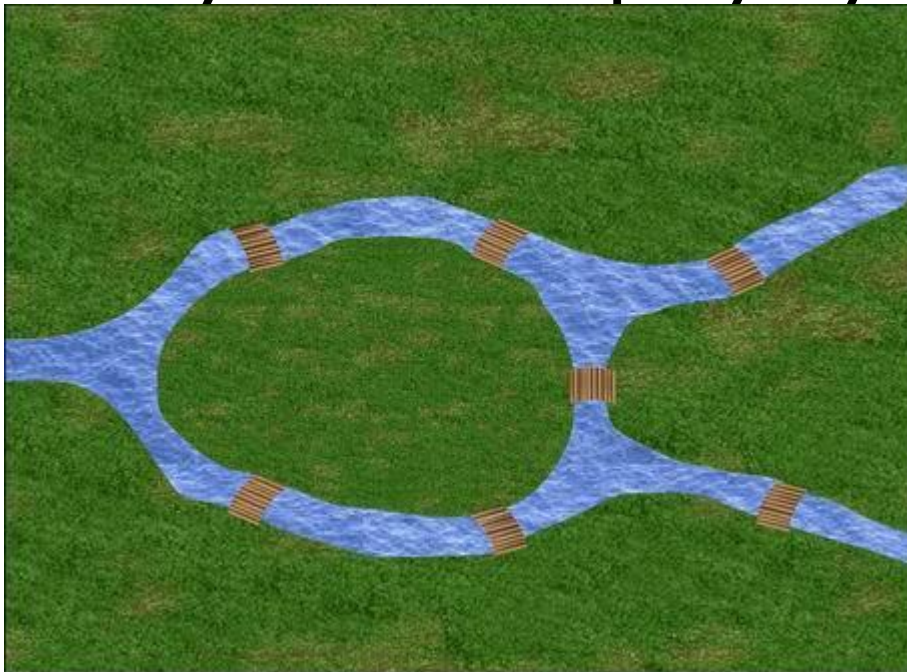


Уникарсальные фигуры

К XVIII в. через реку Прегель, протекавшую по городу Кёнигсберг (Калининград), было построено 7 мостов, которые связывали её берега с двумя островами, расположенными в черте города.



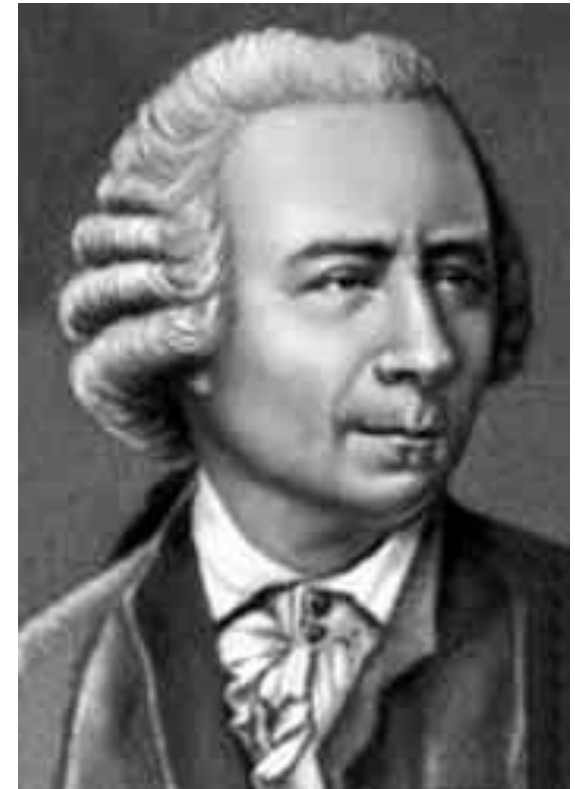
Рассказывают, что однажды один из жителей города спросил у своего соседа, сможет ли он пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать лишь один раз и вернуться к тому месту, откуда начал прогулку.



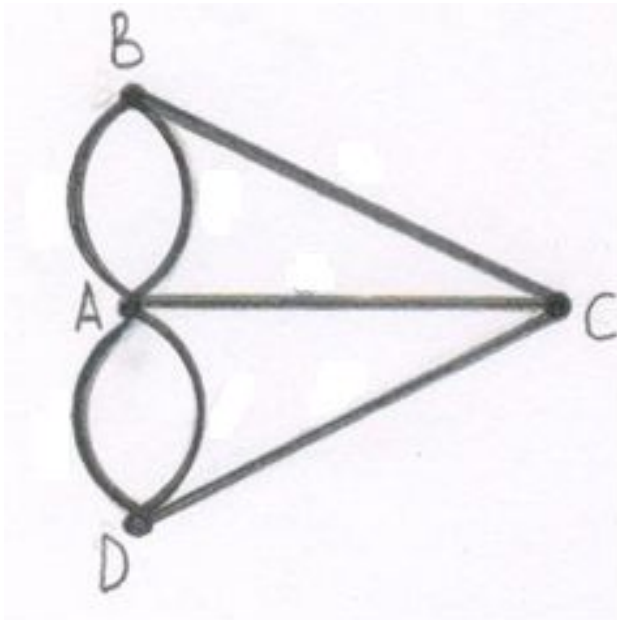
Перед вами план
Кёнигсберга.
Можете
попробовать!

