Исследовательская работа по теме: «Замечательные свойства биссектрисы и медианы.»

Работу выполнила:
Рейхерт Надежда
ученица 9А класса.
Руководитель:
Кузьмина Галина
Вячеславовна,
учитель математики.

Актуальность темы, цель и задачи:

__Актуальность:__ Треугольник, его свойства и теоремы, связанные с ним, проходят красной линией по всей геометрии, являются основой основ планиметрии и стереометрии. Поэтому я посчитала важным изучить теорию о треугольнике. Так же мне это пригодится при сдаче ГИА, а в дальнейшем и ЕГЭ.

__Перед собой я поставила цель:__ Узнать новые свойства и теоремы, касающиеся треугольника, его элементов и укрепить свои прежние знания.

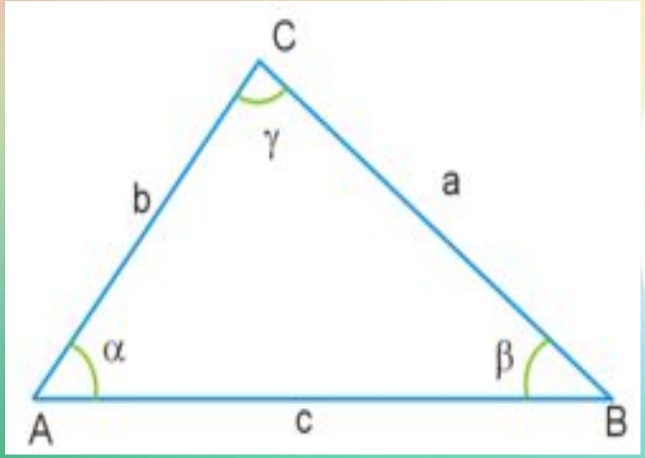
__Задачи:__

- Узнать историю треугольника.
- Повторить основные теоретические положения.
- Дополнить свои знания новой информацией.

Основные понятия.

Треугольник — *это часть плоскости, ограниченная минимально возможным количеством сторон. Существует раздел математики, целиком посвящённый изучению закономерностей треугольников —* ***тригонометрия****. Для треугольника всегда существует одна вписанная и одна описанная окружность*

Обозначения



Признаки равенства треугольников

Треугольник однозначно можно определить по следующим тройкам основных элементов:

- a, b, γ (равенство по двум сторонам и углу лежащему между ними);
- a, β, γ (равенство по стороне и двум прилежащим углам);
- a, b, c (равенство по трём сторонам).

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

- по катету и гипотенузе;
- по двум катетам;
- по катету и острому углу;
- по гипотенузе и острому углу.

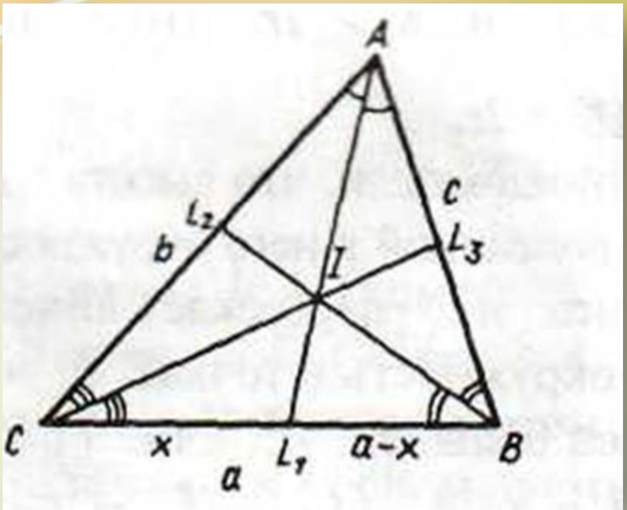
Отрезки и точки

- <u>Медианой треугольника</u>, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны (основанием медианы). Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка пересечения называется центроидом или центром тяжести треугольника.
- <u>Биссектрисой треугольника</u>, проведённой из данной вершины, называют отрезок, соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне и делящий угол при данной вершине пополам. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта

Малоизвестное свойство биссектрисы треугольника.

