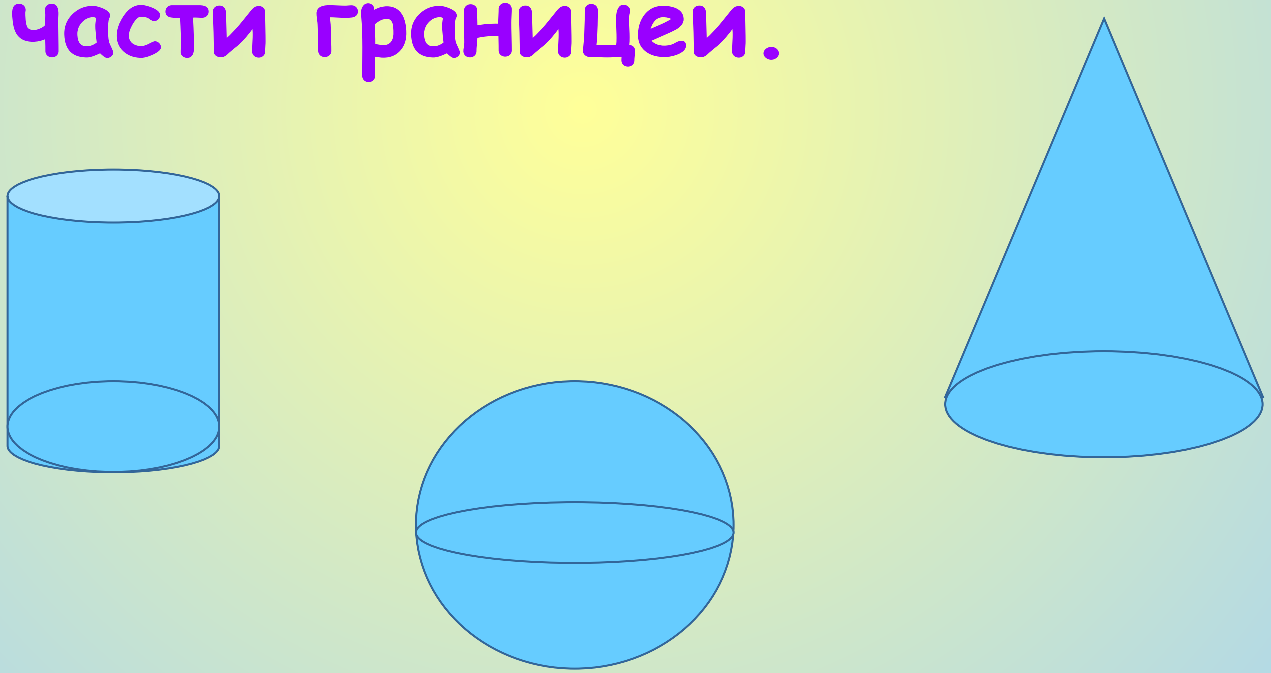
- Методические задачи

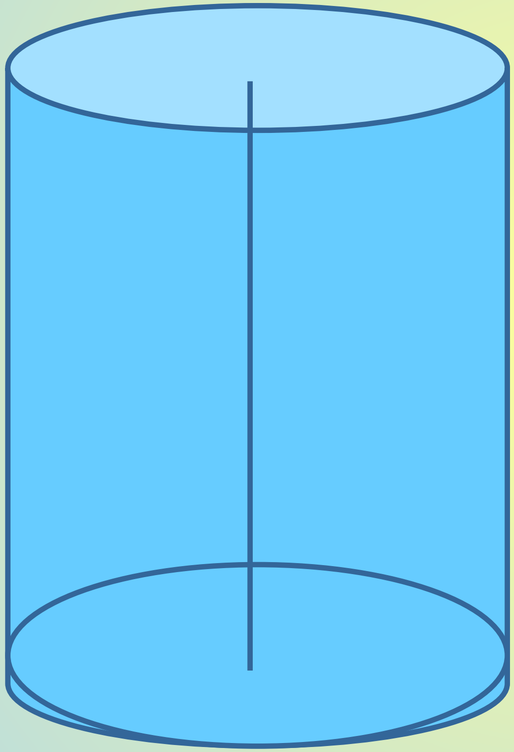
- Научить обрабатывать и обобщать полученную информацию в ходе исследований и сбора материала по данной теме.
- Научить применять новые компьютерные технологии.
- Научить различать полученные тела вращения.
- Научить кратко излагать свои мысли устно-письменно.
- Активизировать творческую деятельность учащихся.

«Геометрия является
самым
могущественным
средством
для изощрения наших
умственных
способностей
и дает нам возможность
мыслить и рассуждать».

Геометрическое тело –

Часть пространства, отделённое от остальной части границей.





Цилиндр.

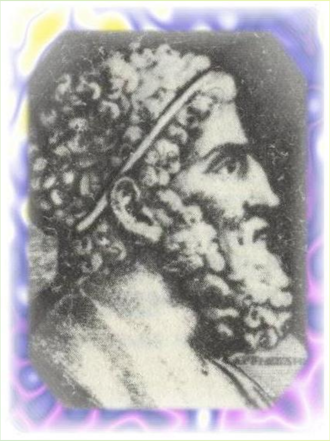
Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами.

Немного истории.

«Геометрия приближает разум к истине».

Платон.

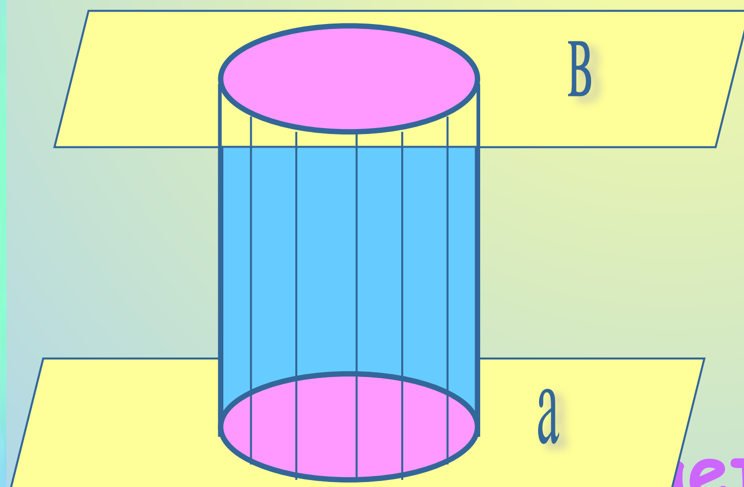
В своих работах Евклид дает определение цилиндра, исходя из вращения прямоугольника около одной его стороны. Однако понятия цилиндрической поверхности у него нет; эти понятия встречаются у одного из его комментаторов - Серена из Антинои (Египет), жившего в IVв. Серен трактует и о наклонном цилиндре, в то время как Евклид имеет дело только с прямым круговым цилиндром. Общее понятие цилиндрической поверхности, получаемой движением образующей, пересекающей все точки некоторой направляющей, впервые вводит Б. Кавальери (XVII в.)



В работах Евклида ничего не говорится о площади боковой поверхности цилиндра, она была найдена Архимедом. В своих произведениях он доказывает, что «поверхность всякого прямого цилиндра, за вычетом оснований, равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной (образующей) цилиндра и диаметром его основания».

