

Исследовательская работа по теме: «Замечательные свойства биссектрисы и медианы.»



Работу выполнила:
Рейхерт Надежда
ученица 9А класса.
Руководитель:
Кузьмина Галина
Вячеславовна,
учитель математики.

Актуальность темы, цель и задачи

Актуальность: Треугольник, его свойства и теоремы, связанные с ним, проходят красной линией по всей геометрии, являются основой основ планиметрии и стереометрии. Поэтому я посчитала важным изучить теорию о треугольнике. Так же мне это пригодится при сдаче ГИА, а в дальнейшем и ЕГЭ.

Перед собой я поставила цель: Узнать новые свойства и теоремы, касающиеся треугольника, его элементов и укрепить свои прежние знания.

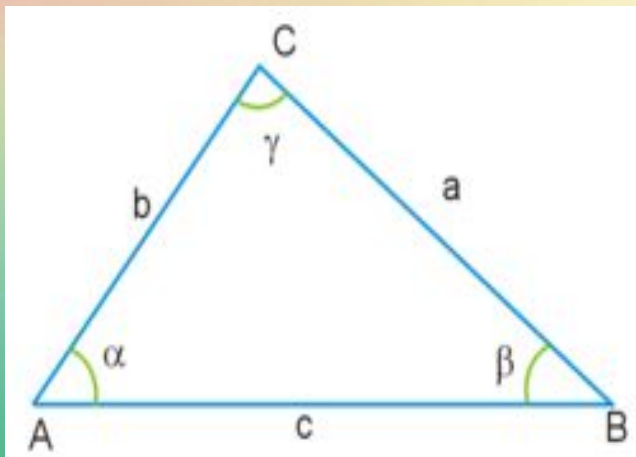
Задачи:

- Узнать историю треугольника.
- Повторить основные теоретические положения.
- Дополнить свои знания новой информацией.

Основные понятия.

Треугольник — это часть плоскости, ограниченная минимально возможным количеством сторон. Существует раздел математики, целиком посвящённый изучению закономерностей треугольников — **тригонометрия**. Для треугольника всегда существует одна вписанная и одна описанная окружность

Обозначения



Признаки равенства треугольников

Треугольник однозначно можно определить по следующим тройкам основных элементов:

- a, b, γ (равенство по двум сторонам и углу лежащему между ними);
- a, β, γ (равенство по стороне и двум прилежащим углам);
- a, b, c (равенство по трём сторонам).

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

- по катету и гипотенузе;
- по двум катетам;
- по катету и острому углу;
- по гипотенузе и острому углу.

Отрезки и точки

- Медианой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположащей стороны (основанием медианы). Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка пересечения называется центроидом или центром тяжести треугольника.
- Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называют отрезок, соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне и делящий угол при данной вершине пополам. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта

Малоизвестное свойство биссектрисы треугольника.

ТЕОРЕМА. Пусть биссектрисы AL_1 , BL_2 , CL_3 треугольника ABC пересекаются в точке I , тогда

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{BI}{IL_2} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{CI}{IL_3} = \frac{a+b}{c}$$

Докажем равенство:

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$$

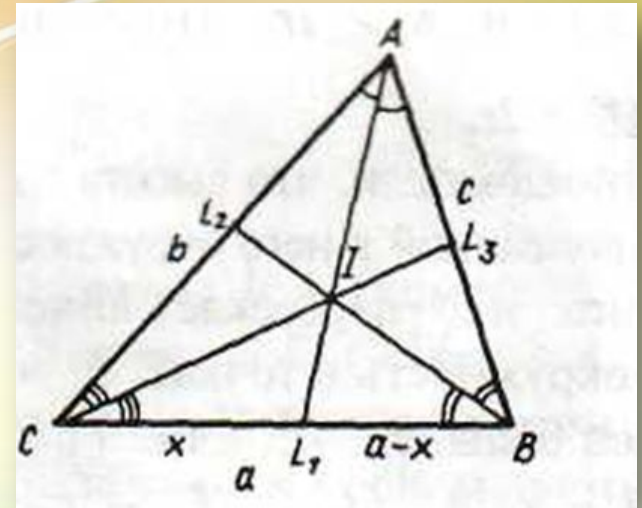
Доказательство:

