Геометрические задачи.

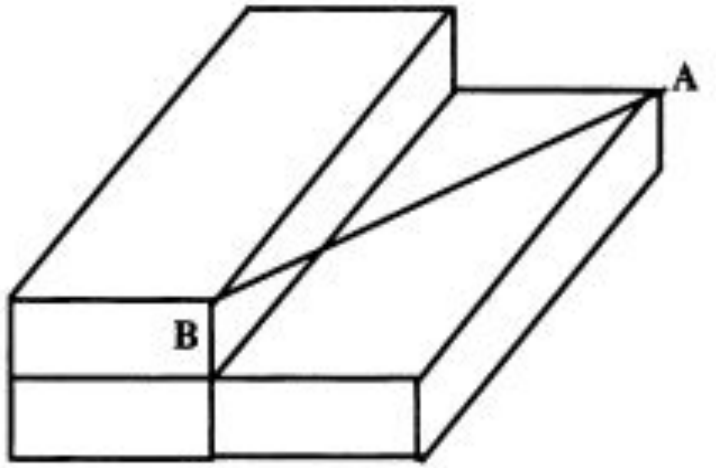
Подготовила учитель математики

МБОУ ООШ № 15 Хрыкина А.В.

Приведем примеры задач, которые не требуют расчетов.

- **Пример 1.** ***Доказать, что никакая фигура не может иметь ровно***
- ***два центра симметрии.***
- *Решение.* Доказательство основывается на том факте, что точка,
- симметричная одному центру симметрии относительно другого,
- также является центром симметрии.
- **Пример 2.** ***Разрезать произвольный треугольник на три части, из***
- ***которых можно составить прямоугольник.***
- *Решение.* Для решения задачи необходимо разрезать треугольник
- по средней линии, а отрезанный треугольник еще и по высоте.
- Сложение получившихся частей в прямоугольник не составляет труда.
- *Следующая задача встречается у И. Ф. Шарыгина.*

Пример 3. Имеется несколько кирпичей. Необходимо, не используя теорему Пифагора, при помощи линейки определить длину наибольшей диагонали кирпича.



Решение. Решение задачи представлено на рисунке. Необходимо сложить три кирпича и измерить расстояние между точками A

и B. Это диагональ несуществующего кирпича.

Неравенство треугольника

Теорема 1.
Для любых трех точек A, B и C на плоскости AC > |AB - BC|.
Примечание. Сформулировав теорему, дадим ее очевидное геометрическое истолкование: длина любой стороны треугольника не меньше модуля разности длин двух других сторон.

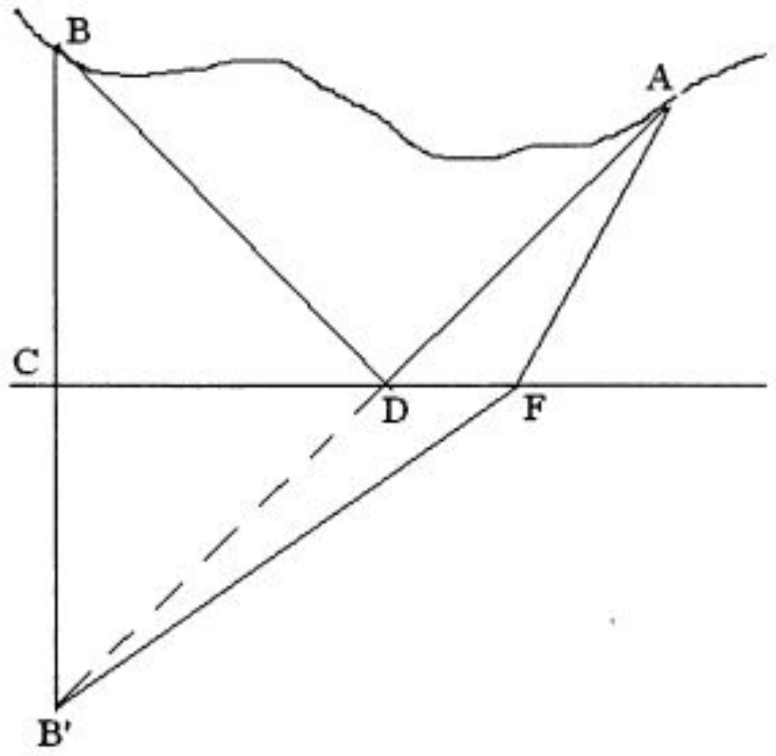
Теорема 2. Длина любой стороны треугольника не превосходит его полупериметра.
Примечание. Один из самых распространенных способов доказательства геометрических неравенств состоит в том, что применяется неравенство треугольника, возможно, с использованием некоторых дополнительных соображений.