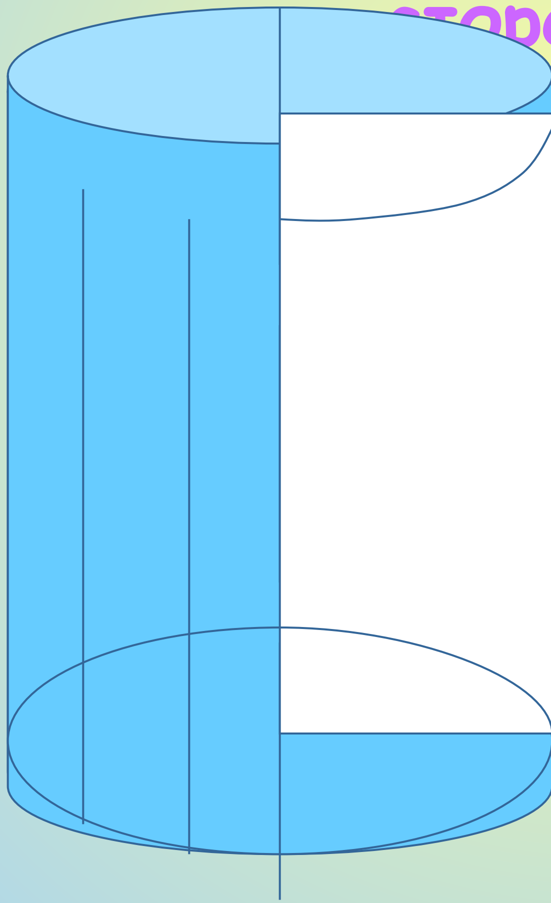
Понятие цилиндра.

Рассмотрим 2 параллельные плоскости и окружность расположенную в одной из этих плоскостей. Через каждую точку окружности проведем прямую, перпендикулярную к плоскости. Отрезки этих прямых, заключенные между плоскостями образуют цилиндрическую поверхность. А тело



ограниченное цилиндрической поверхностью и 2-мя кругами с границами, называется ЦИЛИНДРОМ.

Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. Прямой цилиндр можно получить при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон.



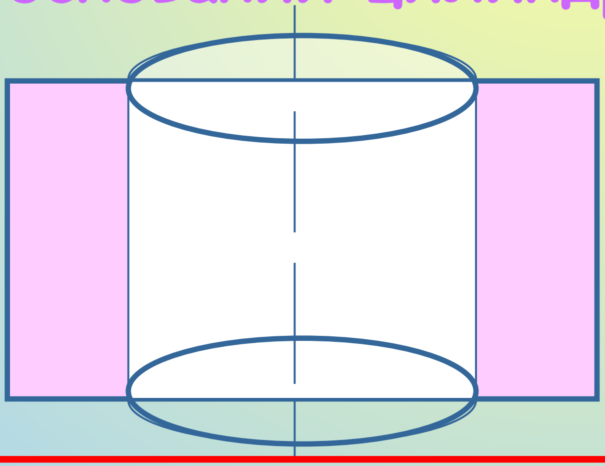
Слово«цилиндр»
исходит от
еского kylindr
означает валик,

Цилиндрическая поверхность наз-ся боковой поверхностью цилиндра, а круги – основаниями цилиндра. Образующие цилиндрической поверхности наз-ся образующими цилиндра, прямая, проходящая через центры оснований – осью цилиндра.

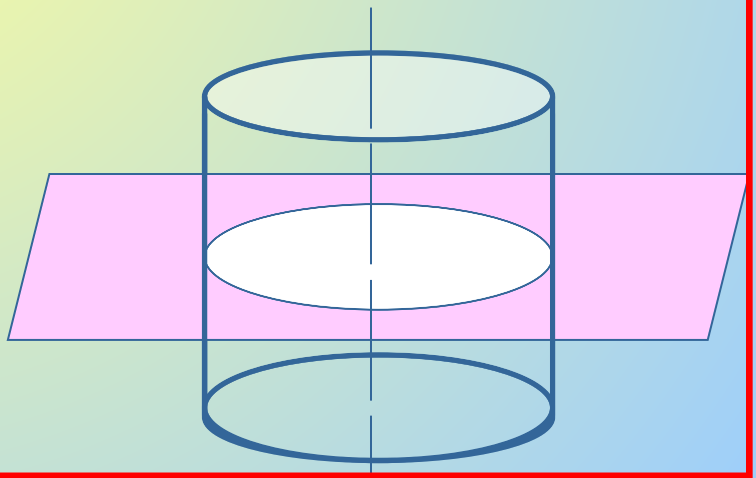
Сечение цилиндра.

- Осевое

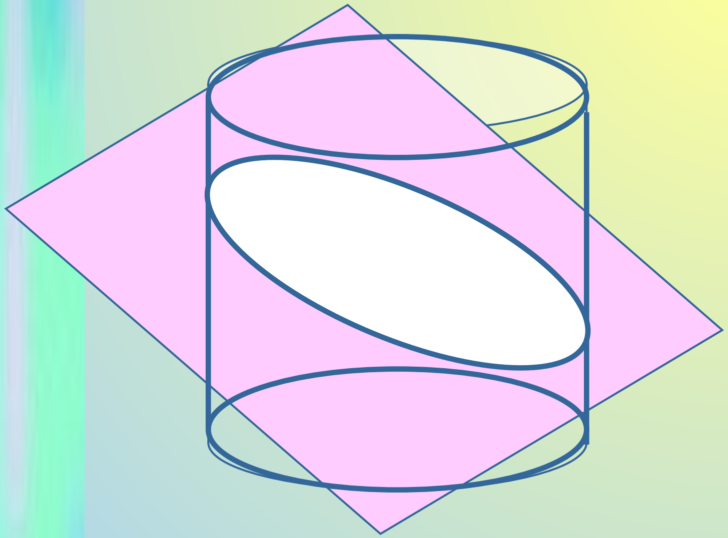
  Если секущая плоскость походит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник, 2 стороны которого образующие, а 2 другие – диаметры оснований цилиндра



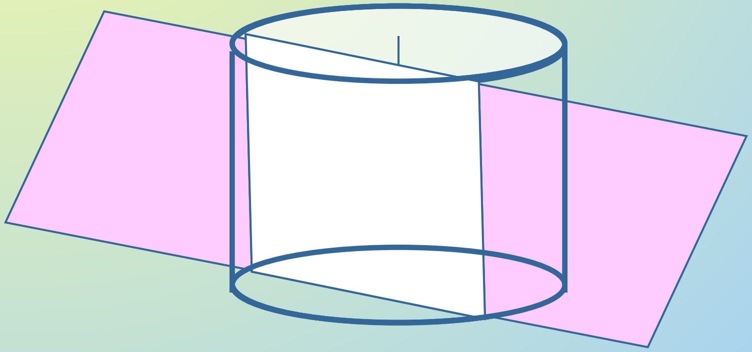
- Если секущая плоскость параллельна и перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом.



- Если плоскость сечения не параллельна основаниям цилиндра, то в сечении получится эллипс

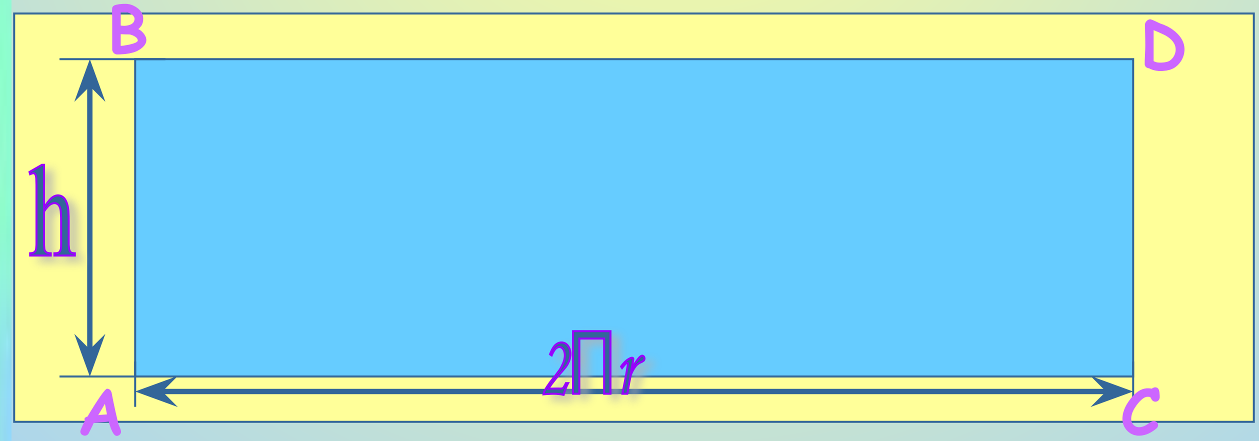


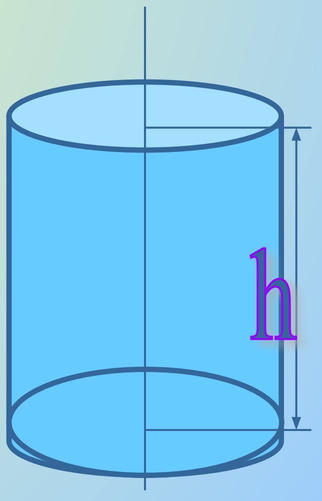
- Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, дает прямоугольник, 2 стороны которого служат образующими цилиндра, а 2 другие – равные между собой хорды окружностей основания.