ТЕОРЕМА. Пусть биссектрисы AL_1, BL_2, CL_3 треугольника ABC пересекаются в точке I, тогда

$$\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a},\quad \frac{BI}{IL_2}=\frac{a+c}{b}\quad \frac{CI}{IL_3}=\frac{a+b}{c}$$



Докажем равенство:

$$\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a}$$

Доказательство:

AL_1 – биссектриса ΔABC. Известно, что

$$\frac{b}{c}=\frac{x}{a-x},\quad \text{откуда}\quad x=\frac{ab}{b+c}.$$

Из того, что CI – биссектриса $\Delta\, A L_1 C$, используя выражение для x, получим:

$$\frac{AI}{IL_1}=\frac{b}{x}=\frac{b(b+c)}{ab}=\frac{b+c}{a}$$

ЗАДАЧА 1. ДОКАЖИТЕ, ЧТО ЕСЛИ БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА ABC ТОЧКОЙ I ДЕЛЯТСЯ В ОДНОМ ОТНОШЕНИИ, ТО ТРЕУГОЛЬНИК ABC РАВНОСТОРОННИЙ.

- Решение.

По условию: $$\frac{AI}{IL_1}=\frac{BI}{IL_2}=\frac{CI}{IL_3}$$

Следовательно, $$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}.$$

Прибавляя к каждой дроби 1, получим $$\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c}$$

отсюда следует, что $a=b=c$. Значит, треугольник ABC ─ равносторонний.

Как можно найти длину биссектрисы треугольника?

1) *Длину биссектрисы треугольника можно найти по формуле* $l_B^2 = ac - a_1c_1$*, где* l_B *– биссектриса угла В, a, b, c стороны треугольника ABC,* a_1, c_1 *– отрезки на которые биссектриса* l_B *делит противоположную сторону.*

2) Длину биссектрисы треугольника можно найти, если знать стороны треугольника по формуле

$$\beta_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

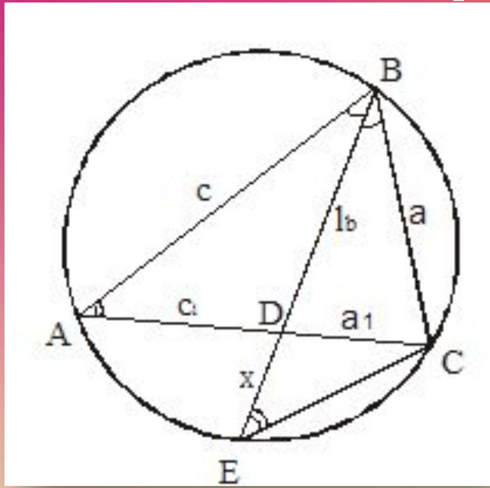
3) Длину биссектрисы можно найти, зная две стороны треугольника и угол между ними по формуле

$$\beta_c = \frac{2ab \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

где a и b – стороны треугольника,
γ - угол между ними.

Доказательства формул нахождения биссектрисы.

1)



Дано: $\Delta\ ABC$,
l_B- биссектриса угла B

Доказать: $l_B^2 = ac - a_1c_1$

Доказательство. Около треугольника ABC опишем окружность и продолжим биссектрису BD угла B до пересечения с окружностью в точке E. Соединим точки E и C. Положим $DE = x$

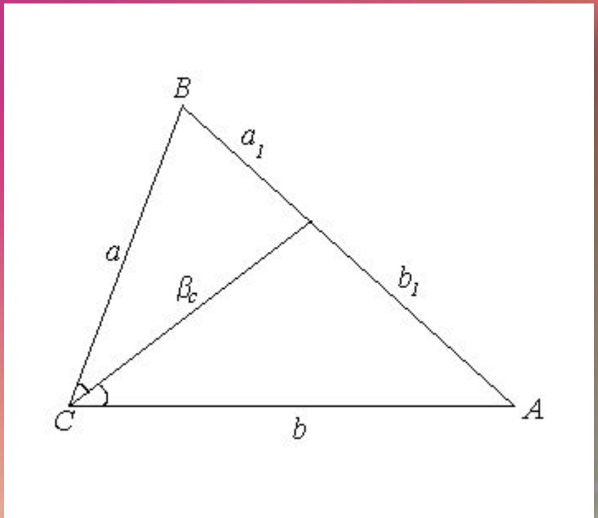
По свойству пересекающихся хорд имеем: $l_B \cdot x = a_1c_1$ (а)