Этой задачей заинтересовались многие, однако решить её никто из жителей города так и не смог.

В дальнейшем задача привлекла внимание разных стран. Решить её удалось в **1736** г. известному швейцарскому математику **Леонарду Эйлеру**. Причем Эйлер не только решил эту задачу, но и сумел найти общий метод решения аналогичных задач.

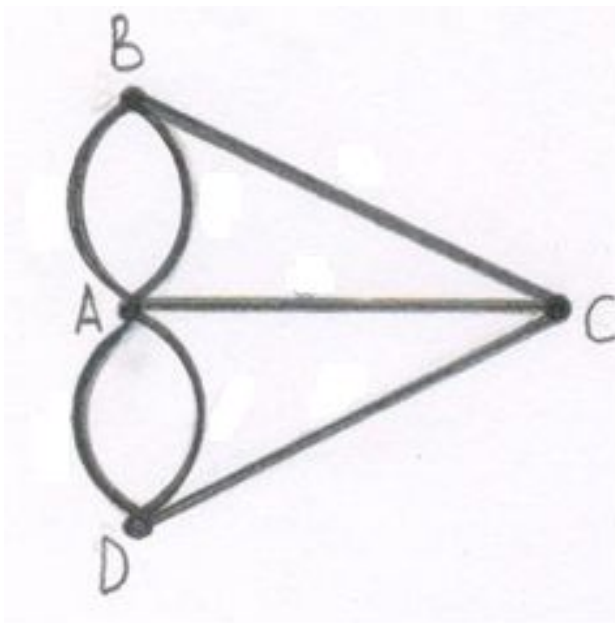


Решая задачу о семи мостах, Эйлер поступил следующим образом. Он изобразил точками B и C берега реки, точками A и D острова, а линиями мосты.

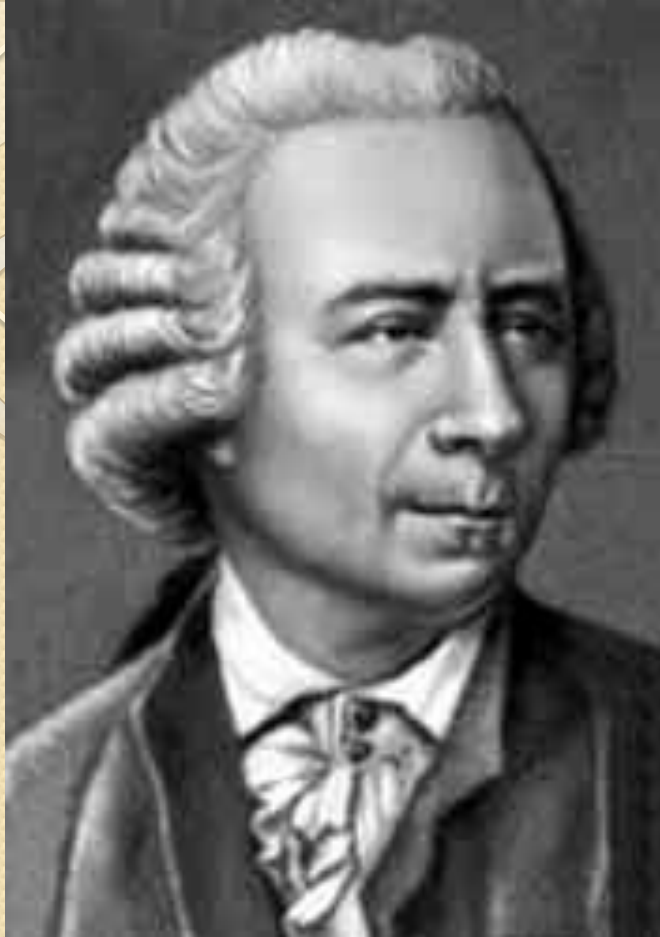


Такую фигуру называют *графом*, точки A, B, C, D называют *вершинами графа*, а отрезки кривых, соединяющие вершины, - *дугами (ребрами) графа*.

Эйлер подсчитал число дуг, исходящих из каждой вершины графа.