А

Для того, чтобы легче понять как найти площадь цилиндра, представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей АВ и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости а. В результате получился прямоугольник (развертка боковой поверхности цилиндра). Основание АС прямоугольника является разверткой окружности основания цилиндра, а высота АВ–образующей цилиндра, поэтому АС=2Пr, АВ=h, где r-радиус цилиндра, h-его высота.

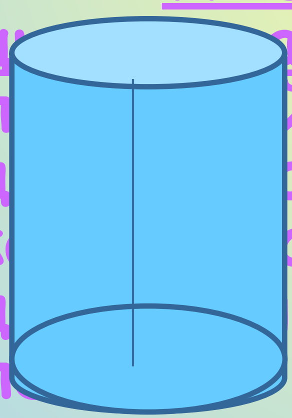




За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки.

Так как площадь прямоугольника АВДС=АС*АВ=2Пrh, то для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула $S_{бок}=2Пrh$. Итак, площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

Площадью полной поверхности ц[illegible]а называется сумма п[illegible]й боковой поверхности и д[illegible]ований. Так как площадь к[illegible] основания равна $Пr^2$, то д[illegible]сления площади $S_{цил}$ п[illegible] поверхности цилиндра получаем формулу: $S_{цил}=2Пr(r+h)$.



Объем цилиндра.

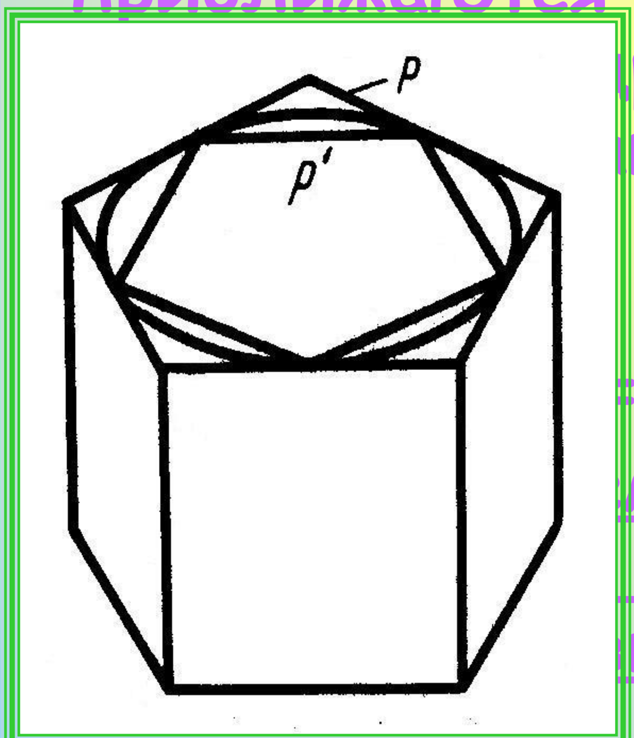
Если тело простое, т.е. допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяется следующим образом.

Данное тело имеет объем V, если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающихся от V.

Применим это определение к нахождению объема цилиндра с радиусом R и высотой H.

При выводе формулы для площади круга были построены такие 2 n-угольника (один - содержащий круг, другой -содержащийся в круге), что их площади при неограниченном увеличении n неограниченно приближались к площади круга. Построим такие многоугольники для круга в основании цилиндра. Пусть P- многоугольник, содержащий круг, a P`- многоугольник, содержащийся в круге.

Построим две прямые призмы с основаниями P и P` и высотой H, равной высоте цилиндра. Первая призма содержит цилиндр, а вторая призма содержится в цилиндре. Т.к. при неограниченном увеличении n площади оснований призм неограниченно приближаются к площади основания



ра S, то их

ниченно

к SH. Согласно

объем цилиндра

$=SH=\Pi R^2 H$.

<u>м цилиндра равен</u>

<u>площади</u>

<u>ысоту.</u>

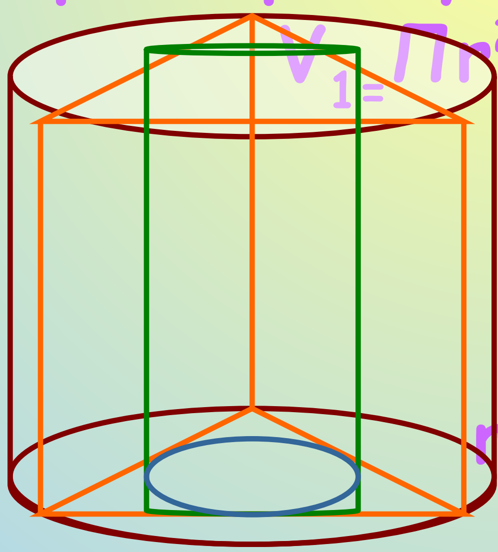
Несколько свойств цилиндра.

- Все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу.
- Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.
- Круговой цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг любой его стороны.
- Высота цилиндра равна его образующей.

Задача.

1.В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в последнюю вписан еще один цилиндр. Найти отношение объемов этих цилиндров.

<u>Решение</u>:Оба цилиндра имеют равные высоты, поэтому их объемы относятся как площади длин оснований, т.е. как квадраты радиусов цилиндров.



$V_1 = \Pi r^2 H$

$V_2 = \Pi R^2 H$

$H = H$, $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\cancel{\Pi} r^2 \cancel{H}}{\cancel{\Pi} R^2 \cancel{H}}$

r^2/R^2,

2.Радиус вписанной в правильный треугольник окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности.

Найти отношение площадей.

Площадь вписанной в правильный треугольник окружности в четыре раза меньше площади описанной окружности.

$r^2/R^2=1^2/2^2=1/4$,т.к.

$S=\pi r^2$

Задача.

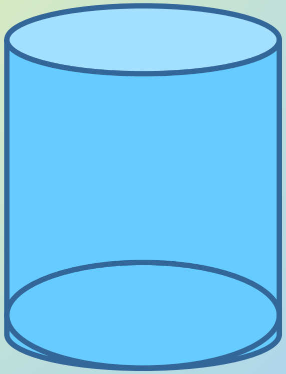
Дано: цилиндр, d=65см(0,65м), H=18м, 10% на заклепку.

Найти: $S_{бок}$+10%$S_{жести}$.

Решение: $S_{бок}$=2ПrH = 2*3,14*0,325*18=36,738($м^2$)

36,738-90%, 1%-36,738:90=0,408, 10%-40,8$м^2$.

Ответ: На изготовление трубы необходимо 40,8$м^2$ жести.