Рассмотрим треугольники ABD и EBC. $\angle ABE = \angle EBC$ по условию. $\angle BAD = \angle BEC$ как углы опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, $\Delta ABD \backsim \Delta EBC$

Из подобия треугольников имеем $\dfrac{l_B}{a} = \dfrac{c}{l_B + x}$ (б).

Из условий (а) и (б) следует, что $l_B^2 = ac - a_1c_1$. Что и требовалось доказать.

2)



Дано: Δ ABC
a, b, c – стороны треугольника,
βc - биссектриса угла C
Доказать: βc =

$$\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

Доказательство:
Запишем формулу $\beta_c^2 = ab - a_1b_1$ в виде $\beta_c^2 = ab - a_1(c - a_1)$. Используя теорему о том, что биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, получим

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{c - a_1},$$

$$ac - aa_1 = ba_1;$$

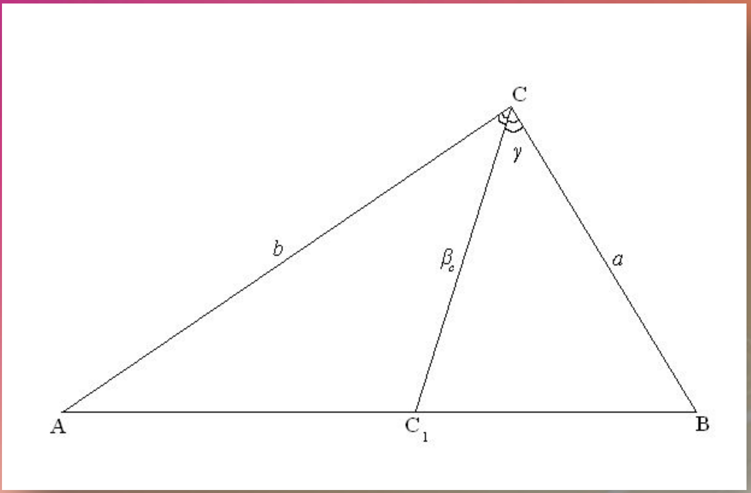
$$ac = a_1(b + a);$$

$$a_1 = \frac{ac}{a+b}$$

Отсюда находим $ab - \frac{ac}{a+b}\left(c - \frac{ac}{a+b}\right) = ab - \frac{ac}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+b} = \frac{ab(a+b)^2 - abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab\left((a+b)^2 - c^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$

Тогда βc = $\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$. Что и требовалось доказать.

3)



Дано: ΔABC,

$CC_1 = \beta_c$ – биссектриса

Доказать: $\beta_c = \dfrac{2ab\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$

Доказательство:

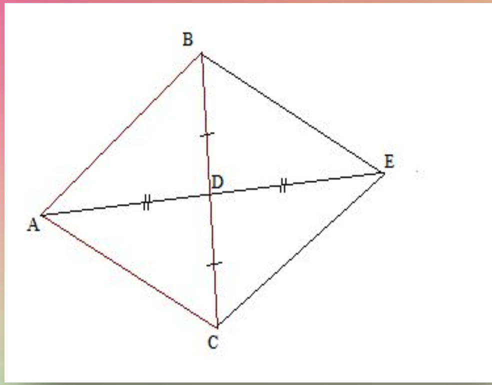
Пусть $CC_1 = \beta_c$ – биссектриса угла C треугольника ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$. Тогда $S_{ABC} = S_{ACC_1} + S_{BCC_1}$, или

$\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}b\cdot\beta_c\cdot\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}a\cdot\beta_c\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$, откуда βc = $\dfrac{\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma}{\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}(a+b)} = \dfrac{2ab\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. Что и требовалось доказать.