Пример 4. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,7, длина стороны AB — 0,5. Известно, что длина BC — целое число. Какова эта длина?
Решение. По теореме 1 3,7 > |0,5 — BC|, однако BC — число натуральное, поэтому 3,7 > BC — 0,5, откуда BC < 4,2. Далее ясно, что BC = 4. Подумайте, почему BC не может равняться трем.

Неравенство треугольника
и геометрические преобразования

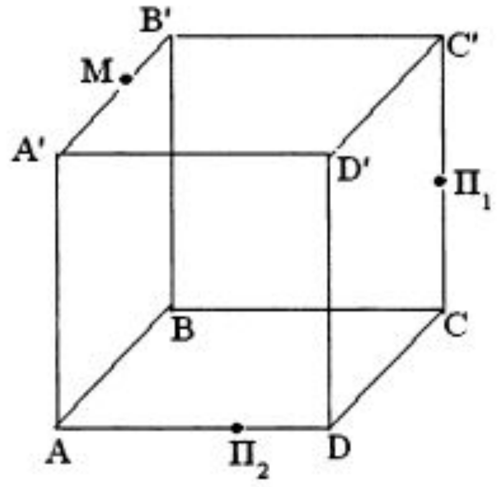
Пример 5. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему необходимо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, где у него собранные грибы заберет сын, приехавший на машине; а далее зайти в лес в другой точке, в которой ожидает его жена. Как ему это сделать, пройдя по самому короткому п

Решение.

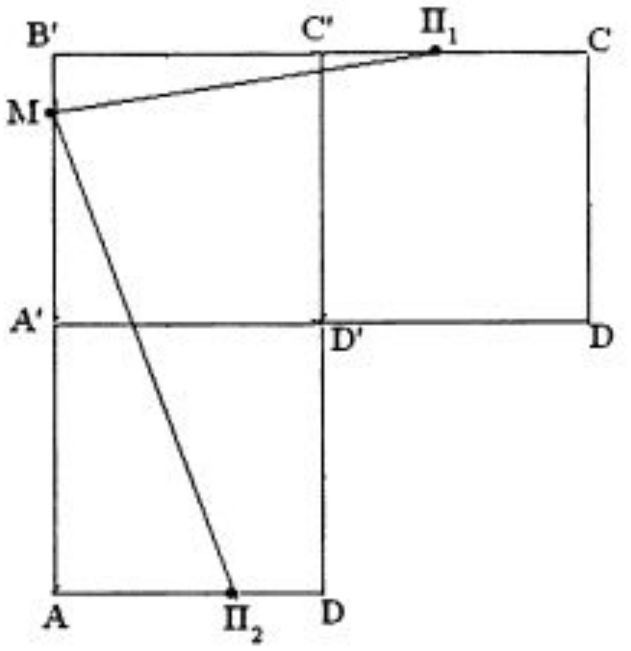


Пусть грибник выходит из леса в точке A, а должен зайти в лес в точке B. Для решения задачи симметрично прямой — шоссе отобразим
точку B, получив точку B1. Далее, проведя прямую AB1, получим точку
D, которая и является искомой в задаче точкой. BD = B'D, BC = B'C,
тогда ясно, что для любой другой точки F AF + FB' > AD + DB'.
Расстояние AD + BD является наименьшим для выхода на шоссе из
леса и захода в лес в заданной точке (D).

Пример 6. На внутренней поверхности стеклянного куба сидят
сонная муха М и два паука П, и П2. Пауки, которые могут перемещаться только по внутренним поверхностям граней,
одновременно начинают бежать к мухе. Какой из пауков быстрее ее достигнет,
если расстояния СП, = - я, МВ' = - а\ Dn2 = - я, где а - длина
ребра куба.



Решение. Нарисуем необходимую нам для решения часть развертки куба:



$$МП_1 = \sqrt{(MB')^2 + (B'C' + C'П_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{4}}a = \frac{\sqrt{13}}{4}a;$$

$$МП_2 = \sqrt{(AП_2)^2 + (AA' + A'M)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{49}{16}}a = \frac{\sqrt{505}}{12}a.$$

$$\frac{\sqrt{505}}{12} > \frac{\sqrt{13}}{4}$$

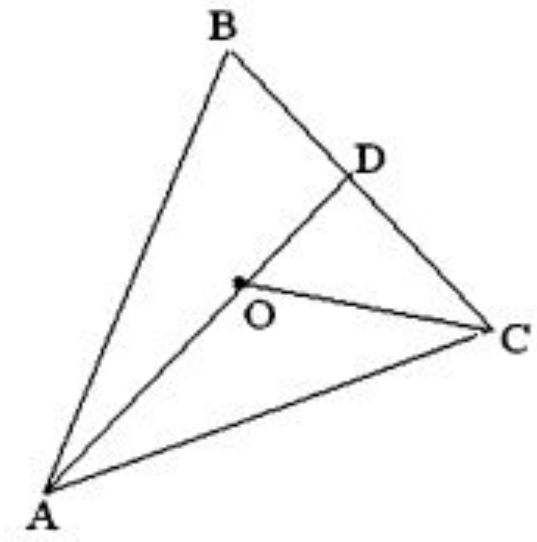
$$\frac{\sqrt{505}}{12} > \frac{\sqrt{117}}{12}$$

При одинаковой скорости движения паук П1 добежит до мухи М быстрее, чем паук П2.