Из вершины B , C и D исходит по три дуги, а из вершины A – пять дуг. Вершины графа, из которых исходит нечетное число дуг, он назвал *нечетными* вершинами, а вершины, из которых исходит четное число дуг, – *четными*. Все вершины данного графа оказались нечетными.



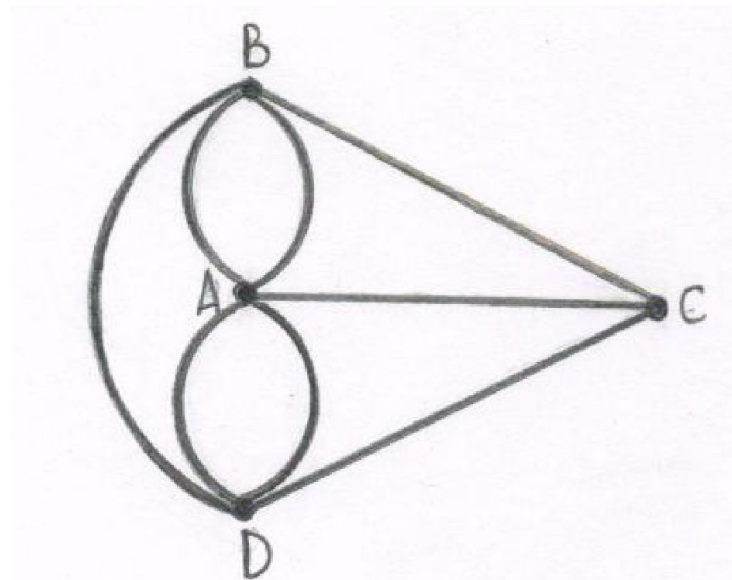
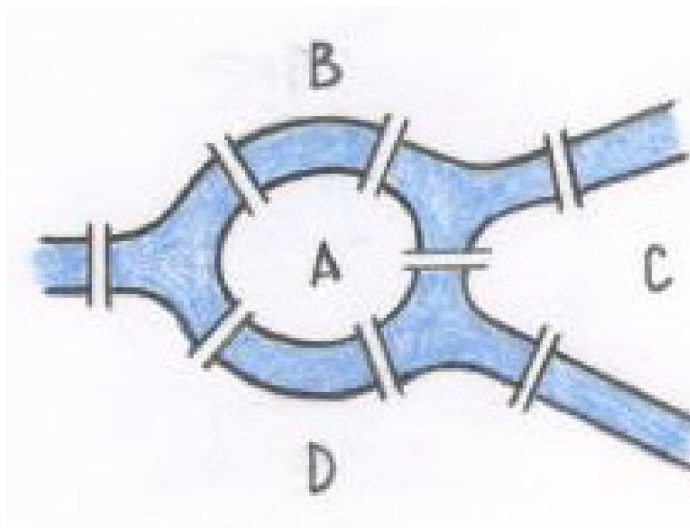
**Леонард Эйлер
(1707-1783 гг.)**

Свойства графа:

1. Число нечетных вершин графа всегда четно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечетное число нечетных вершин.
2. Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком начертить граф, при этом движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.
3. Граф только с двумя нечетными вершинами можно начертить одним росчерком, при этом движение нужно начать с одной из нечетных вершин и закончить в другой.
4. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

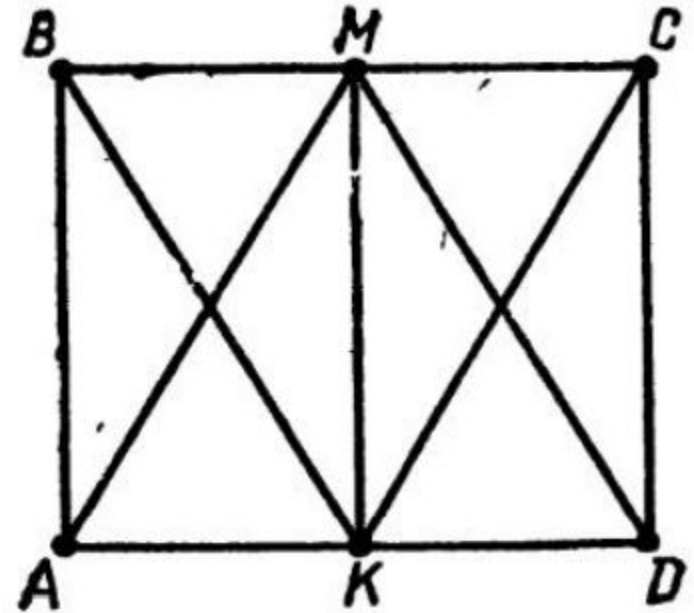
Поскольку число нечетных вершин графа, соответствующего задаче о семи мостах, оказалось равным четырем, то такой граф нельзя изобразить одним росчерком, а следовательно, невозможно пройти по всем семи мостам, побывав на каждом из них по одному разу, и вернуться в начало пути.

