Вероятность и геометрия

Классическая вероятностная схема

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого опыта следует:

1) *найти число N всех возможных исходов данного опыта;*

2) *найти количество $N(A)$ тех исходов опыта, в которых наступает событие A;*

3) *найти частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.*

использовать эту схему можно только в тех случаях, когда все исходы некоторого опыта (испытания) *равновозможны* между собой.

Однако весьма часто встречаются испытания и с *бесконечным* числом исходов. К ним классическая вероятностная схема неприменима, и приходится действовать по-другому. Начнем с примеров.

Пример 1. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 5| \leqslant 5$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 1| \leqslant 1$?

Решение. Сначала решим каждое из неравенств. Вспомним геометрический смысл модуля разности двух чисел a и b: $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b на числовой прямой. Поэтому неравенство $|x - 1| \leqslant 1$ означает, что расстояние между точками x и 1 не больше 1. Значит, $[0; 2]$ — решение неравенства. Отметим этот отрезок длины 2 штриховкой (рис. 99).

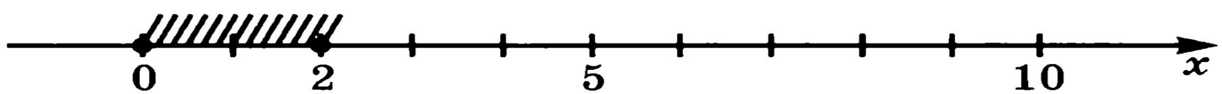

Рис. 99

В свою очередь, неравенство $|x - 5| \leqslant 5$ означает, что расстояние между точками x и 5 не больше 5. Значит, $[0; 10]$ — решение неравенства. Отметим этот отрезок длиной 10 другой штриховкой (рис. 100).

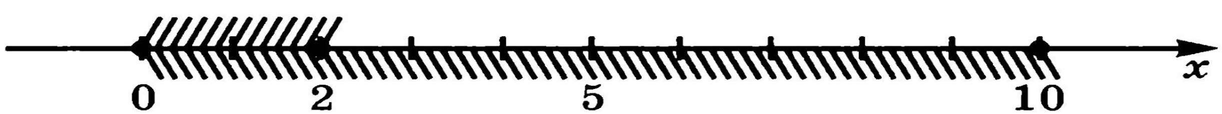

Рис. 100

Мы видим, что из всех решений неравенства $|x - 5| \leqslant 5$ только *одну пятую часть* составляют решения неравенства $|x - 1| \leqslant 1$. В таком случае искомую вероятность по определению принимают равной $\frac{1}{5}$, или 0,2. ■

Пример 2. Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$. Какова вероятность того, что эта точка будет ближе к центру монитора, чем к вершине C?

Решение. Пусть a — длина стороны монитора. Площадь S монитора равна a^2. Соединим отрезком вершину C с центром O монитора. К этому отрезку построим серединный перпендикуляр m. Его точки равноудалены от точек C и O. Точки, лежащие выше m, находятся ближе к C, чем к центру O. Пусть $K = m \cap BC$, $L = m \cap CD$ и $M = m \cap OC$. Тогда $\triangle KCL$ состоит из всех точек, которые удалены от C на такое же или меньшее расстояние, чем от центра монитора (рис. 101).