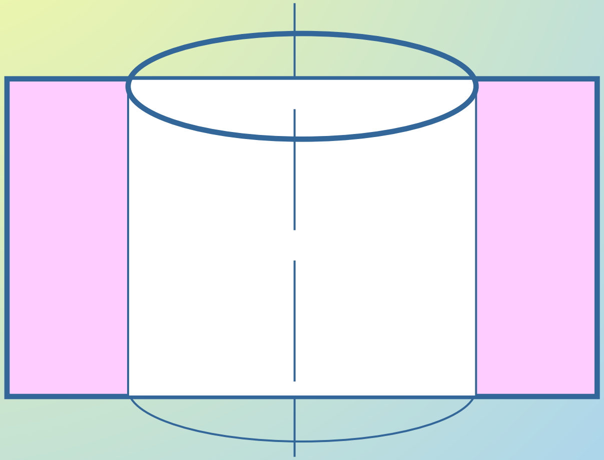


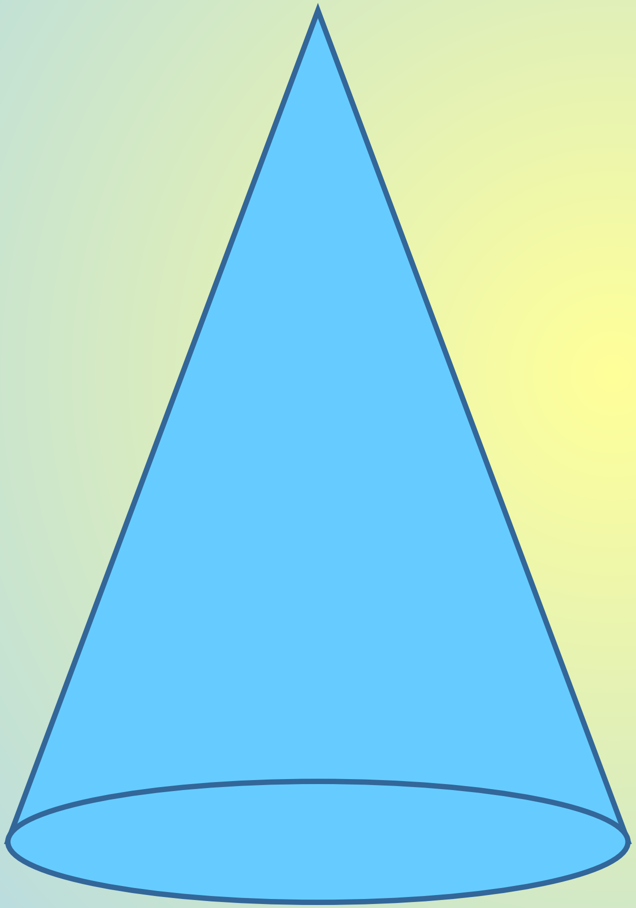
Задача: «Сечение цилиндра плоскостями».

Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого Q. Найти площадь основания цилиндра.

Решение. Сторона квадрата $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна:

$П (\sqrt{Q}/2)^2 = П\ Q/4.$



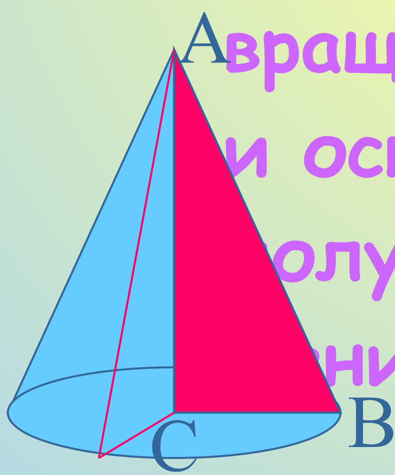


Конус.

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей.

Прямой круговой конус (от греческого слова konos – «сосновая шишка») – это фигура, получающаяся при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Треугольник АВС вращается около катета АС. Конус ограничен боковой поверхностью, образующийся при



вращении гипотенузы АВ,
и основанием – кругом,
олучающимся при вра –
нии второго катета СВ.


Ось конуса.
Вершина конуса.
Образующие.
Боковая поверхность.
Основание конуса.

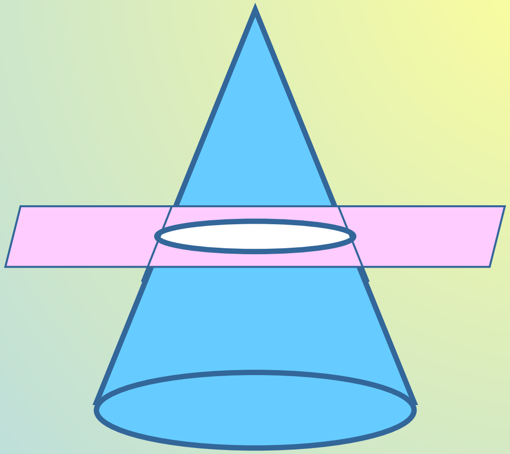
С глубокой древности рассматриваются также конические поверхности, составленные из всех прямых пространства, пересекающих данную прямую (ось) в одной точке (вершине), и образующие с осью данный, отличный от прямого, угол. Составляющие коническую поверхность называются образующими – они получаются из одной образующей вращением около оси, и поэтому такую коническую поверхность часто называют конусом вращения.

Строгое доказательство теорем, служащих для вывода формулы объема конуса дал Евдокс Книдский, доказывая,

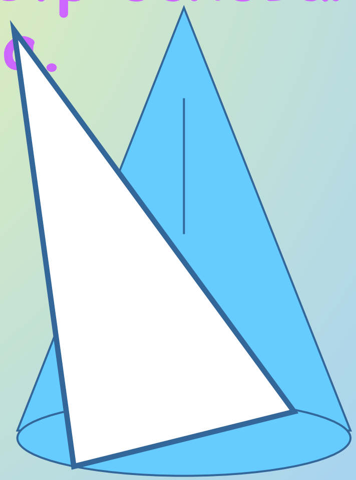
- Что объем конуса равен 1/3 объема цилиндра, имеющего то же основание и ту же высоту.
- Что отношение объемов конусов (или цилиндров с равными высотами равно отношению площаде их оснований.
- Что объемы двух подобных конусов (или цилиндров), т.е таких, у которых оси и диаметры оснований пропорциональны, относятся как кубы диаметров.
- Что отношение объемов двух конусов (или цилиндров), площади оснований которых равны, равно отношению высот.

У Евклида нет понятия <u>конической поверхности</u>, оно было введено Апполонием. Вот что он пишет: «Если от какой – либо точки окружности круга, который не находится в одной плоскости с некоторой точкой, проводить прямые, соединяющие эту точку с окружностью, и при неподвижности точки перемещать прямую по окружности, возвращая ее туда, откуда началось движение, то поверхность описанную прямой и составленную из двух поверхностей, лежащих в вершине друг против друга, из которых каждая бесконечно увеличивается, если бесконечно продолжать описывающую прямую, я называю <u>конической поверхностью</u>, неподвижную же точку – ее вершиной, а осью-прямую, проведенную через эту точку и центр круга».

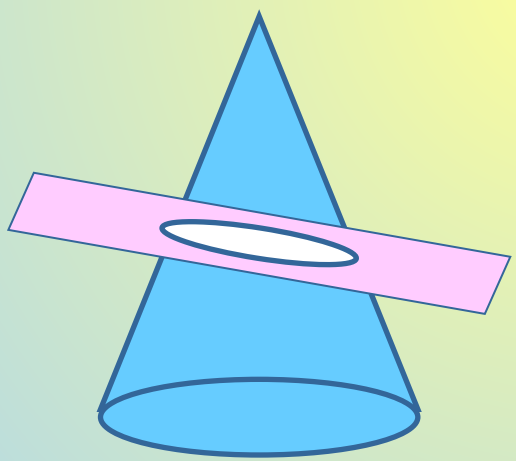
- В сечении конуса плоскостью, параллельной его основанию, получается круг.