О МЕДИАНЕ.

• *Длину медианы треугольника можно всегда вычислить, если знать длины сторон треугольника, по следующей формуле* $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$

где a, b, c – стороны треугольника. Докажем справедливость этой формулы



Дано: ΔABC

AD – медиана.

Доказать: $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}$

Доказательство:

Продолжим медиану AD на расстояние $DE = AD$ и построим отрезки $BE = EC$. В полученном четырёхугольнике $ABEC$ точка D – точка пересечения диагоналей, а так как она делит BC и AE пополам, то $ABEC$ – параллелограмм (по признаку параллелограмма)

Теперь используем теорему о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Составим уравнение

$$AE^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$$

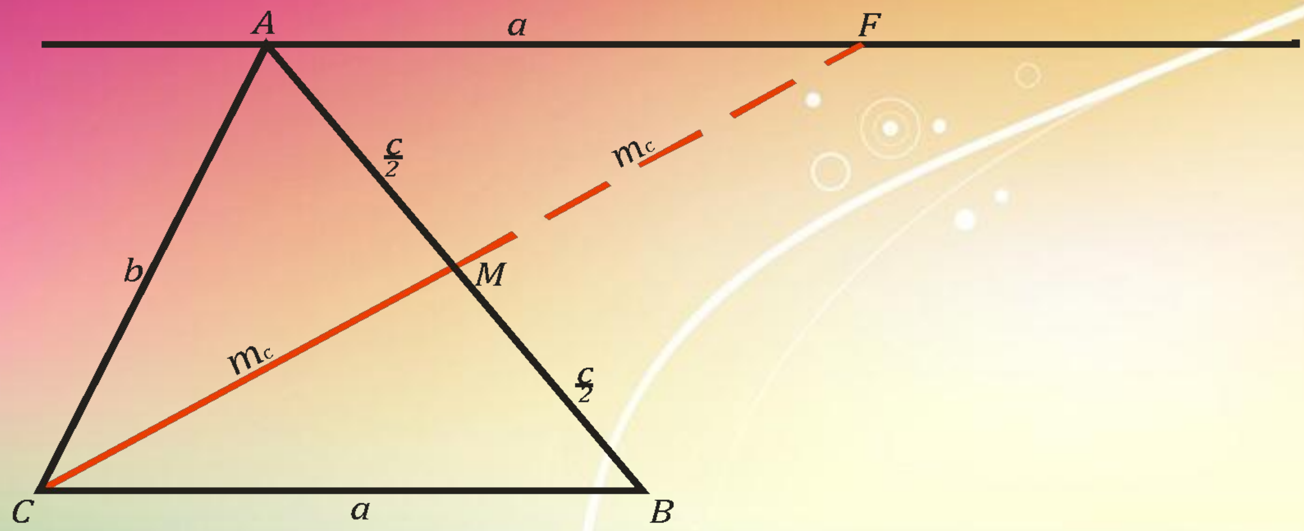
$$(2AD)^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - BC^2$$

$$4AD^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - BC^2$$

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}$$

Значит, данная формула справедлива. Что и требовалось доказать.

Медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, между которыми она заключена.



Пусть AB = c, AC = b, BC = a, CM = m_C.

Пусть F – точка пересечения прямой CM и прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC. Ясно, что ΔMAF = ΔMBC (по стороне $\frac{c}{2}$ и двум прилежащим углам). Получили, что MF=MC = m_C и AF = BC = a.

