ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА И ЕЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Выполнила ученица
8А класс МАОУ СОШ № 36
Кузина Алина
Руководитель Емельянова Г.В.

ГИПОТЕЗА ИССЛЕДОВАНИЯ – ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВАРИНЬОНА НАДЕЖНЫЙ ПОМОЩНИК В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ --- ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ – ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВАРИНЬОНА, БИМЕДИАНЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЁ

ПРОБЛЕМЫ – ВЫЯСНИТЬ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ЛИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВАРИНЬОНА ПОЗВОЛЯЕТ РАЦИОНАЛЬНЕЙ ПОЛУЧИТЬ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Цель: изучить теорему Вариньона и научиться на практике применять ее с наименьшими временными затратами

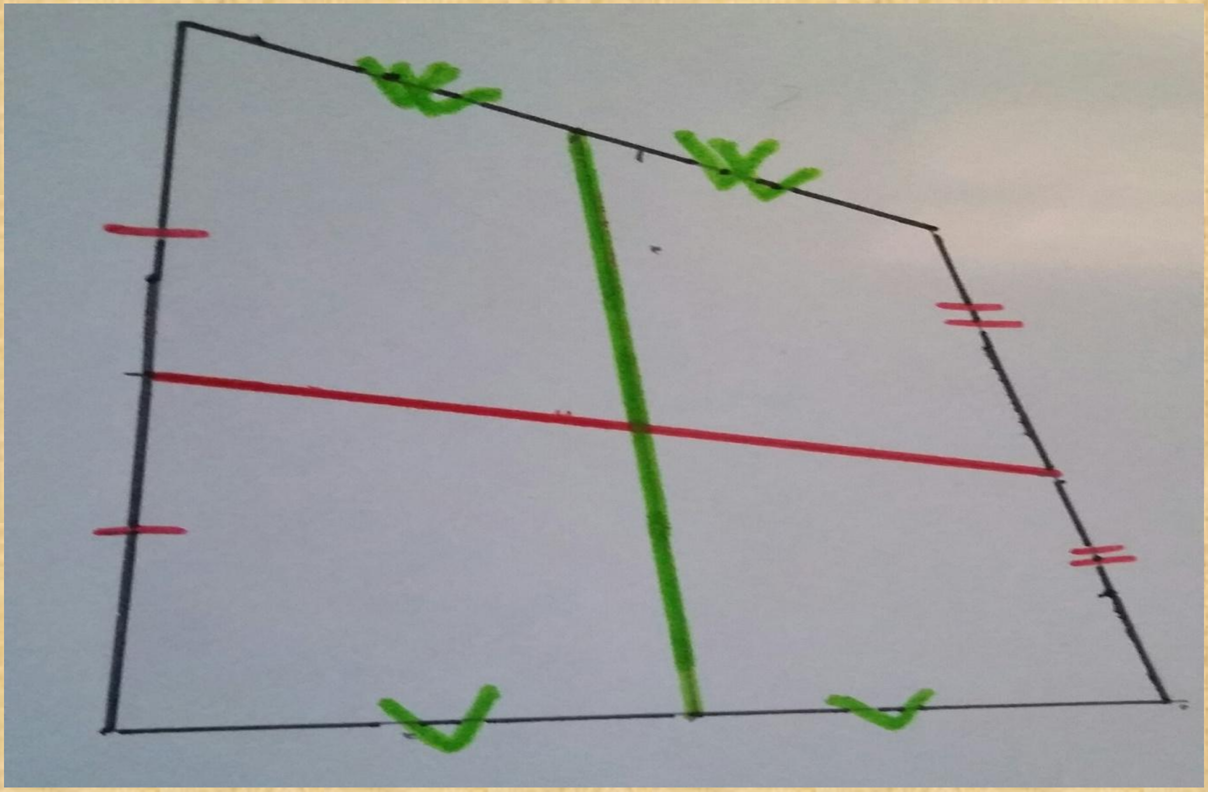
ЗАДАЧИ:

А) Изучить теоретический материал: параллелограмм Вариньона, бимедианы четырехугольника , теорему Вариньона и следствия из нее.