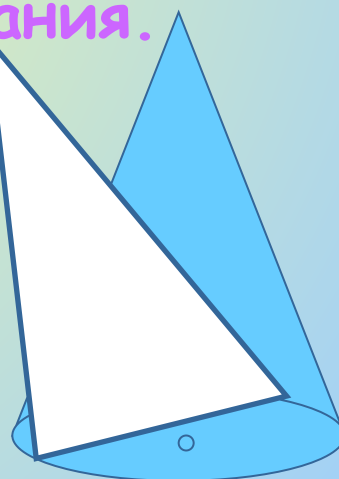
- В сечении конуса плоскостью, проходящей через его ось (осевое сечение), получается равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого служат образующие, а основанием – диаметр основания конуса.



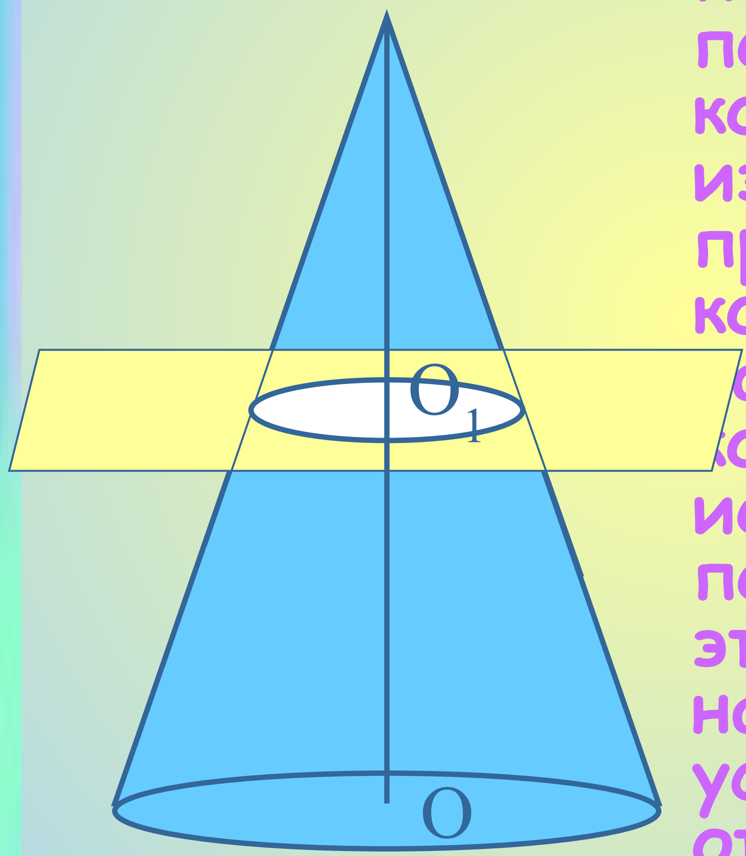
- Если плоскость сечения не параллельна основанию, то в сечении получается эллипс.



- В сечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину и пересекающей его поверхность получается равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого служат образующие конуса, а основанием – хорда окружности его основания.



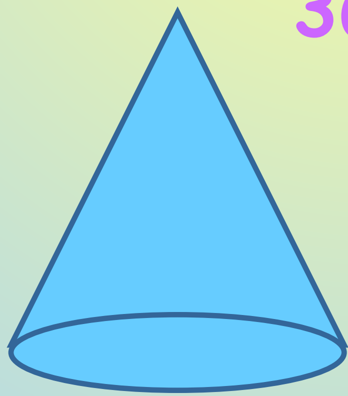
Усеченный конус.

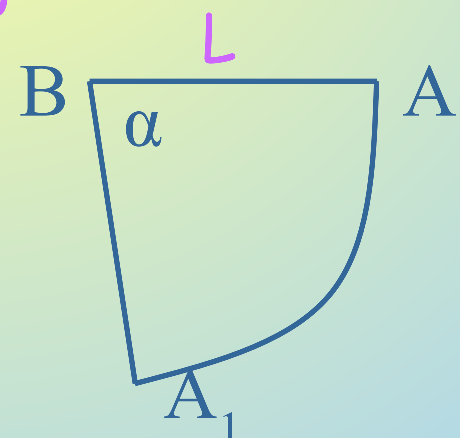


В произвольном конусе проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом. Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называется основаниями усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры,- высотой усеченного конуса.

Площадь боковой поверхности конуса

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Выразим площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса через его образующую L и радиус основания r. Площадь кругового сектора – развертки боковой поверхности конуса – равна , где a – градусная мера дуги ABA`, поэтому $S_{бок} = \frac{П L^2 a}{360^0}$





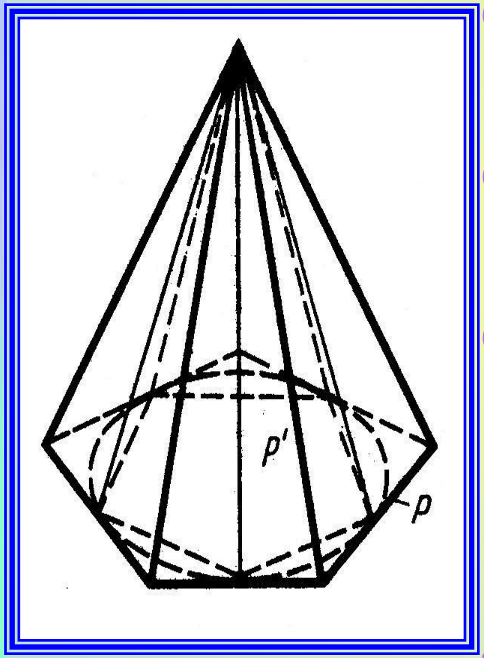
Выразим a через L и r. Так как длина дуги АВА` равна 2Пr (длине окружности основания конуса), то 2Пr=П L a,
откуда a a=360 r. Подставив
180 L

Это выражение в формулу, получим

$S_{бок}$ = Пr L.

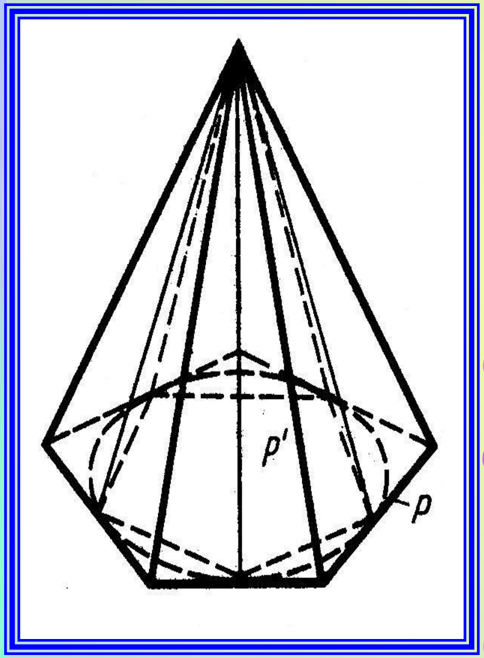
Таким образом, площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Объем конуса



Построим два многоугольника в плоскости основания конуса: многоугольник P, содержащий основание конуса, и многоугольник P`, содержащийся в основании конуса. Первая пирамида содержит конус, а вторя пирамида содержится в конусе.

Как мы знаем, существуют такие многоугольники P и P`, площади которых при неограниченном увеличении числа их сторон n неограниченно приближаются к площади круга в основании конуса. Для таких многоугольников объемы построенных пирамид неограниченно приближаются к 1/3SH, где S-площадь основания конуса, а H-его высота. Согласно определению отсюда следует, что объем конуса $V=1/3SH=1/3\Pi R^2H$.



<u>Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.</u>

Дополним данный усеченный конус до полного. Пусть x-его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух других полных конусов: одного с радиусом основания R_1 и высотой x, другого с радиусом основания R_2 и высотой x-h.