Достаточно было построить еще один мост через Преголю, например соединяющий участки В и D, и задача обхода одним маршрутом восьми мостов, каждого по одному разу, становится разрешимой.

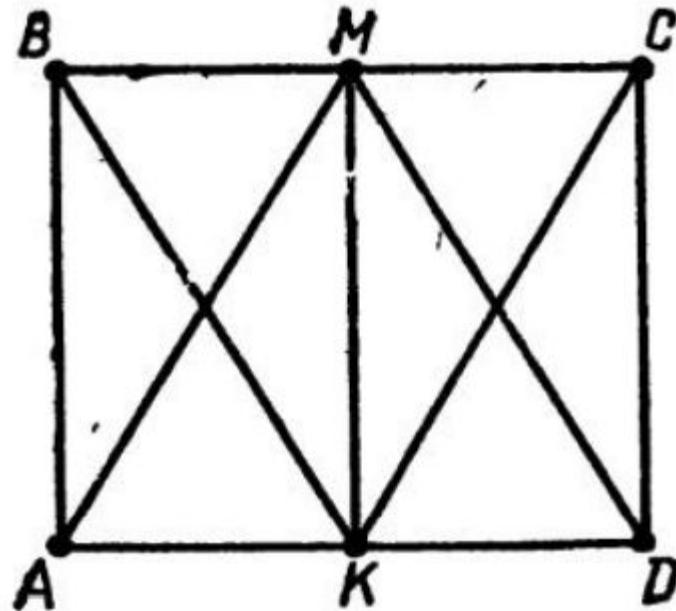


Задача I

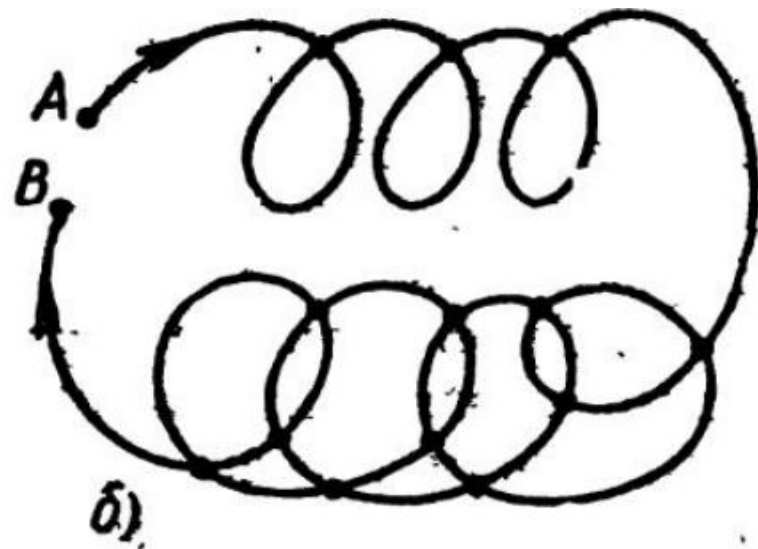
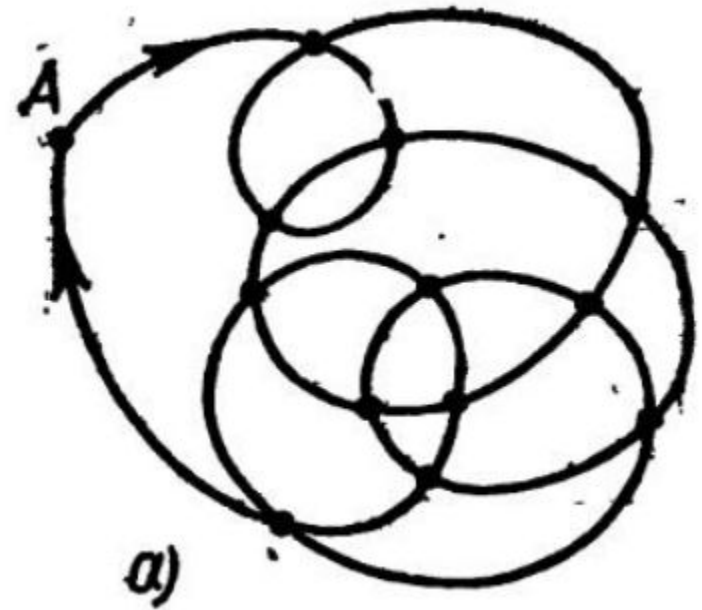
Можно ли привязать к гвоздям A, B, C, D, K, M веревку так, как показано на рисунке, не разрезая ее на части и не сдвигая?