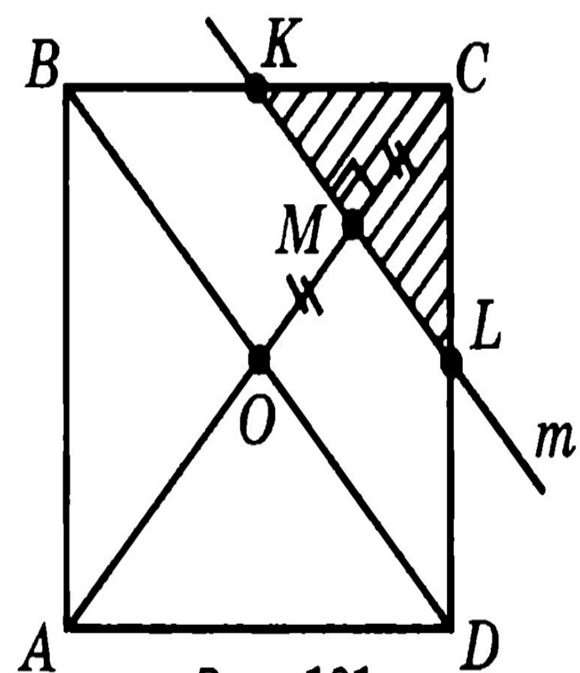

Рис. 101

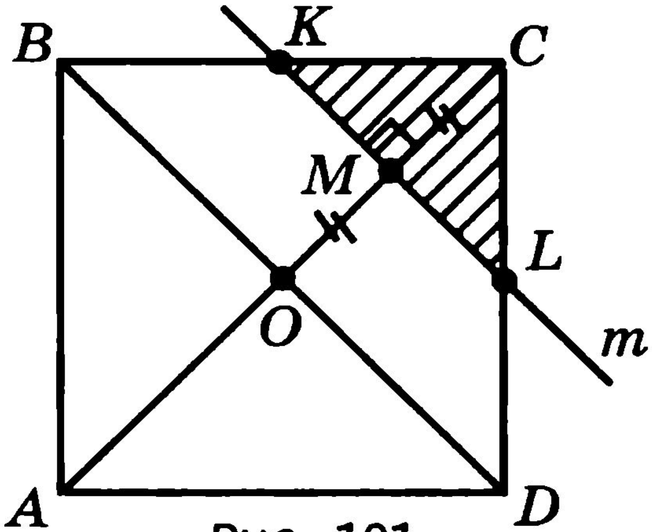

Рис. 101

Имеем: $MC = 0,5OC = 0,25AC = 0,25\,a\sqrt{2}$; $S_{KCL} = 2S_{KMC} = 2 \cdot 0,5MC^2 = MC^2 = 0,25^2 \cdot 2a^2 = 0,125a^2$. Значит, вероятность выбора точки из ΔKCL равна $\dfrac{S_{KCL}}{S} = 0,125$.

По условию нам следует найти вероятность события, противоположного к попаданию точки в треугольник KCL. Получим $1 - 0,125 = 0,875$.

Ответ: 0,875.

Сформулируем общее правило для нахождения *геометрических вероятностей.*

Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A:

$$P = \frac{S(A)}{S(X)}.$$

Пример 3. Отрезок единичной длины случайным образом разрезают на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно сложить треугольник?

Первый этап. *Построение модели.*

Пронумеруем отрезки слева направо и обозначим их длины соответственно x, y и z. Так как $x + y + z = 1$, то $z = 1 - x - y > 0$. Значит, $x > 0$, $y > 0$ и при этом $x + y < 1$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трех неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + y < 1 \text{ (рис. 102).} \end{cases}$$

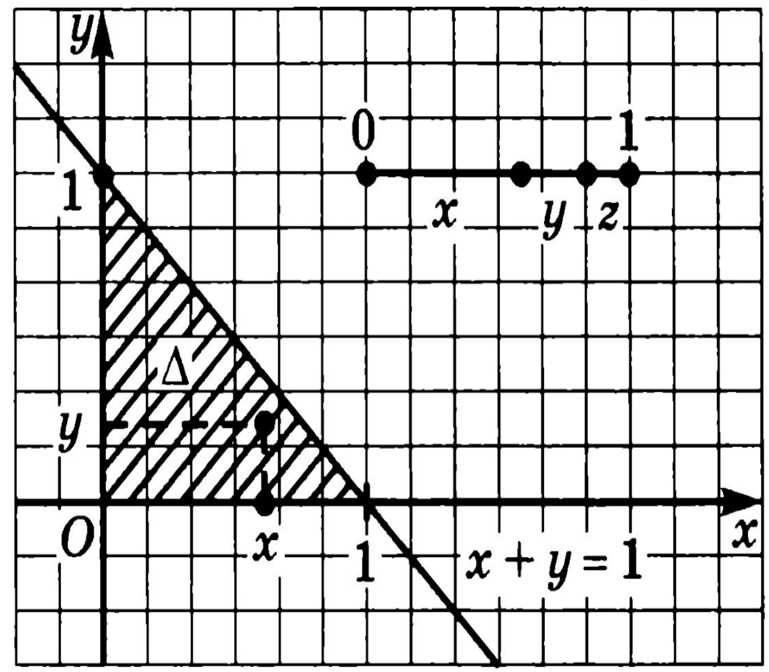

Рис. 102

Второй этап. *Работа с моделью.*

Из трех отрезков длины x, y и z можно составить треугольник, только если выполняются три неравенства треугольника:

$$\begin{cases} x + y > z, \\ x + z > y, \\ y + z > x; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y > 1 - x - y, \\ x + 1 - x - y > y, \\ y + 1 - x - y > x; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y > 0{,}5, \\ y < 0{,}5, \\ x < 0{,}5. \end{cases}$$