Б) Сравнить количество времени, необходимое для решения задач традиционным способом и с помощью теоремы Вариньона.

В) Выяснить практическое применение данной теоремы в задачах по геометрии школьного курса и в конкурсных задачах.

Бимедианы четырехугольника – это отрезки, соединяющие середины противоположных сторон



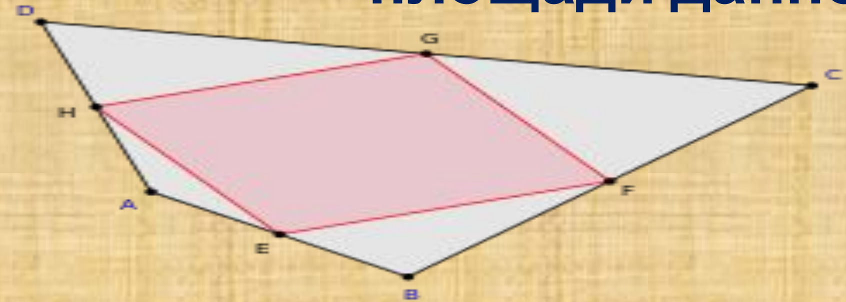
ПЬЕР ВАРИНЬОН
(1654-1722)

Пьер Вариньон-французский математик, член Парижской Академии наук, профессор математики колледжа Мазарини. Ему принадлежит одна из основных теорем о бимедианах четырехугольника.

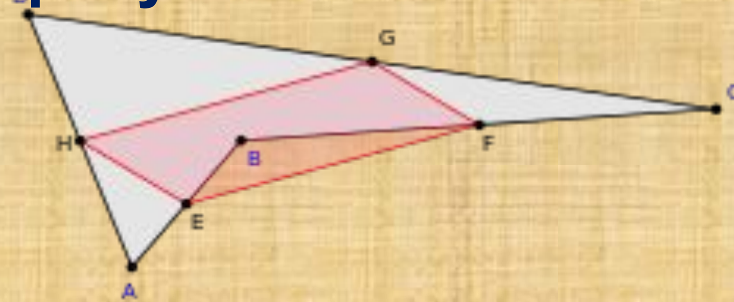
Вариньон написал учебник по элементарной геометрии, в котором эта

Теорема Вариньона

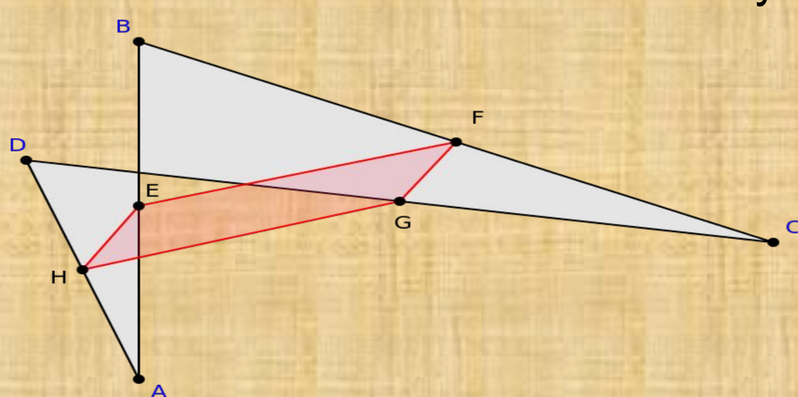
Четырехугольник, образованный путем последовательного соединения середин сторон выпуклого четырехугольника, является параллелограммом, и его площадь равна половине площади данного четырехугольника