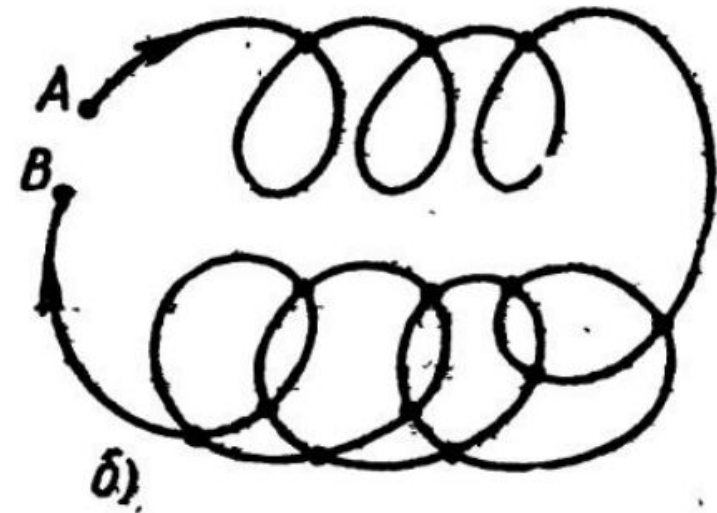
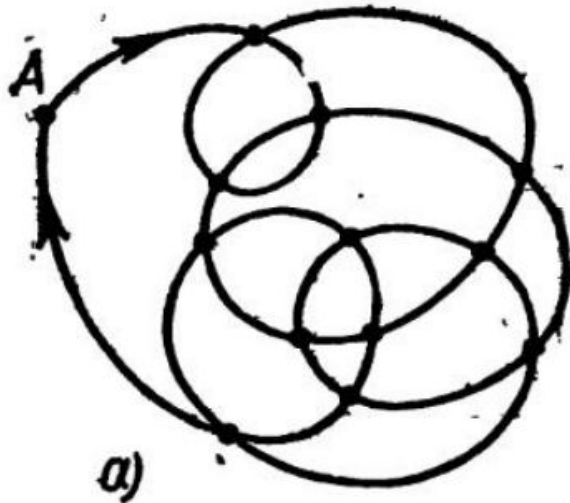
Из рисунка видно, что из вершин A , B , C и D исходят по три ребра, а из вершин M и K – по пять. Получили, что все шесть вершин нечетны. Согласно свойству 4, найденному Эйлером, привязать веревку так, как требуется в условии задачи, невозможно.



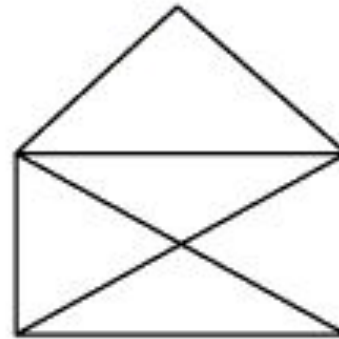
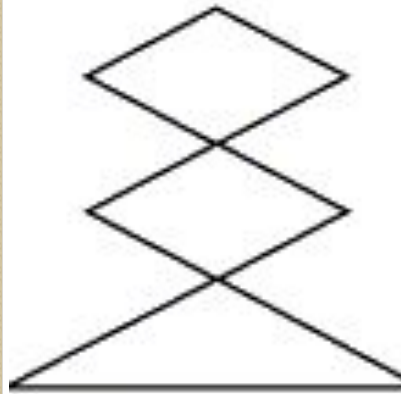
Начертим теперь без отрыва карандаша от бумаги любую самопересекающуюся кривую так, чтобы в одном случае росчерк закончить в той же точке, с которой начали (рис. а), а в другом — в точке, отличной от начальной (рис. б). У нас получился граф, если точки самопересечения линии, а также ее начало и конец считать вершинами.