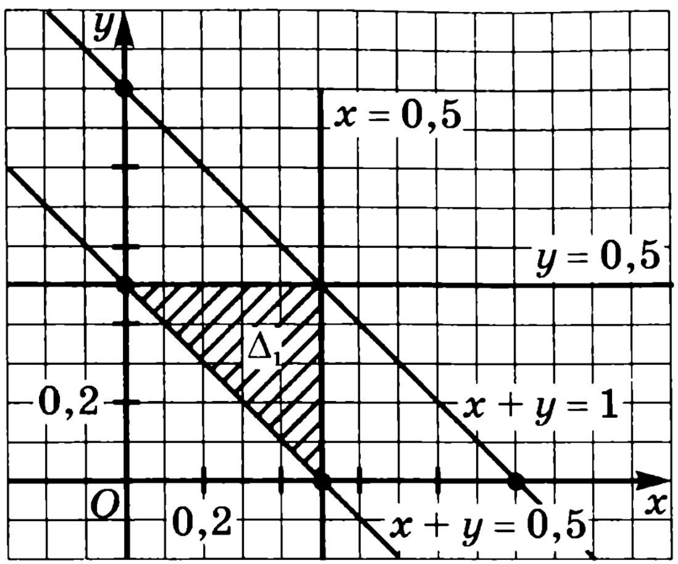

Рис. 103

Получается треугольник Δ_1 с вершинами (0,5; 0), (0; 0,5), (0,5; 0,5) (рис. 103). Он подобен треугольнику Δ с коэффициентом подобия 0,5. Значит, его площадь составляет четверть площади треугольника Δ. Поэтому при случайном выборе точки из треугольника Δ вероятность того, что она окажется в меньшем треугольнике Δ_1, равна $\frac{S_{\Delta_1}}{S_\Delta} = \frac{1}{4}$.

Ответ: 0,25.

Рассмотрим еще один пример, связанный с предварительным построением геометрической модели исходной ситуации.

Пример 4. Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?

<u>Первый этап.</u> *Построение модели.*

Так как размеры треугольника не важны, можно работать только с углами. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то переформулируем задачу следующим образом: «Число 180 случайным образом представили в виде суммы трех положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90?»

Отличие от предыдущего примера состоит в том, что слагаемые не упорядочены. Неясно, какой из углов первый, какой второй, а какой третий. Разберемся сначала с треугольниками, у которых нет двух равных углов.

Пусть $0 < x < y < z$ и $x + y + z = 180$, т. е. $z = 180 - x - y$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трех неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x, \\ x < y, \\ y < 180 - x - y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x, \\ x < y, \\ x + 2y < 180. \end{cases}$$