AL_1 — биссектриса $\triangle ABC$. Известно, что

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{ab}{b+c}.$$

Из того, что CI — биссектриса $\triangle AL_1C$, используя выражение для x , получим:

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b}{x} = \frac{b(b+c)}{ab} = \frac{b+c}{a}$$



ЗАДАЧА 1. ДОКАЖИТЕ, ЧТО ЕСЛИ БИСSEKTRИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА ABC ТОЧКОЙ I ДЕЛЯТСЯ В ОДНОМ ОТНОШЕНИИ, ТО ТРЕУГОЛЬНИК ABC РАВНОСТОРОННИЙ.

• Решение.

По условию:
$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{BI}{IL_2} = \frac{CI}{IL_3}$$

Следовательно,
$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}.$$

Прибавляя к каждой дроби 1, получим

отсюда следует, что

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$$

$a = b = c$. Значит, треугольник ABC — равносторонний.

Как можно найти длину биссектрисы треугольника?

1) Длину биссектрисы треугольника можно найти по формуле $l_B^2 = ac - a_1c_1$, где l_B – биссектриса угла B , a, b, c стороны треугольника ABC , a_1, c_1 – отрезки на которые биссектриса l_B делит противоположную сторону.

2) Длину биссектрисы треугольника можно найти, если знать стороны треугольника по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

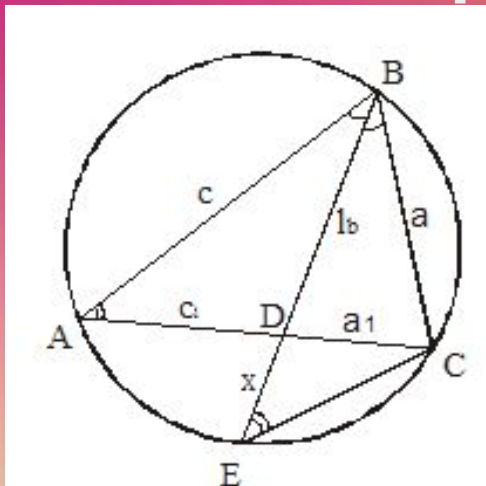
3) Длину биссектрисы можно найти, зная две стороны треугольника и угол между ними по формуле

$$l_c = \frac{2ab \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b} \quad \text{где } a \text{ и } b \text{ – стороны треугольника,}$$

γ – угол между ними.

Доказательства формул нахождения биссектрисы.

1)



Дано: $\triangle ABC$,
 l_B - биссектриса угла B

Доказать: $l_B^2 = ac - a_1c_1$

Доказательство. Около треугольника ABC опишем окружность и продолжим биссектрису BD угла B до пересечения с окружностью в точке E . Соединим точки E и C . Положим $DE = x$

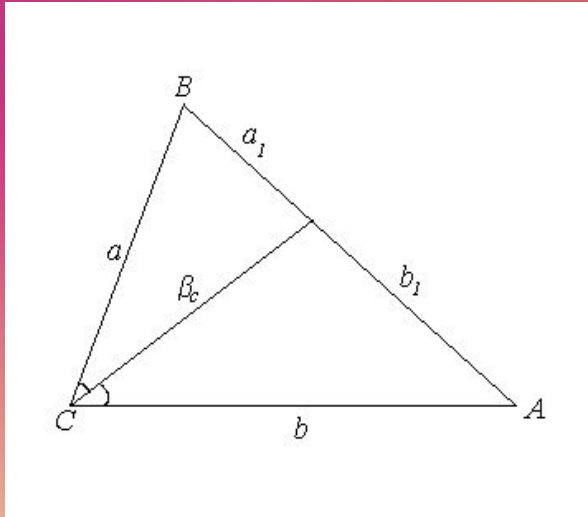
По свойству пересекающихся хорд имеем: $l_B \cdot x = a_1c_1$ (а)

Рассмотрим треугольники ABD и EBC . $\angle ABE = \angle EBC$ по условию. $\angle BAD = \angle BEC$ как углы опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, $\triangle ABD \sim \triangle EBC$

Из подобия треугольников имеем $\frac{l_B}{a} = \frac{c}{l_B + x}$ (б).