Дополнительные построения

Пример 7. Точка O лежит внутри треугольника ABC. Доказать, что AO + OC < AB + BC.

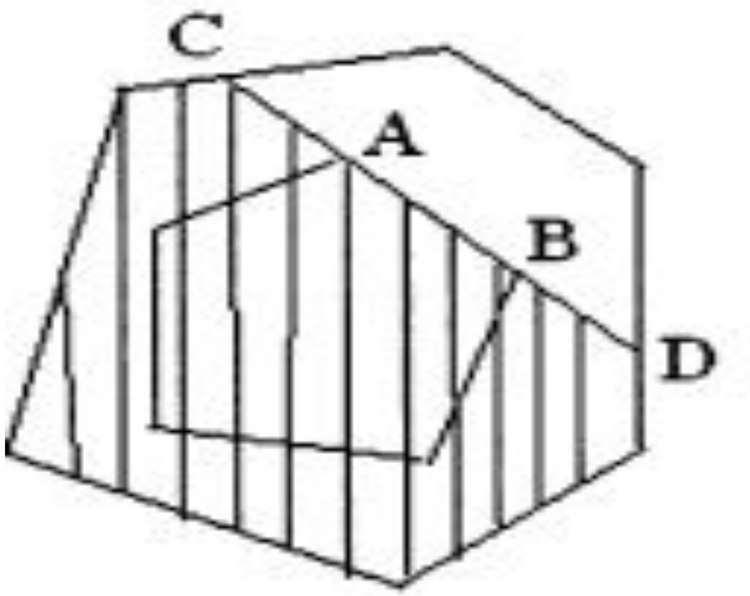
Доказательсто.



Продолжим отрезок AO до пересечения со стороной треугольника D.
Далее сложим неравенства треугольника
AB + BD > AO + OD и

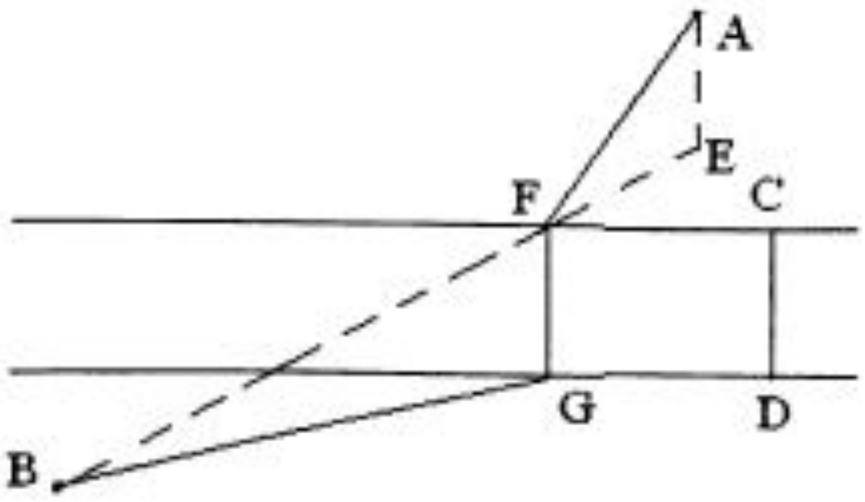
OD + DO> OC,
получим AB + BD + OD + DO >AO + OD + OC и,
сократив на OD обе части неравенства,
получим искомое
AO + OC < AB + BC, поскольку BD + DC = BC.

Пример 8. Выпуклый многоугольник МГ лежит внутри выпуклого многоугольника М. Доказать, что периметр М' не больше периметра М.
Доказательство.



Проведем прямую через сторону АВ многоугольника М1, которая пересекает контур многоугольника М в точках С и D. Тогда по неравенству треугольника очевидно, что периметр того куска многоугольника (из двух, на которые рассекла его прямая АВ), который содержит М1, не больше, чем периметр М.

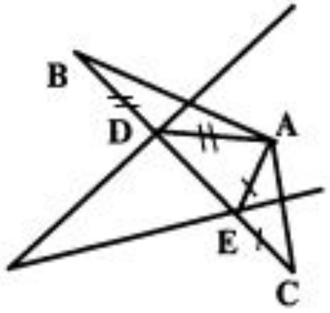
Пример 8. Две деревни A и B разделены рекой. В каком месте нужно построить мост, чтобы путь от одной деревни до другой был наименьшим?
Решение. Решение задачи показано на рисунке.