Выпуклый четырехугольник



Вогнутый четырехугольник



Самопересекающийся четырехугольник

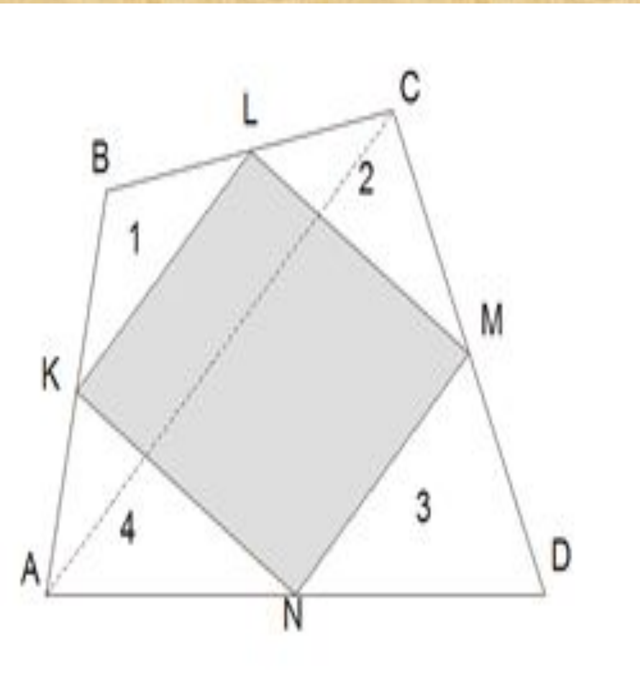
Теорема Вариньона

Дано:ABCD- выпуклый четырехугольник AK=KB; BL=LC; CM=MD; AN=ND

Доказать: 1)KLMN-параллелограмм;

2)SKLMN=SABCD/2

Доказательство



- 1. Рассмотрим одну из сторон четырехугольника *KLMN* , например *KL* . Так как *KL* - средняя линия *ABC* , то *KL* ǁ*AC* . По тем причинам *MN* ǁ*AC* . → *KL* ǁ*NM* и *KL= MN= AC/2* . → - параллелограмм. Этот параллелограмм называется параллелограммом Вариньона данного четырехугольника *ABCD.*
- 2. Средняя линия отсекает от него , S которого в 4 раза < S исходного . Поэтому сама ∑ S 1-ого и 3-го треугольников равна ¼ S всего четырехугольника. То же и относительно ∑ S 2-го и 4-го треугольников. Поэтому S *KLMN* составляет ½ S *ABCD*
- Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ

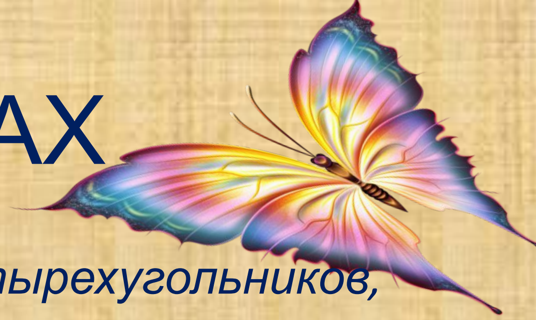
1. Центр параллелограмма Вариньона лежит на середине отрезка, соединяющего середины сторон исходного четырёхугольника (в этой же точке пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных сторон — диагонали вариньоновского параллелограмма).

2. Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме диагоналей исходного четырёхугольника.

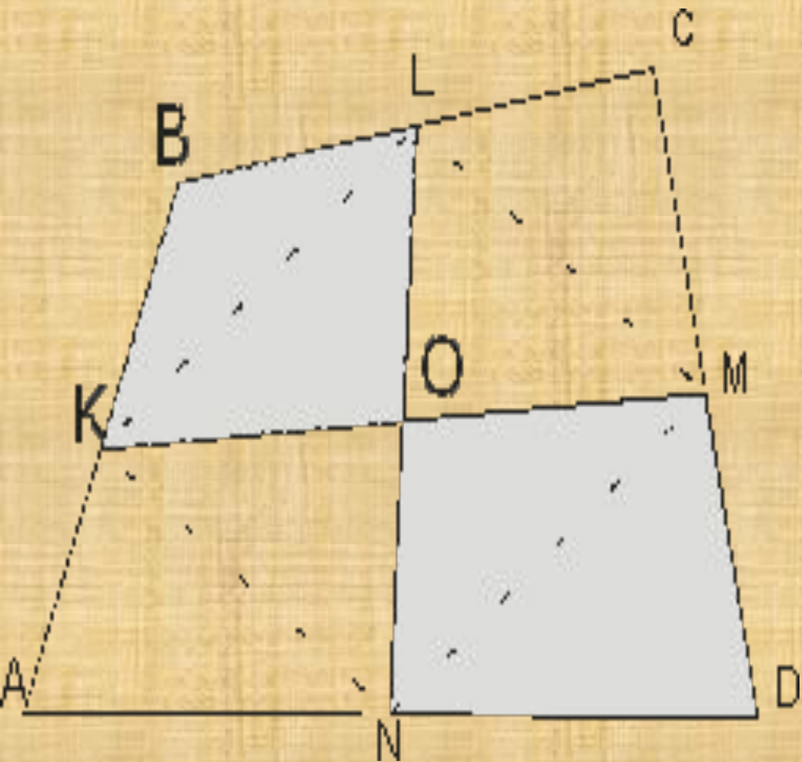
3. Площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади исходного четырёхугольника.