Из условий (а) и (б) следует, что $l_B^2 = ac - a_1c_1$. Что и требовалось доказать.

2)



Дано: ΔABC
 a, b, c – стороны
 треугольника,
 β_c - биссектриса угла C
 Доказать: $\beta_c =$

$$\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

Доказательство:

Запишем формулу $\beta_c^2 = ab - a_1 b_1$ в виде $\beta_c^2 = ab - a_1(c - a_1)$. Используя теорему о том, что биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, получим

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{c - a_1},$$

$$ac - aa_1 = ba_1;$$

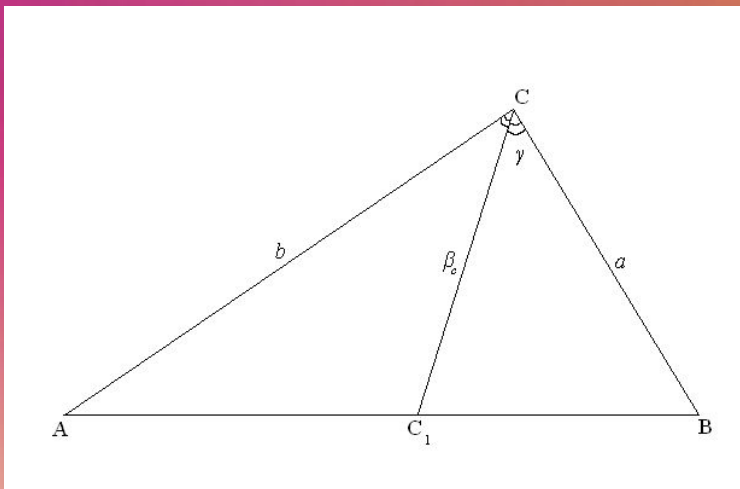
$$ac = a_1(b + a);$$

$$a_1 = \frac{ac}{a+b}$$

$$\text{Отсюда находим } ab - \frac{ac}{a+b} \left(c - \frac{ac}{a+b} \right) = ab - \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+b} = \frac{ab(a+b)^2 - abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

Тогда $\beta_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$. Что и требовалось доказать.

3)



Дано: $\triangle ABC$,
 $CC_1 = \beta_c$ – биссектриса

Доказать: $\beta_c = \frac{2ab \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}$

Доказательство:

Пусть $CC_1 = \beta_c$ – биссектриса угла C треугольника ABC , $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$. Тогда $S_{ABC} = S_{ACC_1} + S_{BCC_1}$, или

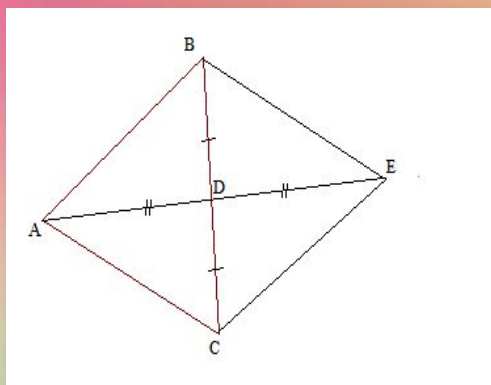
$$\frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}b \cdot \beta_c \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}a \cdot \beta_c \cdot \sin \frac{\gamma}{2}, \text{ откуда } \beta_c = \frac{\frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma}{\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} (a+b)} = \frac{2ab \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

О МЕДИАНЕ.