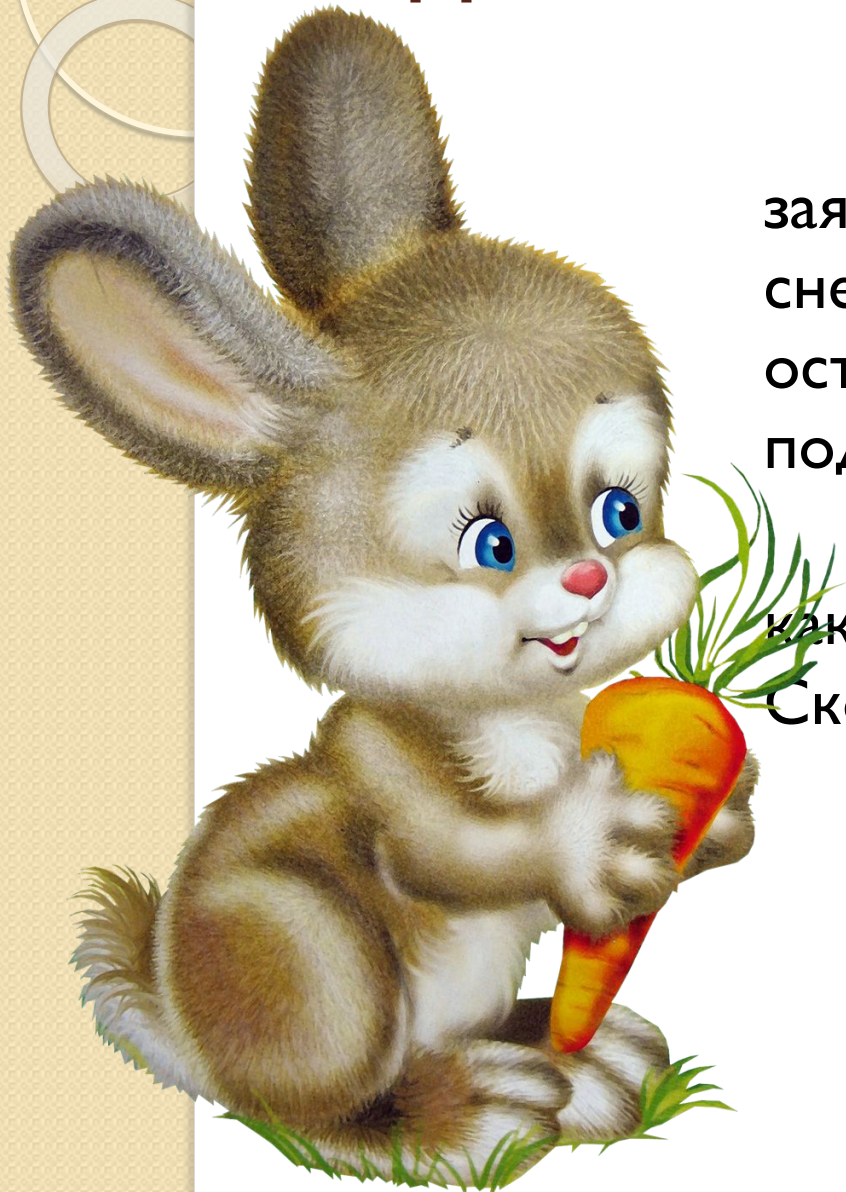
Подсчитаем теперь число дуг, исходящих из этих вершин. Мы видим, что из любой вершины графа на рисунке а исходит четное число дуг и из любой вершины графа на рисунке б, кроме вершин А и В, исходит также четное число дуг.



Фигура (граф), которую можно начертить одним росчерком (без отрыва карандаша от бумаги и без повторения движения по каждой из дуг), называется *уникурсальной фигурой*.



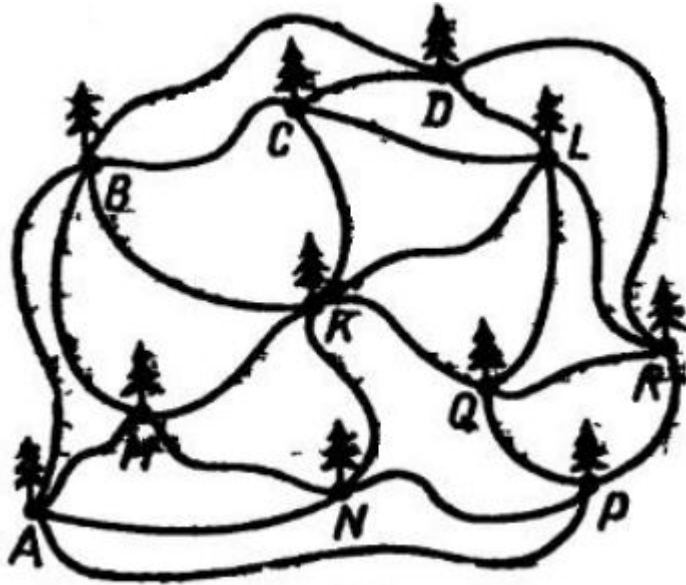
Задача 2



В небольшой роще находится заяц. Выскочив из норы и бегая по снегу от дерева к дереву, он оставил следы и, наконец, спрятался под одним из этих деревьев.

Где сейчас находится заяц? Под каким деревом находится его нора? Сколько решений имеет задача?

Будем считать каждое дерево вершиной графа, а путь зайца от дерева к дереву – ребром графа.



