

6. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

6.5. Условный экстремум. Функция Лагранжа

Задача. Найти экстремумы функции $u = x^2 + y^2$ при условии, что аргументы этой функции удовлетворяют условию связи $x + y - 1 = 0$.

Постановка задачи об условном экстремуме

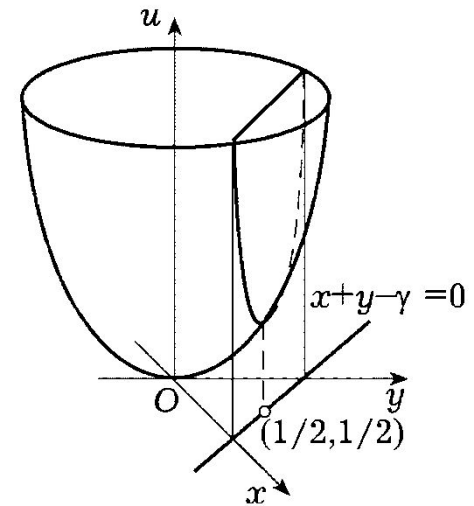
$u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ - ext
при условии (уравнения связи)

$$F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0,$$

$$F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0,$$

.....

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0.$$



6. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция u при наличии связей имеет условный максимум (минимум) в точке M_0 , координаты которой удовлетворяют уравнениям связи, если найдется такая окрестность точки M_0 , в пределах которой значение функции u в точке M_0 является наибольшим (наименьшим) среди ее значений во всех точках, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи.

6. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема (необходимые условия для условного экстремума). Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_{n+m})$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, x^0 внутренняя точка D и заданы n непрерывно дифференцируемые связи

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) &= 0 \\ \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) &= 0, \\ &\dots \\ \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) &= 0\end{aligned}$$

причем

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right| \neq 0, \text{ в точке } x^0.$$

Тогда в точке x^0 выполнены условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_j} = 0, j=1, \dots, n+m. \quad (1)$$

Замечание. При составлении уравнений (1) для поиска точек «подозрительных» на условный экстремум удобно использовать функцию Лагранжа $L = f + \sum_{k=1}^n \lambda_k \Phi_k$, условия (1) тогда запишутся в виде $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ (или $dL=0$).

7. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Обозначение: $\Pi = [a, b] \times [c, d] \subset R^2$.

Определение:

пусть $f(x, y)$ определена на Π , T_x – разбиение отрезка $[a, b]$, T_y – разбиение отрезка $[c, d]$.

$$\text{Тогда } T = T_x \times T_y = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}_{i=1, j=1}^{n, m}$$

называется разбиением прямоугольника Π .

Если в каждом отрезке $\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ выбрана точка ξ_i , такое разбиение называется размеченным и обозначается $T_x(\xi)$.

Если разбиения T_x и T_y – размеченные: $T_x(\xi)$ и $T_y(\eta)$, то $T(\xi, \eta) = T_x(\xi) \times T_y(\eta)$ называется размеченным разбиением Π .

Введём обозначения: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

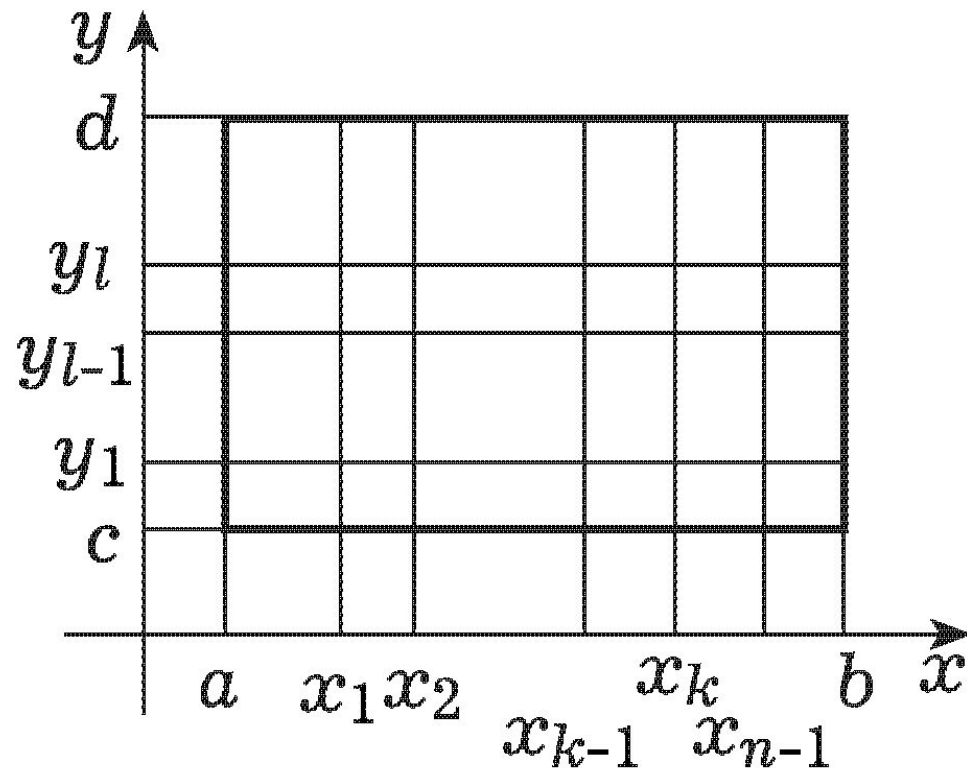
Определение:

Пусть на прямоугольнике Π выбрано размеченное разбиение $T(\xi, \eta)$ и

определена $f(x, y)$. тогда сумма $\sigma_f(T(\xi, \eta)) = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j$

называется интегральной суммой функции $f(x, y)$

на размеченном разбиении $T(\xi, \eta)$.