Так же объем любого усеченного конуса равен $V=1/3H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$,

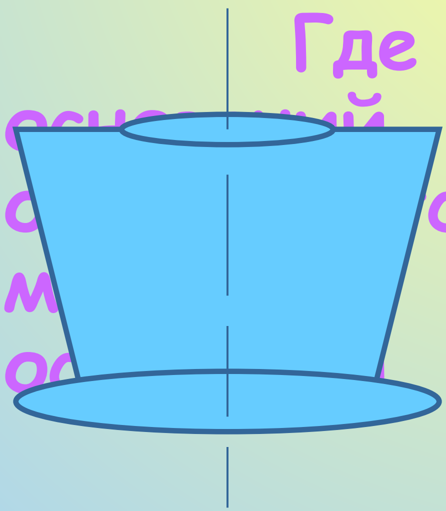
Где S_1иS_2 – площади

о... а высота H

о... ся как расстояние

м... плоскостями

о...

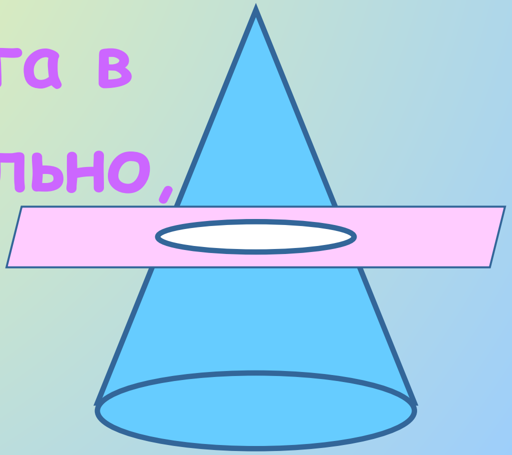


Задача: «Сечение конуса»

Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Решение: Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетии относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k=d/H$. Поэтому радиус круга в сечении $r=Rd/H$. Следовательно, площадь сечения

$$S=\Pi R^2d^2/H^2 .$$



Задача.

Дано: Палатка в виде конуса.

Конус, d=4м, H=3,5м, 5% на швы.

Найти: $S_{бок}+5\%S_{парусины}$.

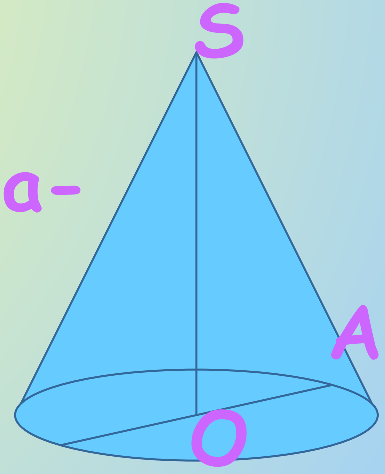
Решение: $S_{бок}=\Pi rL$, L=SA, треуг.OSA - прямоуг. $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{16,25}$

$S_{бок}=3,14*2*\sqrt{16,25}=25м^2$.

25м-95%, х-100%,

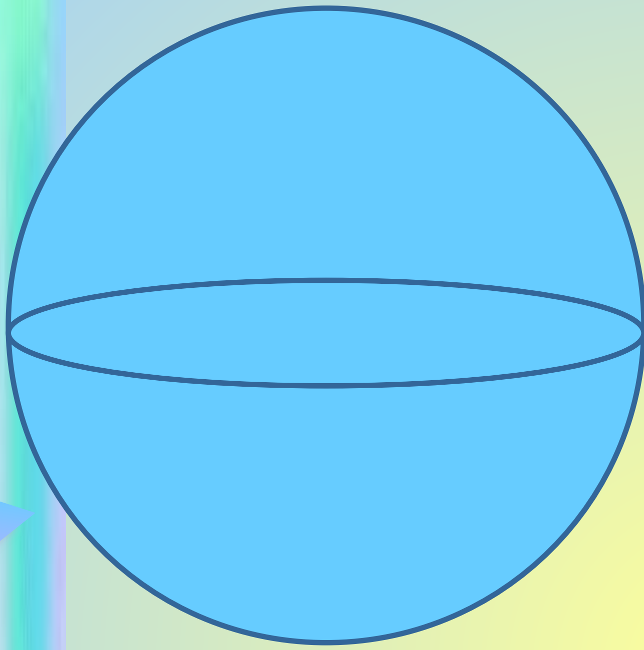
$X=25*100/95=26,3м^2$.

Ответ: На изготовление палатки необходимо $26,3м^2$ парусины.



Сфера и Шар.

Точки пространства, удаленные от данной точки O на данное расстояние R, образуют сферу с центром O и радиусом R. Сфера ограничивает шар, состоящий из точек, удаленных от O на расстояние, не больше R. Эти геометрические объекты так же как окружность и круг, рассматривали еще в глубокой древности. Открытие шарообразности Земли, появление представлений о небесной сфере дала толчок к развитию специальной науки – сферики, изучающей расположение на сфере фигуры.



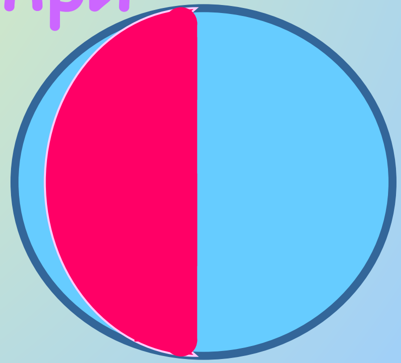
Шар.

Поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на расстоянии не больше данного от данной точки.

Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга

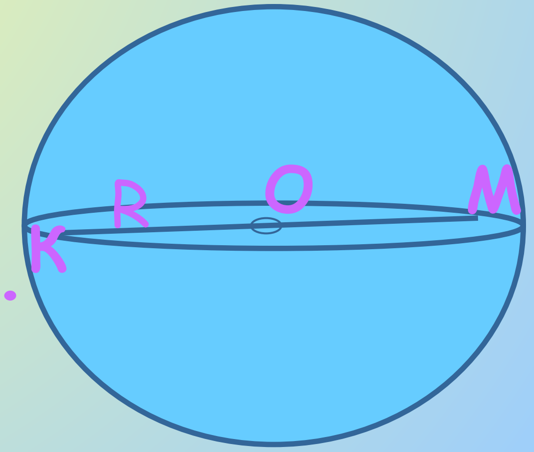
округ диаметра

ак оси.



Граница шара называется шаровой поверхностью, или сферой. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстоянии, равном радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом. ОК – радиус шара.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящей через центр шара называется диаметром.