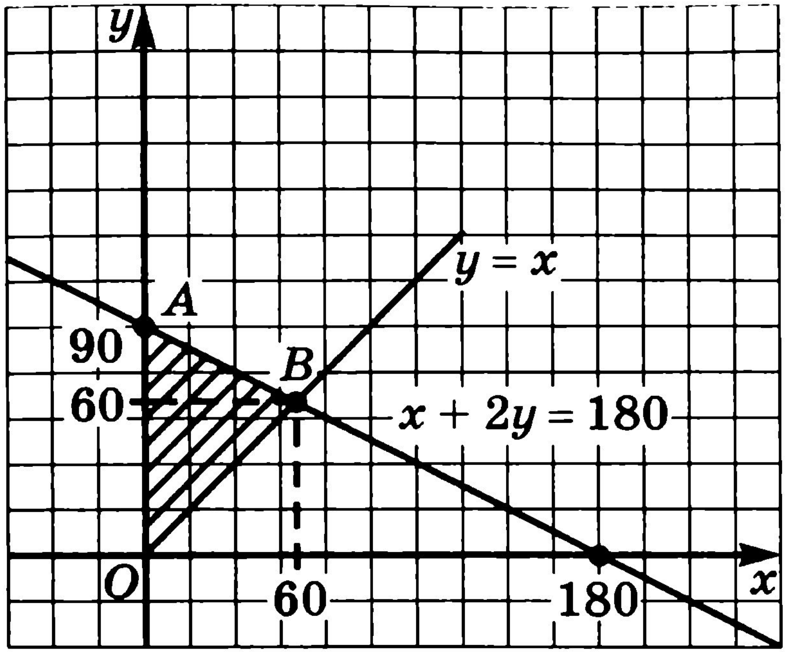

Рис. 104

Получим треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; 90)$, $B(60; 60)$ без учета его сторон (рис. 104). Каждая его точка $(x; y)$ однозначно «отвечает» за треугольник с углами x, y, $180 - x - y$ градусов. Итак, вместо разбиений числа 180 на три слагаемых мы будем рассматривать точки треугольника OAB. В этом и состоит построенная геометрическая модель. Заметим, что от добавления стороны, соединяющей вершины $(0; 0)$ и $(60; 60)$, площадь не изменится. Значит, можно считать, что случай $x = y$ также учтен в нашей модели. Аналогично обстоит дело и со случаем $y = z$, т. е. со стороной, соединяющей вершины $(0; 90)$ и $(60; 60)$.

После построения модели мы имеем дело с корректно поставленной математической задачей.

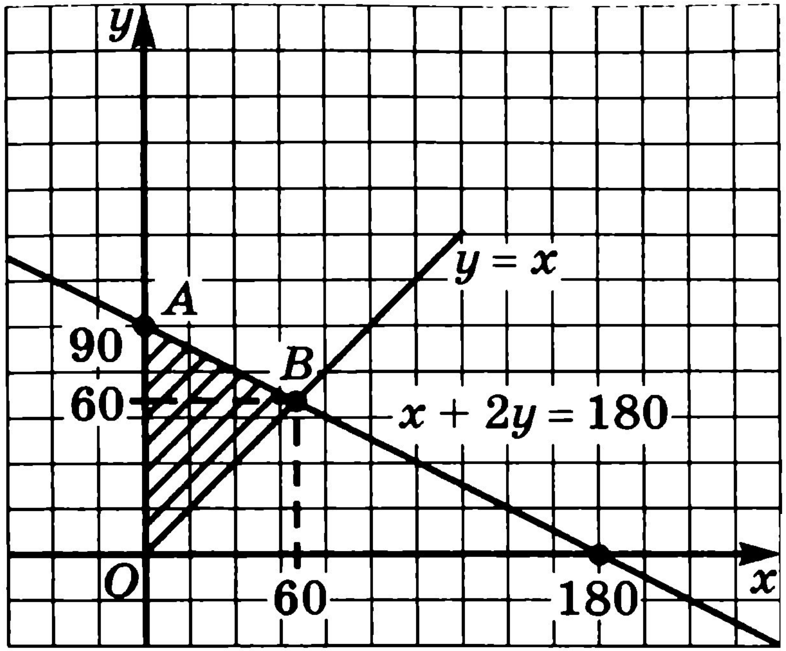

Рис. 104

<u>Второй этап.</u> *Работа с моделью.*

Отметим в нашей модели точки, соответствующие остроугольным треугольникам. Для этого следует решить систему неравенств:

$$\begin{cases} x < y < 90, \\ y < 180 - x - y < 90; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < y < 90, \\ x + 2y < 180, \\ x + y > 90. \end{cases}$$