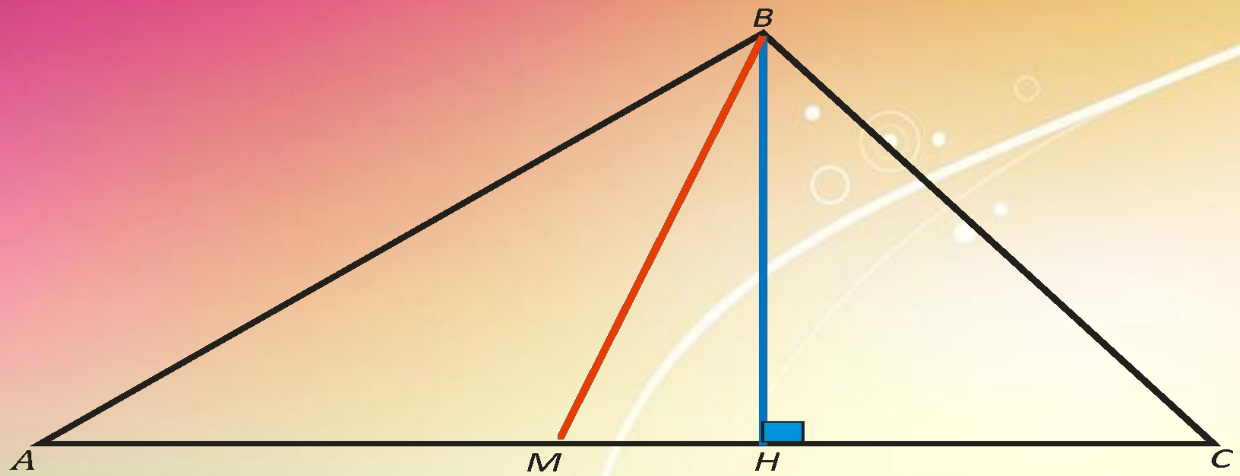
В ΔACF имеем:

CF $<$ AC + AF (неравенство треугольника)

$2m_C < a + b$;

$m_C < (a + b)/2$

Медиана треугольника делит его на 2 треугольника, площади которых равны.



Доказательство:

AM=MC $\Rightarrow$ BM – медиана;

Проведем BH – высоту Δ ABC;

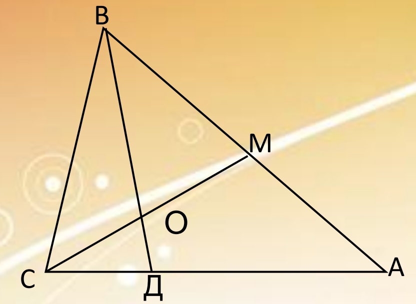
$S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot BH;$

$S_{MBC}=\frac{1}{2}\cdot MC\cdot BH.$

Так как AM=MC, поэтому $S_{ABM}=S_{MBC}$ Что и требовалось доказать.

Задачи.

- **Задача №1.** В треугольнике АВС проведена биссектриса ВД и медиана СМ, они пересекаются в точке О. Найдите отношение площадей АМОД и ∆АВС, если АВ=14, ВС=21.



Дано: ∆ АВС
ВД – биссектриса
СМ – медиана
АВ=14, 2.
Найти: $\frac{S_{\Delta AMOД}}{S_{\Delta ABC}}$

Решение:

Пусть $S_{\Delta ABC}$=S. $S_{\Delta CMA}=S_{\Delta CMB}$ т.к СМ –

$$\frac{S_{\Delta ABД}}{S_{\Delta BCД}}=\frac{АД}{ДС}=\frac{AB}{BC}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$$ т.к. ВД – биссектриса.

$$\frac{S_{\Delta ABД}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{АД}{AC}=\frac{2}{5}$$ значит $$S_{\Delta ABД}=\frac{2}{5}S_{\Delta ABC}=\frac{2}{5}S$$ $$S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}S,$$

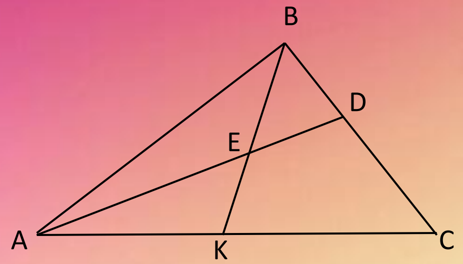
$$S_{\Delta BДC}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ABД}=\frac{3}{5}S$$ $$\frac{S_{\Delta BMO}}{S_{\Delta OBC}}=\frac{MO}{OC}=\frac{BM}{BC}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3};$$ $$\frac{S_{\Delta BMO}}{S_{\Delta MBC}}=\frac{1}{4},$$

$$S_{\Delta BMO}=\frac{1}{4}S_{\Delta MBC}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}S=\frac{1}{8}S.$$ $$S_{AMOД}=S_{\Delta ABД}-S_{\Delta BMO}=\frac{11}{40}S.$$

$$\frac{S_{AMOД}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{11}{40}S:S=\frac{11}{40}$$