• Длину медианы треугольника можно всегда вычислить, если знать длины сторон треугольника, по следующей формуле

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

где a, b, c – стороны треугольника. Докажем справедливость этой формулы



Дано: $\triangle ABC$

AD – медиана.

Доказать: $AD = \frac{1}{2} \sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}$

Доказательство:

Продолжим медиану AD на расстояние $DE = AD$ и построим отрезки $BE = EC$. В полученном четырёхугольнике $ABEC$ точка D – точка пересечения диагоналей, а так как она делит BC и AE пополам, то $ABEC$ – параллелограмм (по признаку параллелограмма)

Теперь используем теорему о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Составим

$$AE^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$$

уравнение

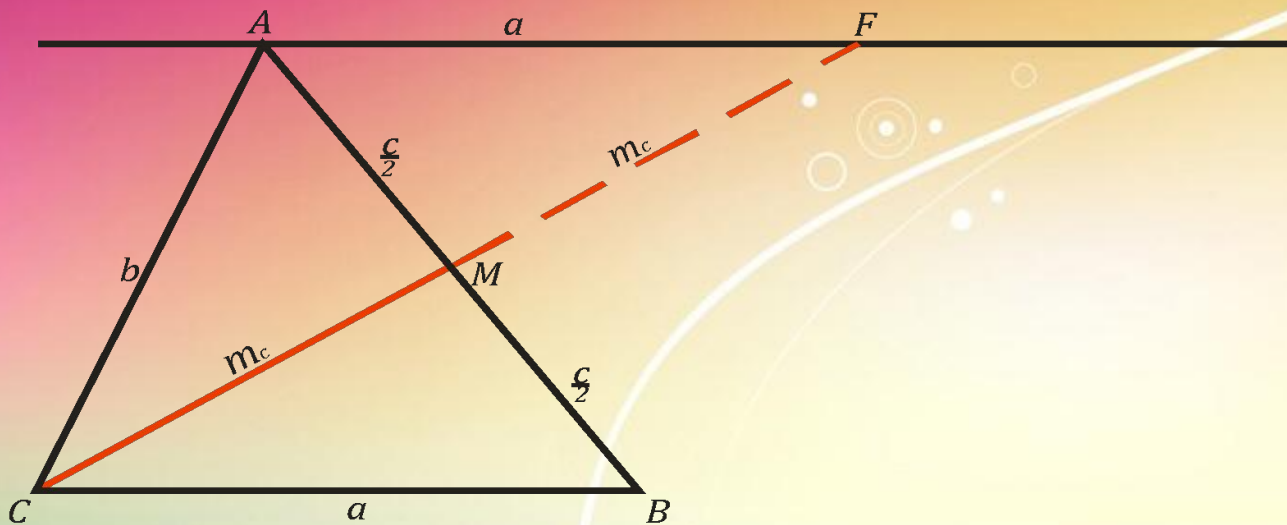
$$(2AD)^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - BC^2$$

$$4AD^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - BC^2$$

$$AD = \frac{1}{2} \sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}$$

Значит, данная формула справедлива. Что и требовалось доказать.

Медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, между которыми она заключена.



Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $CM = m_c$.

Пусть F – точка пересечения прямой CM и прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC . Ясно, что

$\triangle MAF = \triangle MBC$ (по стороне $\frac{c}{2}$ и двум прилежащим углам). Получили, что $MF = MC = m_c$ и $AF = BC = a$.

