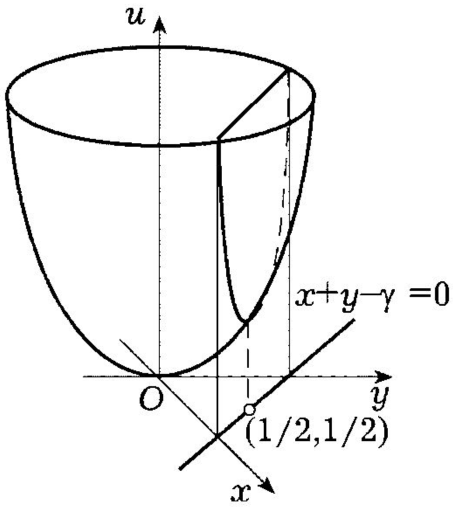
6. *ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ*

6.5. Условный экстремум. Функция Лагранжа



Задача. Найти экстремумы функции $u = x^2 + y^2$ при условии, что аргументы этой функции удовлетворяют условию связи $x + y — 1 = 0$.

Постановка задачи об условном экстремуме

$$u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$ - ext

при условии (уравнения связи)

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0,\\
F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0,\\
\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\\
F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0.
\end{aligned}$$

6. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция *u* при наличии связей имеет условный максимум (минимум) в точке M_0, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи,
если найдется такая окрестность точки M_0, в пределах которой значение функции *u* в точке M_0 является наибольшим (наименьшим) среди ее значений во всех точках, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи.

6. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема *(необходимые условия для условного экстремума). Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ определена в области $D \subset R^{n+m}$, x^0 внутренняя точка D и заданы n непрерывно дифференцируемые связи*

$$\begin{array}{c} \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0 \\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0 \\ \ldots \\ \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0 \end{array},$$

причем

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right| \neq 0, \text{ в точке } x^0.$$

Тогда в точке x^0 выполнены условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j} = 0, \; j=1, \ldots, n+m. \quad (1)$$

Замечание. При составления уравнений (1) для поиска точек «подозрительных» на условный экстремум удобно использовать функцию Лагранжа $L = f + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi_k$, условия (1) тогда запишутся в виде $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ (или $dL=0$).

7. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Обозначение: $\Pi = [a, b] \times [c, d] \subset R^2$.

Определение:
пусть $f(x, y)$ определена на π, T_x – разбиение отрезка $[a, b]$, T_y – разбиение отрезка $[c, d]$.

$$\text{Тогда } T = T_x \times T_y = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}_{i=1, j=1}^{n,\, m}$$

называется разбиением прямоугольника π.

Если в каждом отрезке $\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$ выбрана точка ξ_i, такое разбиение называется размеченным и обозначается $T_x(\xi)$.

Если разбиения T_x и T_y – размеченные: $T_x(\xi)$ и $T_y(\eta)$, то $T(\xi, \eta) = T_x(\xi) \times T_y(\eta)$ называется размеченным разбиением π.

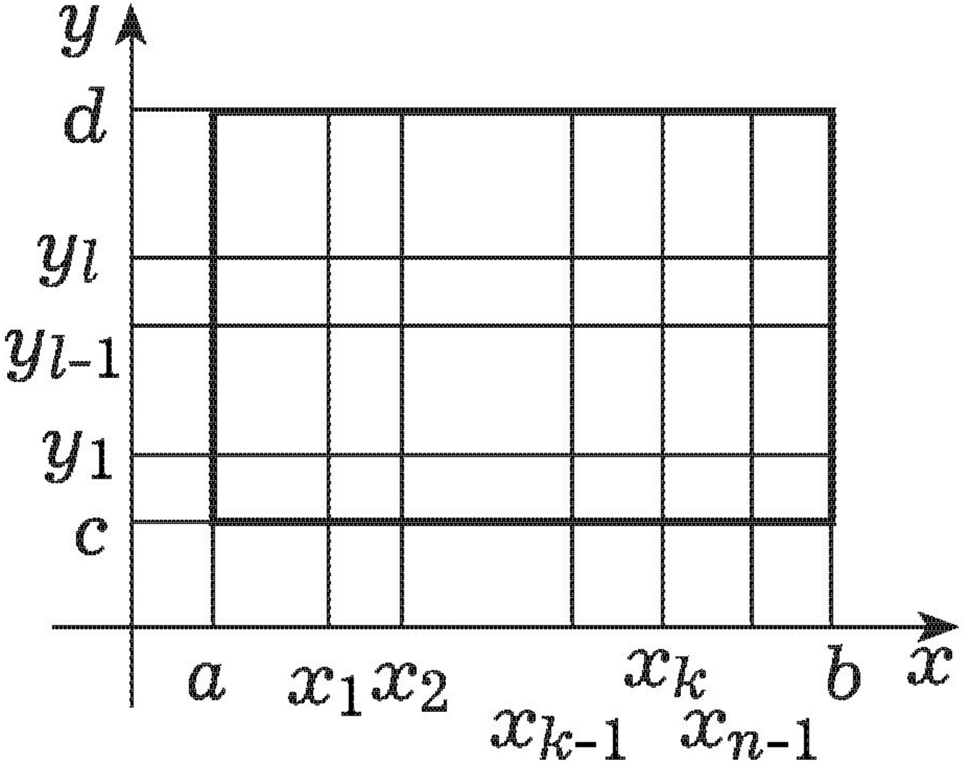
Введём обозначения: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Определение:

Пусть на прямоугольнике Π выбрано размеченное разбиение $T(\xi, \eta)$ и определена $f(x, y)$. тогда сумма $\sigma_f\big(T(\xi, \eta)\big) = \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} f\big(\xi_i, \eta_j\big) \Delta x_i \Delta y_j$

называется интегральной суммой функции $f(x, y)$

на размеченном разбиении $T(\xi, \eta)$.



y
d
y_l
y_{l-1}
y_1
c
a
x_1 x_2
x_k
b
x
x_{k-1}
x_{n-1}

Определение:

Величина $d(T) = \max\left\{d(T_x), d\left(T_y\right)\right\}$ называется диаметром разбиения T.

Определение:

Если для $f(x, y)$, определенной на П, существует $\mathrm{I} \in R$, что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_\varepsilon > 0$, что $\forall T(\xi, \eta)$, такого, что $d\left(T(\xi, \eta)\right) < \delta_\varepsilon$, $\left|\sigma_f\left(T(\xi, \eta)\right) - I\right| < \varepsilon$,

То $f(x, y)$ называется интегрируемой по риману на П, и это обозначается так: $f(x, y) \in R(\pi)$, а

число I называется интегралом римана функции $f(x, y)$ на П.

Обычно записывают, что:

$$\lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} f\left(\xi_i, \eta_j\right) \Delta x_i \Delta y_j = I,$$

и этот предел записывается так:

$$I = \iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dx dy.$$

Определение:

Обозначим через $\Pi_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Пусть $M_{ij} = \sup_{\Pi_{ij}} f(x, y)$, а $m_{ij} = \inf_{\Pi_{ij}} f(x, y)$.

Тогда верхней суммой дарбу $f(x, y)$ на разбиении T

Называется $\underline{\underline{S}}(T) = \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ \overline{\overline{m}}} M_{ij}\, \Delta x_i \Delta y_j$, а нижней суммой дарбу $f(x, y)$ на

Разбиении T называется $\overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$.

Лемма: $\overline{\overline{S}}(T) \leq \ \sigma_f\big(T(\xi, \eta)\big) \leq \underline{\underline{S}}(T)$

Лемма:$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists$ такая разметка (ξ', η') разбиения T, что $\underline{\underline{S}}(T) - \sigma_f\big(T(\xi', \eta')\big) < \varepsilon$ и $\exists$ такая разметка (ξ'', η'') разбиения T, что $\sigma_f\big(T(\xi'', \eta'')\big) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$.

Определение:

Если T_x' является измельчением T_x и T_y' является измельчением T_y, то $T' = T_x' \times T_y'$ называется измельчением T.

Лемма:

Если T' − измельчение T, то $\overline{\overline{S}}(T) \leq \overline{\overline{S}}(T') \leq \underline{\underline{S}}(T') \leq \underline{\underline{S}}(T)$.

Лемма:

$$\forall T_1, T_2 \qquad \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

Следствие:

Множество $\{\overline{\overline{S}}(T)\}$ ограничено сверху, а множество $\{\underline{\underline{S}}(T)\}$ ограничено снизу.

Определение:

$\operatorname{Sup}\limits_T \overline{\overline{S}}(T) = I_*$ − нижний интеграл дарбу,

$\inf\limits_T \underline{\underline{S}}(T) = I^*$ − верхний интеграл дарбу.

Лемма:

$$I_* \leq I^*$$

Теорема (критерий Дарбу интегрируемости по Риману):

$$f(x, y) \in R(\Pi) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall T \quad d(T) < \delta_\varepsilon \qquad \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$$

Теорема:

Если $f(x, y) \in C(\Pi)$, то $f(x, y) \in R(\Pi)$.

Теорема:

Пусть $f(x, y)$ ограничена на П: $\exists M$, что $|f(x, y)| < M$, и пусть множество точек разрыва $f(x, y)$ (обозначим его за A) имеет меру ноль: $\mu(A) = 0$; тогда $f(x, y) \in R(\Pi)$.

Определение:

Пусть $G \subset R^2$ – замкнутая ограниченная область, и пусть $f(x, y)$ определена и ограничена на G. Пусть π – прямоугольник, содержащий G. введём функцию $\hat{f}(x, y)$: $\hat{f}(x, y) =$

$$\begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \in \Pi \backslash G \end{cases}$$

будем называть $f(x, y)$ интегрируемой по риману на G и обозначать это так: $f(x, y) \in R(G)$, если $\hat{f}(x, y) \in R(\Pi)$. Число $\iint_{\Pi} \hat{f}(x, y)\, dxdy$ будем называть интегралом $f(x, y)$ по G и обозначать так: $\iint_{G} f(x, y)\, dxdy$

Теорема (геометрический смысл двойного интеграла):

Пусть G – замкнутая ограниченная область, пусть $\mu(\partial G) = 0$. Тогда $\iint\limits_{G} 1\, dxdy = \mu(G)$.

Теорема:

Пусть $f(x, y)$ ограничена на G, $\mu(\partial G) = 0$ и пусть множество точек разрыва $f(x, y)$ имеет площадь 0 $\Longrightarrow$ $f(x, y) \in R(G)$