Определение:

Величина $d(T)$
 $= \max \{d(T_x), d(T_y)\}$ называется диаметром разбиения T .

Определение:

Если для $f(x, y)$, определенной на Π , существует $I \in R$, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$, что $\forall T(\xi, \eta)$, такого, что $d(T(\xi, \eta)) < \delta_\varepsilon$,
 $|\sigma_f(T(\xi, \eta)) - I| < \varepsilon$,

То $f(x, y)$ называется интегрируемой по риману на Π ,
и это обозначается так: $f(x, y) \in R(\Pi)$, а

число I называется интегралом римана функции $f(x, y)$ на Π .

Обычно записывают, что:

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1, j=1}^{n, m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = I,$$

и этот предел записывается так:

$$I = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

Определение:

Обозначим через $\Pi_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Пусть $M_{ij} = \sup_{\Pi_{ij}} f(x, y)$, а $m_{ij} = \inf_{\Pi_{ij}} f(x, y)$.

Тогда верхней суммой дарбу $f(x, y)$ на разбиении T

называется $\underline{S}(T)$

$$= \sum_{i=1, j=1}^{n, m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \text{ а нижней суммой дарбу } f(x, y) \text{ на}$$

$$\text{разбиении } T \text{ называется } \overline{S}(T) = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Лемма: $\overline{S}(T) \leq \sigma_f(T(\xi, \eta)) \leq \underline{S}(T)$

Лемма: $\forall \varepsilon > 0$ \exists такая разметка (ξ', η') разбиения T , что

$$\underline{S}(T) - \sigma_f(T(\xi', \eta')) < \varepsilon \text{ и } \exists \text{ такая разметка}$$

$$(\xi'', \eta'') \text{ разбиения } T, \text{ что } \sigma_f(T(\xi'', \eta'')) - \overline{S}(T) < \varepsilon.$$

Определение:

Если T'_x является измельчением T_x и T'_y является измельчением T_y , то $T' = T'_x \times T'_y$ называется измельчением T .

Лемма:

Если T' – измельчение T , то $\overline{\overline{S}}(T) \leq \overline{\overline{S}}(T') \leq \underline{\underline{S}}(T') \leq \underline{\underline{S}}(T)$.

Лемма:

$$\forall T_1, T_2 \quad \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

Следствие:

Множество $\{\overline{\overline{S}}(T)\}$ ограничено сверху, а множество $\{\underline{\underline{S}}(T)\}$ ограничено снизу.

Определение:

$\sup_T \overline{\overline{S}}(T) = I_*$ – нижний интеграл дарбу,

$\inf_T \underline{\underline{S}}(T) = I^*$ – верхний интеграл дарбу.

Лемма:

$$I_* \leq I^*$$

Теорема (критерий Дарбу интегрируемости по Риману):

$$f(x, y) \in R(\Pi) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall T \quad d(T) < \delta_\varepsilon \quad \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$$

Теорема:

Если $f(x, y) \in C(\Pi)$, то $f(x, y) \in R(\Pi)$.

Теорема:

Пусть $f(x, y)$ ограничена на Π : $\exists M$, что $|f(x, y)| < M$, и пусть множество точек разрыва $f(x, y)$ (обозначим его за A) имеет меру ноль: $\mu(A) = 0$; тогда $f(x, y) \in R(\Pi)$.

Определение:

Пусть $G \subset R^2$ – замкнутая ограниченная область, и пусть $f(x, y)$ определена и ограничена на G . Пусть Π – прямоугольник, содержащий G .

введём функцию $\hat{f}(x, y)$:
$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \in \Pi \setminus G \end{cases}$$

будем называть $f(x, y)$ интегрируемой по Риману на G и обозначать

это так: $f(x, y) \in R(G)$, если $\hat{f}(x, y) \in R(\Pi)$. Число $\iint_{\Pi} \hat{f}(x, y) dx dy$

будем называть интегралом $f(x, y)$ по G и обозначать так:
$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

Теорема (геометрический смысл двойного интеграла):

Пусть G – замкнутая ограниченная область, пусть

$$\mu(\partial G) = 0. \text{ Тогда } \iint_G 1 dx dy = \mu(G).$$

Теорема:

Пусть $f(x, y)$ ограничена на G , $\mu(\partial G) = 0$ и пусть множество точек разрыва $f(x, y)$ имеет площадь 0 $\Rightarrow f(x, y) \in R(G)$