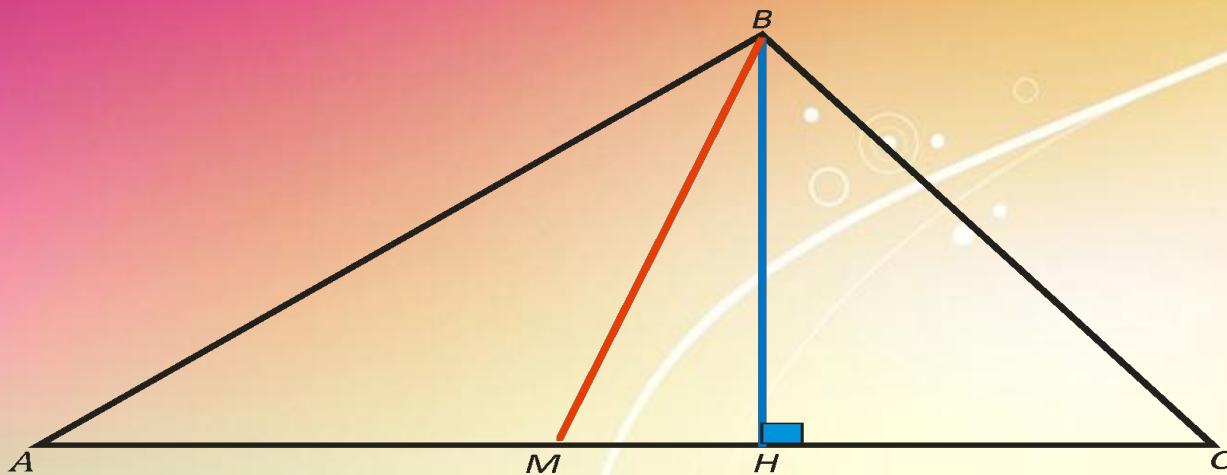
В $\triangle ACF$ имеем:

$CF < AC + AF$ (неравенство треугольника)

$$2m_c < a + b;$$

$$m_c < (a + b)/2$$

Медиана треугольника делит его на 2 треугольника, площади которых равны.



Доказательство:

$AM=MC \Rightarrow BM$ –
медиана;

Проведем BH – высоту $\triangle ABC$;

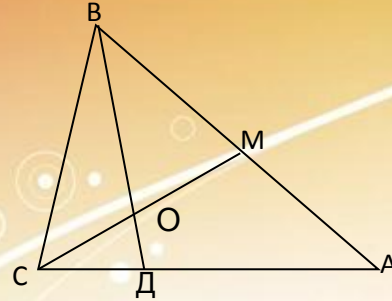
$$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BH;$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot BH.$$

Так как $AM=MC$, поэтому $S_{ABM} = S_{MBC}$ Что и требовалось доказать.

Задачи.

- Задача №1.** В треугольнике ABC проведена биссектриса ВД и медиана СМ, они пересекаются в точке О. Найдите отношение площадей АМОД и ΔABC, если АВ=14, ВС=21.



Дано: Δ ABC
 ВД –
 биссектриса
 СМ – медиана
 АВ=14, $\frac{S_{\Delta AMOD}}{S_{\Delta ABC}} = ?$
 Найти: $\frac{S_{\Delta AMOD}}{S_{\Delta ABC}}$

Решени

е:

Пусть $S_{\Delta ABC} = S$. $S_{\Delta CMA} = S_{\Delta CMB}$

т.к. СМ –

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \quad \text{т.к. ВД – биссектриса.}$$

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \quad \text{значит} \quad S_{\Delta ABD} = \frac{2}{5} S_{\Delta ABC} = \frac{2}{5} S \quad S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} S,$$

$$S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABD} = \frac{3}{5} S \quad \frac{S_{\Delta BMO}}{S_{\Delta OBC}} = \frac{MO}{OC} = \frac{BM}{BC} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}; \quad \frac{S_{\Delta BMO}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{1}{4},$$