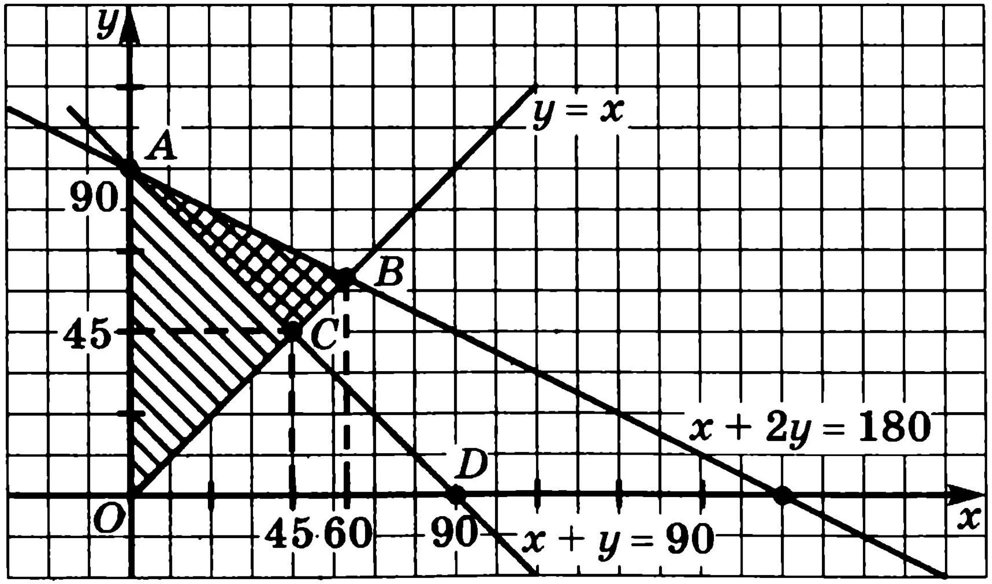

Рис. 105

Получается треугольник с вершинами $A(0;\ 90)$, $B(60;\ 60)$, $C(45;\ 45)$ (рис. 105). Так как OC — биссектриса равнобедренного треугольника AOD, то OC — и высота треугольника. Значит, $AC \perp OB$.

Поэтому $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \dfrac{0{,}5 \cdot AC \cdot BC}{0{,}5 \cdot AC \cdot OB} = \dfrac{BC}{OB}$.

Спроектируем точки B и C на ось абсцисс. По теореме Фалеса $\dfrac{BC}{OB} = \dfrac{60 - 45}{60} = \dfrac{15}{60} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

Пример 5. Два шпиона решили встретиться у фонтана. Каждый из них может гарантировать только то, что он появится у фонтана с 12-00 до 13-00. По инструкции шпион после прихода ждет встречи у фонтана 15 минут и по их истечении (или ровно в 13-00) уходит. Какова вероятность встречи?

Независимые повторения испытаний с двумя исходами

Например, игральный кубик бросили десять раз подряд. Какова вероятность того, что «четверка» выпадет ровно три раза? Или же, какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты «орел» выпадет ровно четыре раза? Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную схему, ее принято называть *схемой Бернулли.*

Схема Бернулли

Рассматривают n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами: «успехом» и «неудачей». Вероятность «успеха» равна p, а вероятность «неудачи» равна q, $p + q = 1$. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что в этих n повторениях произойдет ровно k «успехов».

Про n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами более кратко говорят, как об n *испытаниях Бернулли.* Точный ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1 (теорема Бернулли). ***Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Пример 1. Каждый из четырех приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачету. На зачете они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

а) каждому достался тот вопрос, который он выучил;

Решение. Если кому-то достался известный ему вопрос, то это «успех». Вероятность «успеха» у каждого из приятелей, готовившихся к зачету, одна и та же: она равна $\frac{5}{20} = 0{,}25$. Поэтому

можно считать, что мы имеем дело с $n = 4$ испытаниями Бернулли с вероятностью «успеха» в отдельном испытании $p = 0{,}25$.

а) В этом случае $k = n = 4$ и поэтому

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0{,}25^4 \approx 0{,}004.$$

Пример 1. Каждый из четырех приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачету. На зачете они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

б) никому не достался вопрос, который он выучил;

Решение:

б) В этом случае $k = 0$ и поэтому

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^{4-0} = 0{,}75^4 \approx 0{,}316.$$

Пример 1. Каждый из четырех приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачету. На зачете они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

в) только одному из приятелей достался тот вопрос, который он не выучил;

Решение:

в) Здесь $k = 3$ и поэтому

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = 4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}047.$$

Пример 1. Каждый из четырех приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачету. На зачете они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

г) хотя бы одному из приятелей достался тот вопрос, который он выучил.

Решение:

г) Событие, противоположное заданному, состоит в том, что никому из приятелей не достался известный ему вопрос, т. е. что произошло $k = 0$ «успехов». Вероятность такой общей неудачи уже посчитана в пункте б). Значит, нужная нам вероятность равна $1 - P_4(0) = 1 - 0{,}75^2 \approx 0{,}684$. ■