Возьмем ширину реки CD, отложим от точки A отрезок AE, параллельный и равный CD, далее соединим точки B и E, и получим точку F. Осталось доказать , что расстояние AF + FG + GB будет минимальным расстоянием между деревнями A и B . После решения задачи ясно, что FG - единственный вариант построения моста.

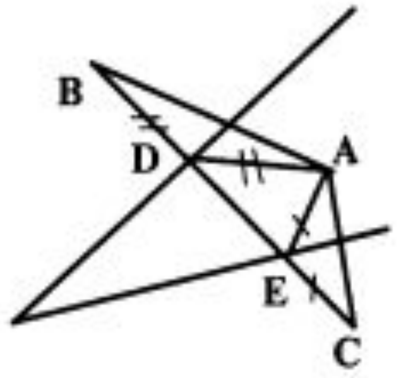
Упражнения для тренировки.

1. От Кисловодска до Ставрополя 230 км, от Кисловодска до Минеральных Вод 55 км, от Минеральных Вод до Невинномысска 125 км, а от Невинномысска до Ставрополя 50 км.
Каково расстояние от Ставрополя до города Минеральные Воды?
2. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей больше его полупериметра и меньше периметра.
3. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике сумма длин диагоналей больше периметра и меньше удвоенного периметра.
4. Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Доказать, что расстояние между ними не превосходит полупериметра треугольника.
5. Точку A, лежащую внутри острого угла, отразили симметрично относительно сторон угла. Полученные точки B и C соединили и точки пересечения отрезка BC со сторонами угла DE (см. рис.) Доказать, что $\frac{BC}{2} > DE.$



Ответы и комментарии:

1. Сумма расстояний от Кисловодска до Минеральных Вод, от Минеральных Вод до Невинномысска и от Невинномысска до Ставрополя равна расстоянию от Ставрополя до Кисловодска. Делаем вывод, что все города находятся на одной трассе (прямой).
2. Пусть диагонали пересекаются в точке О. Требуемые неравенства легко выводятся из неравенств треугольника для треугольников OAB, OBC, OCD, ODA и для треугольников ABC, BCD, CDA и DAB.
3. Решение аналогично решению примера 10.
4. Продолжите отрезок, соединяющий эти точки в обе стороны до пересечения с контуром треугольника.
5. Воспользуйтесь тем, что AD = BD, AE = EC, и неравенством AD + AE > DE.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной презентации при
рассмотрении геометрических задач мы ограничились только неравенством треугольника и сознательно не рассматривали расчетные задачи. Ведь мы только начинаем подготовку к решению олимпиадных задач. По большому счету, эта презентация предназначена для учеников
5—7 классов, хотя она может оказаться полезной и для школьников возрастом постарше.

Литература для подготовки.

1. Барр, Ст. Россыпи головоломок / Ст. Барр. — М.: Мир, 1978. — 234 с.
2. Бугаенко, В. О. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике / В. О. Бугаенко. - М. : Дом НТТМ, 1993. - 81 с.
3. Васильев, Н. Б. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. - М. : ГУПИ МП РСФСР, 1963. - 52 с.
4. Виленкин, Н. Я. Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. — М.: Наука, 1975.-88 с.
5. Гарднер, М. Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. - М.: Мир, 1978. - 438 с.
6. Гарднер, М. Математические досуги / М. Гарднер. — М.: Мир, 1972. ~412 с.
7. Гарднер, М. Математические новеллы / М. Гарднер. — М.: Мир, 1974. -426 с.
8. Генкин, С. А., Итенберг, И. В., Фомин, Д. В. Серия изданий Санкт-Петербургского городского дворца творчества юных «Математический кружок». — СПб.: Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных, 1992-1994.
9. Кордемский, Б. А. Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. - М.: ГИТТЛ, 1958. - 478 с.
10. Перельман, Я. И. Живая математика/Я. И. Перельман. — М.: Учпедгиз, 1953.- 121 с.
11. Перельман, Я. И. Занимательная алгебра /Я. И. Перельман. — М. : Наука, 1970.-200 с.
12. Фарков, А. В. Олимпиадные задачи по математике и методы их решения /А. В. Фарков. - М. : Народное образование, 2003.-112 с.
13. Фомин, Д. В. Задачи ленинградских математических олимпиад : методическое пособие / Д. В. Фомин. — Л. : Ленинградский городской институт усовершенствования учителей, 1990. - 80 с.
14. Сборники Московских математических олимпиад 1961—2004 гг.
15. Олимпиадные задачники «Библиотечки «Кванта»» 1975—1990 гг.