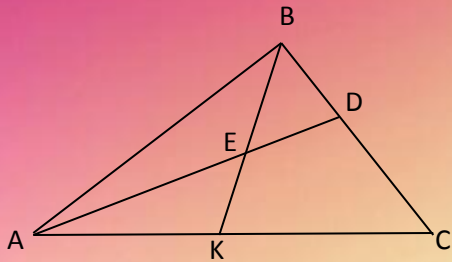
$$S_{\Delta BMO} = \frac{1}{4} S_{\Delta BMC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{8} S. \quad S_{\Delta AMOD} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta BMO} = \frac{11}{40} S.$$

$$\frac{S_{\Delta AMOD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{11}{40} S : S = \frac{11}{40}$$

Отве
т:

$$\frac{S_{\Delta AMOD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{11}{40}$$

Задача №2. Площадь треугольника ABC равна 40. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD:CD=3:2$. Найдите площадь четырёхугольника EDCK. (Задача взята из КИМов под редакцией А.А. Семенов, И.В. Яценко; вариант 18 №26)



Дано: $\triangle ABC$
 AD – биссектриса
 BK – медиана
 $S_{\triangle ABC} = 40$
 $BD:CD=3:2$
 Найти: S_{EDCK}

Решение:

$S_{\triangle ABK} = S_{\triangle BCK} = S_{\triangle ABC} : 2 = 20$, т.к. BK – медиана делит $\triangle ABC$ на два равновеликих треугольника $S_{EDCK} = S_{\triangle BCK} - S_{\triangle BED}$.

По свойству

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{2}$; т.к. BK – медиана, $AK = \frac{1}{2} AC$ и

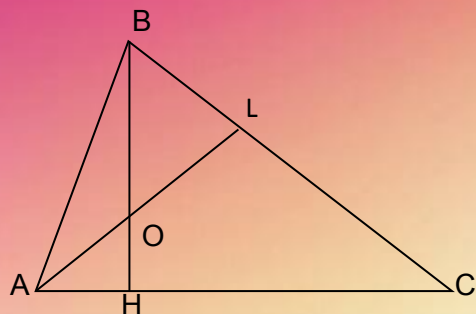
$\triangle BCK$ и $\triangle BED$ имеют равный угол при вершине B,

$$\frac{S_{\triangle BCK}}{S_{\triangle BED}} = \frac{BC \cdot BK}{BD \cdot BE} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{9} \quad S_{\triangle BED} = \frac{9}{20} S_{\triangle BCK} = \frac{9}{20} \cdot 20 = 9; \quad S_{EDCK} = 20 - 9 = 11$$

Отв $S_{EDCK} = 11.$

Т:

Задача №3. В треугольнике ABC биссектриса AL и высота BH пересекаются в точке O. Найти радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности, если известно, что $BC=4$, а $BO:OH=5:3$. (Задача взята из КИМов под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухов; вариант 14 №26. 2014год)



Дано: $\triangle ABC$
AL – биссектриса
BH – высота
 $BC=4$, $BO:OH=5:3$
Найти: R.

Решени

е:

$$R = \frac{BC}{2\sin A}, \quad \frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}; \cos \angle A = \frac{3}{5}; \quad \sin \angle A = \frac{4}{5}; R = \frac{4}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ: $R=2,5$.

Вывод.

В ходе работы я повторила основной материал геометрии, пройденный мной в школьной программе, из дополнительных источников узнала новые свойства и теоремы, касающиеся треугольника, рассмотрела интересные задачи с их применением. Всё это поможет мне при решении задач. Конечно, эти знания полезны и необходимы при сдаче экзамена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И.Л. Никольская. Факультативный курс по математике. Учебное пособие для 7-9 классов средней школы. Москва "Просвещение" 1991 г. с. 92-93.*
2. *Т.Л. Рыбакова, И.В. Сулова. Школьный справочник "МАТЕМАТИКА". Ярославль "Академия развития" 1997 г. с. 113.*
3. *Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук литературы. "Квант № 7 1990 г. с. 40.*
4. *Аксенов М. Геометрия Энциклопедия для детей: Математика / М. Аксенов. – Москва: Аванта +, 2004 год.*
5. *Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика / А. П. Савин. – Педагогика, 1989 год.*