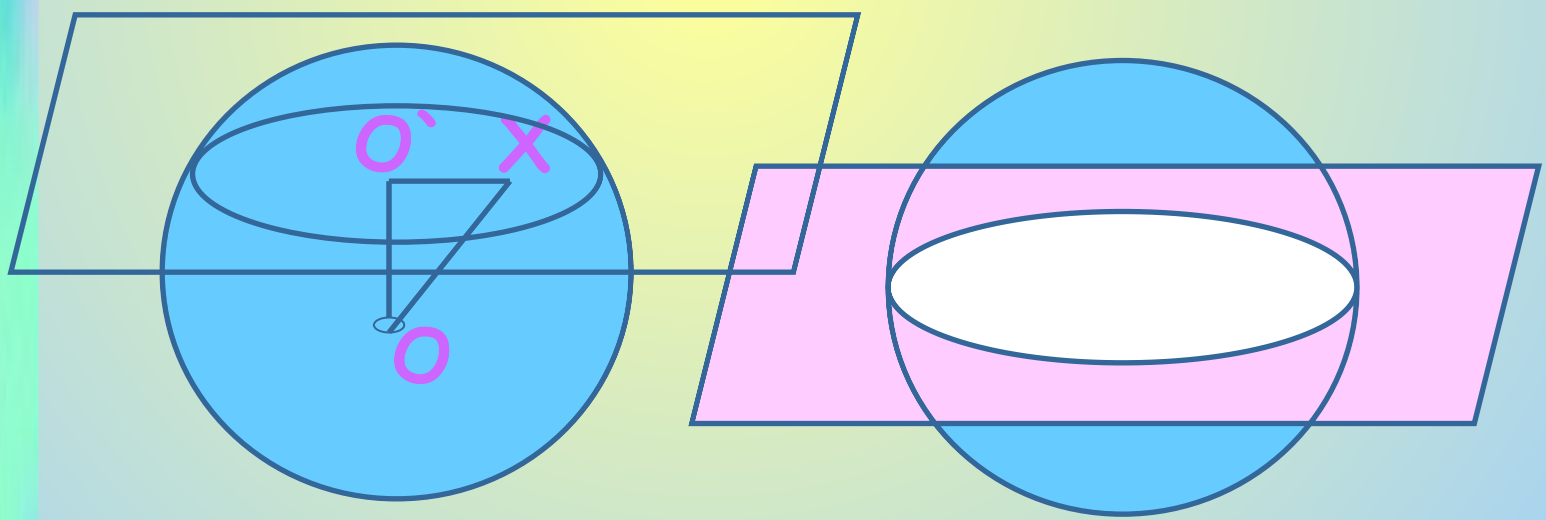


В своих работах Евклид шару и его поверхности уделяет сравнительно мало внимания. Он доказывает, что объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов. Ни площади поверхности шара, ни объема Евклид не вычисляет, вероятно он их и не знал. Архимед первый открыл соответствующие формулы. Так же Архимед доказал следующие утверждения:

- «Каждый шар в четыре раза больше конуса, основание которого равно большому кругу шара, а высота – радиусу последнего».
- «Цилиндр, основание которого равно большому кругу шара, а высота – диаметру последнего, в полтора раза больше шара».

Сечение шара плоскостью.

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

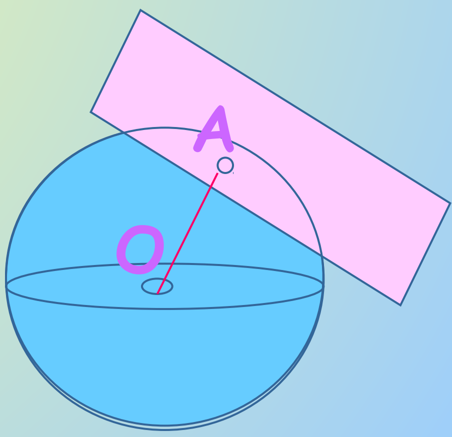


Касательная плоскость к сфере.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называют касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Теорема: Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема: Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащей на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.



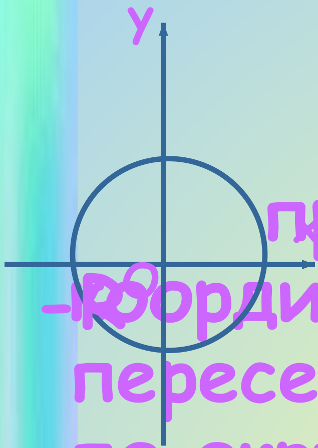
Площадь сферы.

Видно, что площадь поверхности описанного многогранника при неограниченном уменьшении размеров его граней, стремятся к $4ПR^2$. Поэтому величина $4ПR^2$ принимается за площадь сферы.

Итак, площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле $S=4ПR^2$.

Аналогично определяется площадь сферической части поверхности шарового сектора, т.е. площадь сферического сегмента, для нее получается формула: $S=2ПRH$, где H – высота сегмента.

Объем шара.

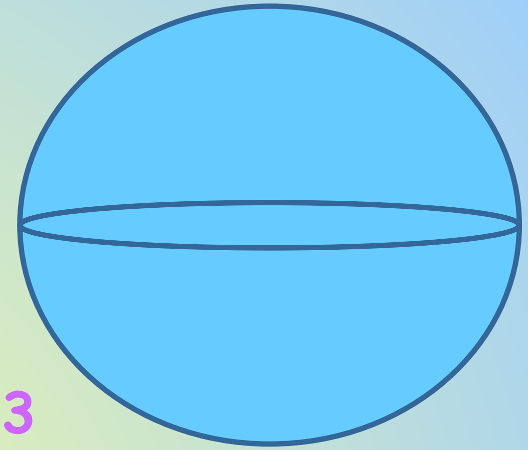


Введем декартовы координаты, приняв центр шара за начало координат. Плоскость xy пересекает поверхность шара радиуса R по окружности, которая, как известно, задается уравнением $x^2+y^2=R^2$.

Полуокружность, расположенная над осью x, задается уравнением $y=f(x)=+\sqrt{R^2-x^2}$, $-R<x\leq R$.

Поэтому объем шара определяется по формуле:

$$V=\Pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\Pi\left(R^2x-x^3/3\right)\Big|_{-R}^{R}=4/3\,\Pi R^3.$$



Дано:

Шар; m=10кг, p=7,2г/см^3.

Найти: $D_ш$.

Решение: $V_ш$=m/p=10 000/7,2=
1389 см^3.

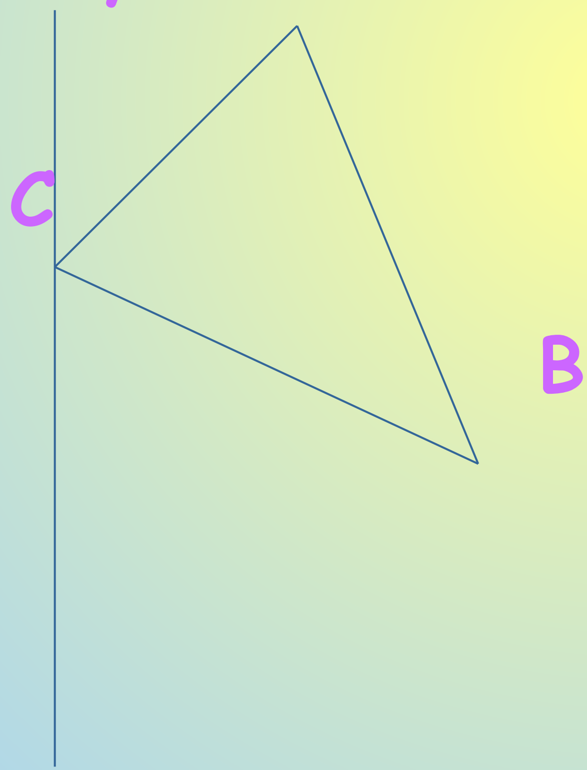
$V_ш$=4/3ПR^3=ПD^3/6.

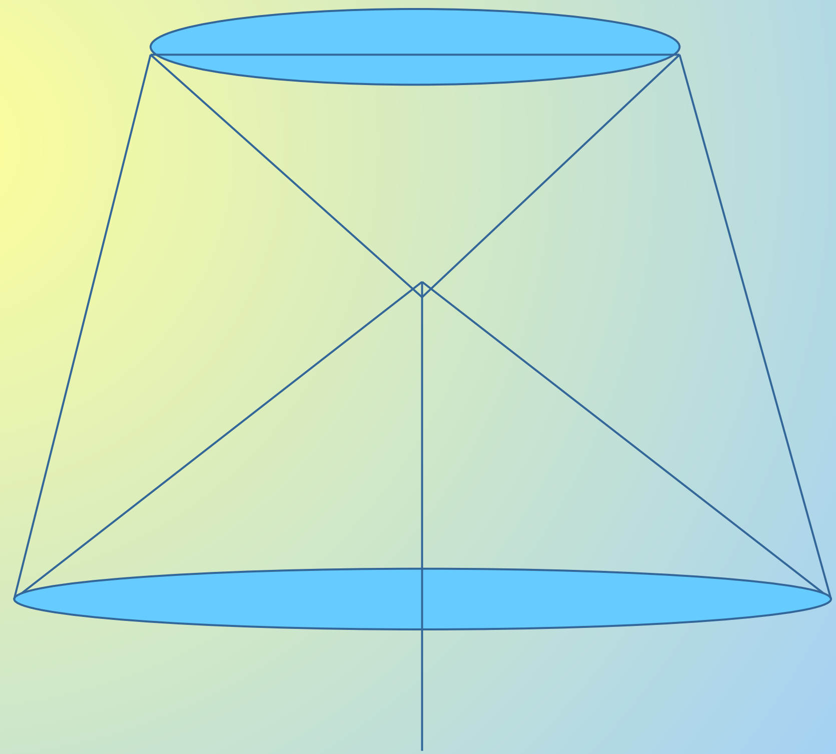
ПD^3/6=1389, D^3=2778, D=14см^3.