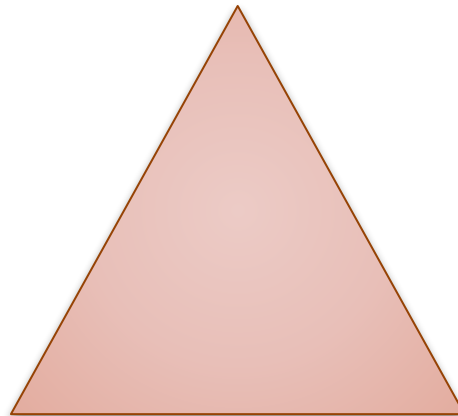
Нетрудно обнаружить, что все вершины этого графа (кроме вершин *B* и *L*) четные. Значит, либо заяц находится под деревом, обозначенным буквой *L*, а его нора под деревом, обозначенным буквой *B*, либо наоборот.

Если бы оказалось, что данный граф имеет только четные вершины, то задача имела бы столько решений, сколько вершин, причем заяц обязательно оказался бы в своей норе.

Задачи и упражнения

1. У какой уникарсальной фигуры начальная и конечная точки совпадают? Начертите одну такую фигуру.

У фигуры, у которой все вершины четные. Например, треугольник.

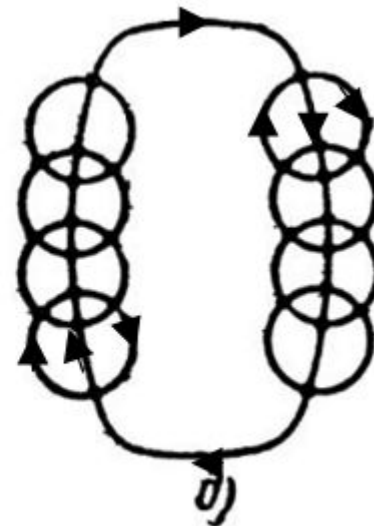
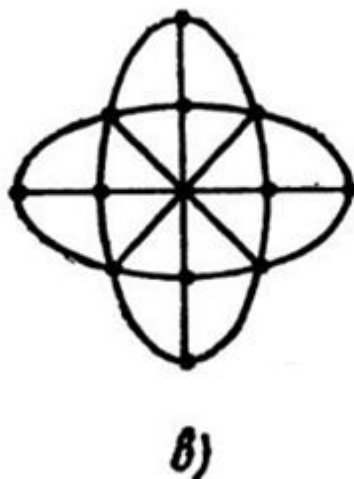
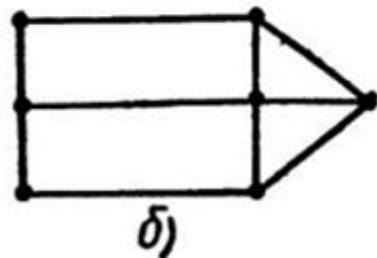
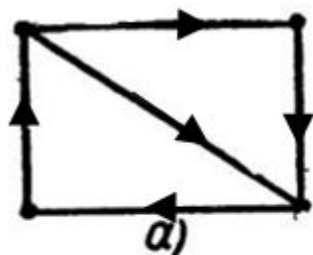


2. У какой уникарсальной фигуры начальная и конечная точки не совпадают? Начертите одну такую фигуру.

У фигуры, у которой только две нечетные вершины.



3. Какие из фигур, изображенных на рисунке, являются уникальными? Изобразите стрелками один из вариантов обхода каждой из уникальных

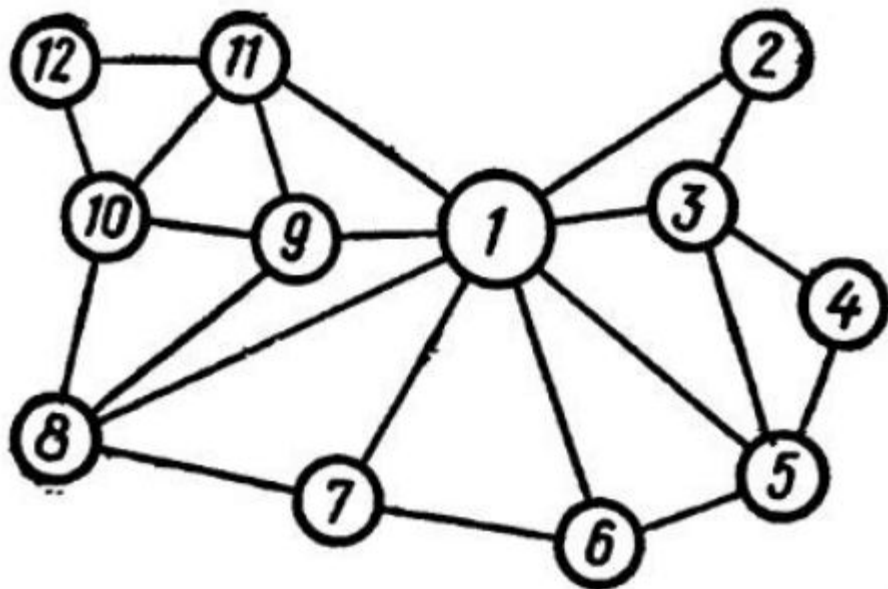


Т.е. уникальными являются фигуры под буквами а, г и д.