4. Для прямоугольника и равнобедренной трапеции параллелограммом Вариньона является ромб, а для ромба — прямоугольник.

ТЕОРЕМА О БАБОЧКАХ

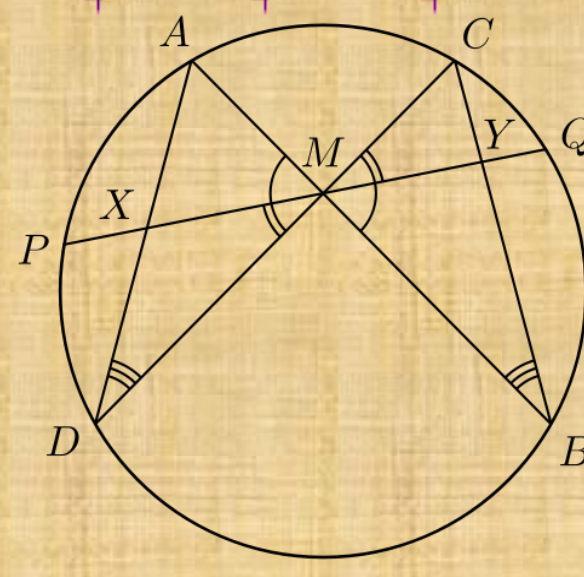


Формулировка: *Суммы площадей накрест лежащих четырехугольников, образованных пересечением бимедиан LN и KM выпуклого четырехугольника ABCD равны.*



Доказательство.
Воспользуемся теоремой о средней линии треугольника. Получаем:

$$S_{BKL}+S_{DNM}=\frac{S_{BAC}+S_{DAC}}{4}=\frac{S_{ABCD}}{4}=\frac{S_{ABD}+S_{CBD}}{4}=S_{AKN}+S_{CLM}$$



Задачи из школьного курса геометрии.

Рассмотрим задачи на бимедианы четырехугольника и теорему Вариньона, которые встречаются в школьном курсе геометрии (№567, 568)

Задача 1.

Докажите, что а) середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. И наоборот, б) середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Доказательство.

а) Диагонали прямоугольника равны, поэтому середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба;

Стороны прямоугольника перпендикулярны, поэтому бимедианы перпендикулярны, тогда середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

б) диагонали ромба перпендикулярны, поэтому середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника;

Стороны ромба равны, поэтому середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

564 Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см и 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

565 Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его бóльшую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

566 Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника APQ равен 21 см.

567 Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

568 Докажите, что четырехугольник — ромб, если его вершинами являются середины сторон:

а) прямоугольника;

б) равнобедренной трапеции.

569 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

570 Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM.

571 В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S.