Ответ:D=14см^3.

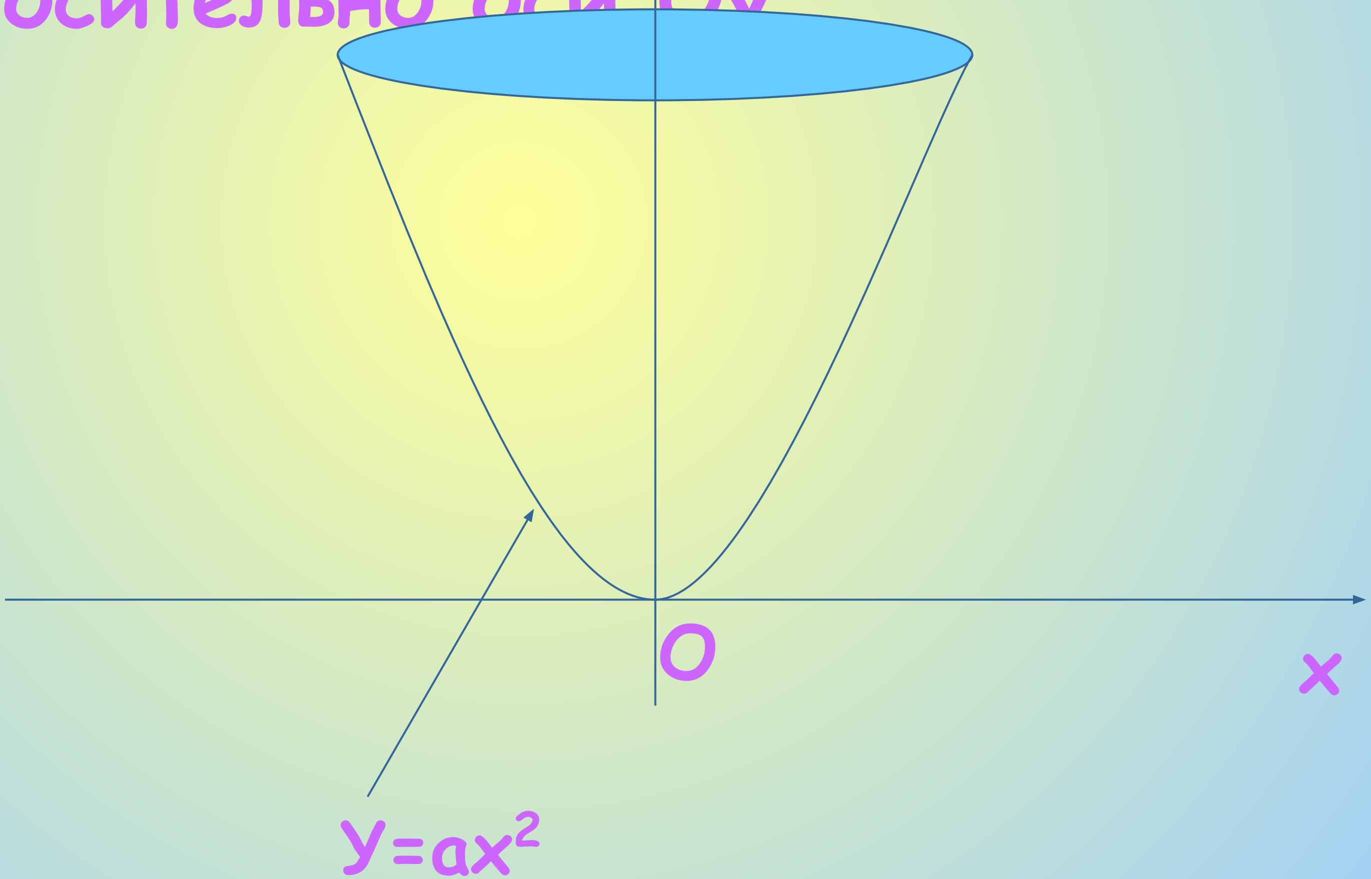
Нарисовать **фигуру**, полученную вращением треугольника относительно прямой, проходящей через одну из его вершин.

Как можно получить эту фигуру из конусов? A



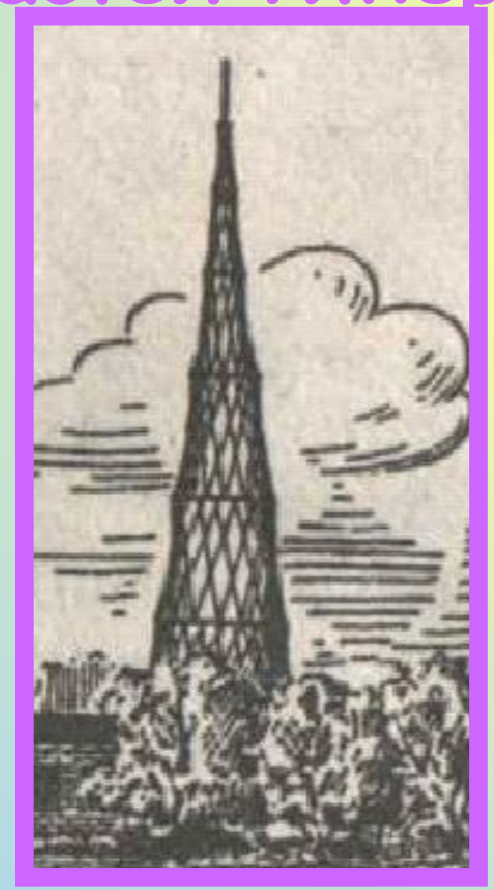


Параболоидом вращения называется поверхность, которая получается при вращении параболы относительно оси Оу



При вращении гиперболы относительно оси Оу получается поверхность, которая называется **Гиперболоидом** вращения

Она часто используется в архитектурных сооружениях. Например, Шуховская башня в Москве на Шаболовке составлена из частей гиперболоида вращения.



Аннотация

Учебный проект проводится на заключительном этапе изучения темы 11 класса «ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ», как повторительно-обобщающий.

Проект имитирует научную, производственную деятельность. На этом уроке моделируются самые разнообразные жизненные и производственные ситуации, целью которых становится изучение собранного материала, закрепление изученного и расширение кругозора. Учеников ставят в условия, когда нужно решать производственные задачи, что даёт им почувствовать себя взрослыми, принимающими серьёзные деловые решения. Этот проект позволяют развивать мышление школьников, умение приобретать знания из различных источников, анализировать факты, делать обобщение, высказывать собственные суждения, критически относиться к мнениям других. **Приведены примеры** решений задач на нахождения площадей и объёмов тел вращения, необходимые для ЕГЭ.

Ян Амос Коменский.

- «Считай несчастным тот час и тот день, в который ты не усвоил ничего нового и ничего не прибавил к своему образованию».

Итоги нашей работы.

Поставленные перед собой цели, мы достигли.

Познакомились с историей возникновения тел вращения. Рассмотрели тела вращения: ЦИЛИНДР,КОНУС, ШАР. Познакомились с параболоидом и гиперболоидом. Проанализировали значительное применение в жизни общества тел вращения.

Наш проект может служить пособием для более обширного изучения тел вращения в геометрии и на уроках черчения.