Ответ: $$\frac{S_{AMOД}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{11}{40}.$$

Задача №2. Площадь треугольника АВС равна 40. Биссектриса АD пересекает медиану ВК в точке Е, при этом BD:CD=3:2. Найдите площадь четырёхугольника EDCK. (Задача взята из КИМов под редакцией А.А. Семенов, И.В. Ященко; вариант 18 №26)



Дано: Δ ABC
AD – биссектриса
BK – медиана
$S_{\Delta ABC} = 40$
BD:CD=3:2
Найти: S_{EDCK}

Решение:

$S_{\Delta ABK} = S_{\Delta BCK} = S_{\Delta ABC} : 2 = 20,$ т.к. ВК – медиана дели ΔABC на два равновеликих треугольник $S_{EDCK} = S_{\Delta BCK} - S_{\Delta BED}.$

По свойству

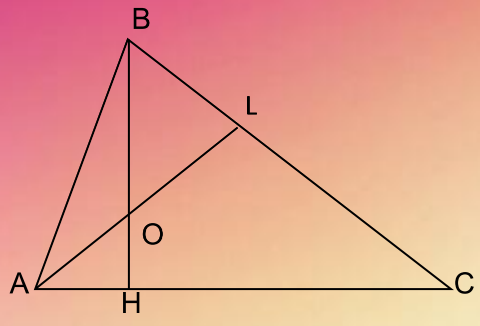
$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{2};$ т.к. ВК – медиана, то $AK = \frac{1}{2} AC$ и

ΔBCK и ΔBED имеют равный угол при вершине В,

$\frac{S_{\Delta BCK}}{S_{\Delta BED}} = \frac{BC \cdot BK}{BD \cdot BE} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$ $S_{\Delta BED} = \frac{9}{20} S_{\Delta BCK} = \frac{9}{20} \cdot 20 = 9;$ $S_{EDCK} = 20 - 9 = 11$

Отве т: $S_{EDCK} = 11.$

Задача №3. В треугольнике АВС биссектриса AL и высота ВН пересекаются в точке О. Найти радиус описанной вокруг треугольника АВС окружности, если известно, что ВС=4, а ВО:ОН=5:3. (Задача взята из КИМов под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухов; вариант 14 №26. 2014год)



Дано: Δ АВС
AL – биссектриса
ВН – высота
ВС=4, ВО:ОН=5:3
Найти: R.

Решение:

$$R = \frac{BC}{2sinA}, \qquad \frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}; cos\angle A = \frac{3}{5}; \quad sin\angle A = \frac{4}{5}; R = \frac{4}{2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: R=2,5.

Вывод.

В ходе работы я повторила основной материал геометрии, пройденный мной в школьной программе, из дополнительных источников узнала новые свойства и теоремы, касающиеся треугольника, рассмотрела интересные задачи с их применением. Всё это поможет мне при решении задач. Конечно, эти знания полезны и необходимы при сдаче экзамена.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Л. Никольская. Факультативный курс по математике. Учебное пособие для 7-9 классов средней школы. Москва “Просвещение” 1991 г. с. 92-93.
2. Т.Л. Рыбакова, И.В. Суслова. Школьный справочник “МАТЕМАТИКА”. Ярославль “Академия развития” 1997 г. с. 113.
3. Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук литературы. “ Квант № 7 1990 г. с. 40.
4. Аксенов М. Геометрия Энциклопедия для детей: Математика / М. Аксенов. – Москва: Аванта +, 2004 год.
5. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика / А. П. Савин. – Педагогика, 1989 год.