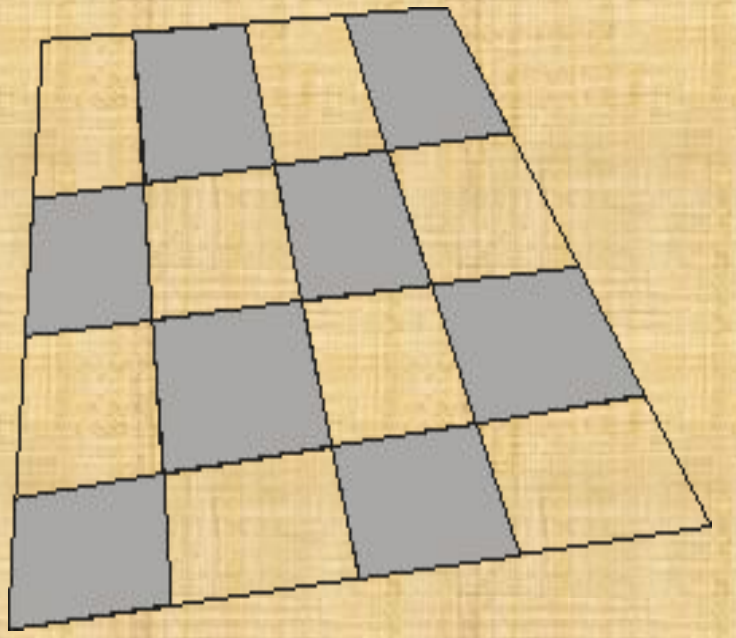
В задачах 572—574 использованы следующие обозначения для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH:

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CH = h$. $AH = b_c$, $HB = a_c$.

Подобные треугольники

Конкурсные задачи.

Все стороны выпуклого четырехугольника площади 1 разделены на 2n равных частей, а затем точки деления на противоположных сторонах соединены так, чтобы получилась «косоугольная шахматная доска», состоящая из белых и черных «клеток» (n = 2). Доказать, что сумма площадей всех белых «клеток» равна сумме площадей всех черных «клеток».



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из следствия следует, что точки пересечения отрезков на этой доске делят каждый на равные части.

Тогда в любом «маленьком» четырехугольнике, куда входят ровно две белые и две черные клетки, выполняются условия теоремы о бабочках.

Нужное равенство установлено.

Разбор задач с использованием теоремы Вариньона и без её использования.

Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. И наоборот.

<u>1-ый способ</u>

1- AC – диагональ. FM - средняя линия треугольника ABC. NK – средняя линия треугольника ADC. Треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников (AB=DC, BC=AD, AC – общая сторона) => KN=FM. Также KN||FM (AC||FM, AC||KN) => KFMN- параллелограмм.

2- из первого следует, что KN=FM. Аналогично можно доказать, что FK=MN.

3- ABCD – прямоугольник => AC=BD. => KF=FM=MN=NK=> KFMN – ромб.

<u>2-ой способ</u>

А) Диагонали прямоугольника равны, поэтому середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба (из следствия теоремы Вариньона);

Б) Стороны прямоугольника перпендикулярны, поэтому бимедианы перпендикулярны, тогда середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба (из следствия теоремы Вариньона).

«Нет ничего нового под солнцем, но есть кое-что старое, чего мы не знаем», – сказал американский литератор Лоренс Питер.

Пьер Вариньон жил в 18 веке, но теорема Вариньона как нельзя актуальна именно в наши дни, когда, чтобы всё успеть, необходимо гораздо больше, чем 24 часа в сутки. Поэтому была поставлена цель: изучить теорему Вариньона и научиться применять ее на практике с наименьшими временными затратами.
Теорема Вариньона – красивейшая опорная задача, которая помогает решить, что называется, в один присест, массу планиметрических задач, в том числе повышенной сложности и олимпиадных.

Список использованной литературы

1. Вавилов В., Красников П. Бимедианы четырехугольника // Математика . 2006 - №22.
2. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – Т.1,2 –М.: Наука, 1995
3. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. - М.:Наука, 1981
4. BestReferat.ru// Бимедианы четырехугольника
5. dic.academic.ru// Что такое теорема о бабочках?
6. infourok.ru> issledovatelskaya… teorema variona // Исследовательская работа «Теорема Вариньона»
7. people.su // Пьер Вариньон биография
8. referat.yabotanik.ru// бимедианы четырехугольника/ реферат по математике.
9. ru.vikipedia/org> Теорема Вариньона (геометрия)
10. treugolniki.ru>teorema-varinjona// Лекции и примеры решения задач

Благодарю за внимание !