**4. Какие буквы русского алфавита
уникурсальны?**

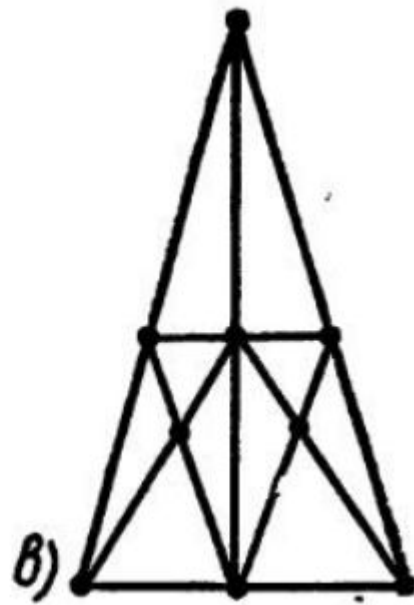
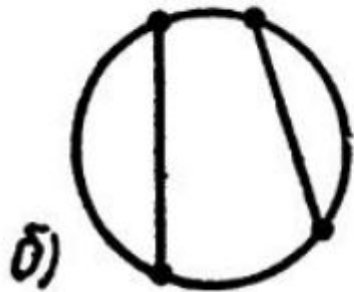
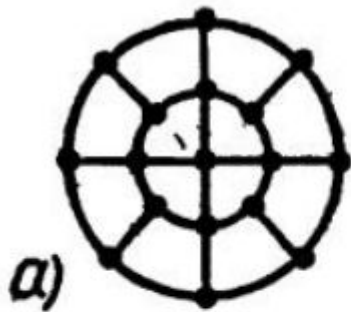
**Б, Г, З, И, Л, М, О,
П, Р, С, Я**

5. Однажды пионеры попросили пионервожатую организовать экскурсию в большой городской парк. Пионервожатая, показав ребятам план парка, предложила им решить следующую задачу: «Найдите тот перекресток, откуда можно пройти по всем дорожкам только по одному разу». Решите и вы эту задачу.



Нетрудно обнаружить, что все вершины этого графа (кроме вершин 6 и 7) четные. Значит, начать экскурсию следует с перекрестка под номером 6 и закончить на перекрестке под номером 7 либо наоборот.

6. Каково наименьшее число росчерков, которыми можно начертить каждую из данных на



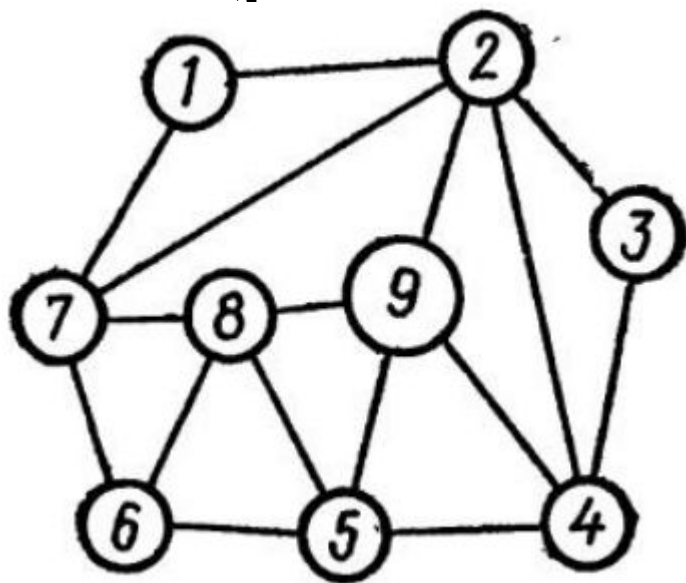
Наименьшее число росчерков равно половине числа нечетных вершин.

а) $12:2=6$

б) $4:2=2$

в) $5:2=2,5$ (2 или 3; наименьшее 2)

7. Водитель снегоочистительной машины заметил, что если по каждой улице города он проедет только по одному разу, то закончит поездку на том перекрестке, где находится гараж. На рисунке дана схема улиц города. Найдите, с какого перекрестка должен начать водитель работу и на каком перекрестке тогда находится гараж? Сколько решений имеет



Нетрудно обнаружить, что все вершины этого графа (кроме вершин 2 и 6) четные. Значит, начать следует с перекрестка под номером 2 и тогда гараж находится на перекрестке под номером 6, либо наоборот. Т.о. задача имеет два решения.