§9. Дифференциал функции

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$. Тогда справедливо равенство

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x),$$

где функция $\varepsilon(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Если обозначить $A = f'(x_0)$, то получим $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Пусть приращение Δy представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, где A – некоторое число. Тогда при $A \neq 0$ приращение Δy эквивалентно функции $A\Delta x$: $\Delta y \sim A\Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

Выражение $A\Delta x$ есть **главная часть приращения** Δy, при этом $A\Delta x$ линейно (пропорционально) зависит от Δx.

Определение 1. Если имеет место равенство

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где A – некоторое число, то функцию $y = f(x)$ называют ***дифференцируемой в точке*** x_0, а главную линейную часть ее приращения называют ***дифференциалом*** функции в точке x_0.

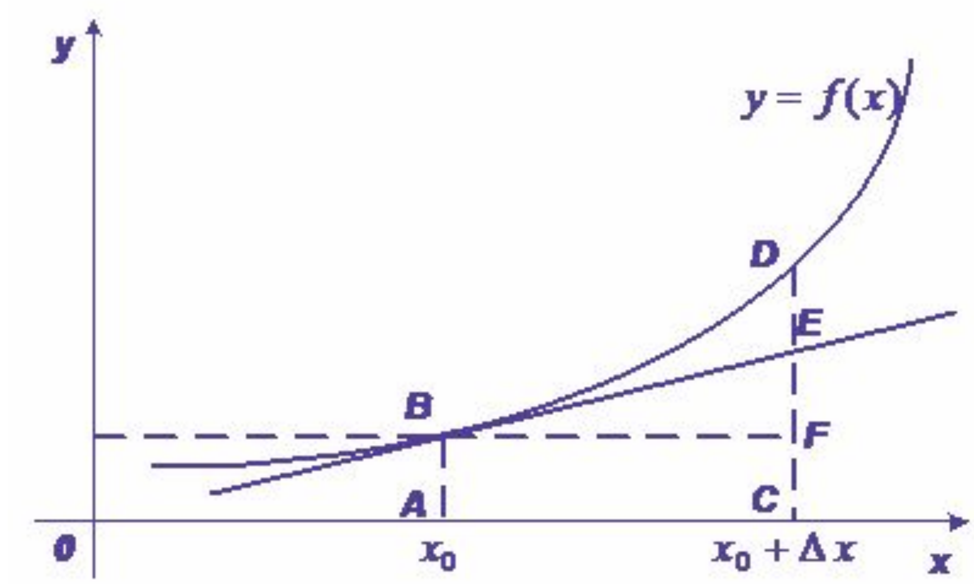
Обозначение: $dy = A\Delta x$ - дифференциал функции y.

Теорема 2. Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела производную $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была дифференцируемой в точке x_0.

Таким образом, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она имеет производную $f'(x_0)$ и дифференциал $dy = A\Delta x$ может быть записан в виде $dy = f'(x_0)\Delta x$. В частности, дифференциал функции $y = x$ равен $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Поэтому пишут $dy = f'(x_0)dx$.

Геометрический смысл дифференциала функции

Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$ в окрестности точки x_0. Точки B и D на графике функции имеют соответственно координаты $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



Исходя из геометрического смысла производной имеем: $f'(x_0) = tg\angle FBE$; но тогда $f'(x_0)\Delta x = dy$ есть длина отрезка EF.

Таким образом, с геометрической точки зрения ***дифференциал равен приращению ординаты касательной от точки*** x_0 ***до точки*** $x_0 + \Delta x$.

Применение дифференциала для приближенных вычислений

В равенстве $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$ функция $\varepsilon(\Delta x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, следовательно, можно говорить о приближенных равенствах: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, или $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Эта формула важна в задачах, когда известны значения функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ в точке x_0 и требуется вычислить значение функции $f(x)$ в некоторой близкой к x_0 точке x.

§10. Применение производной к исследованию функции

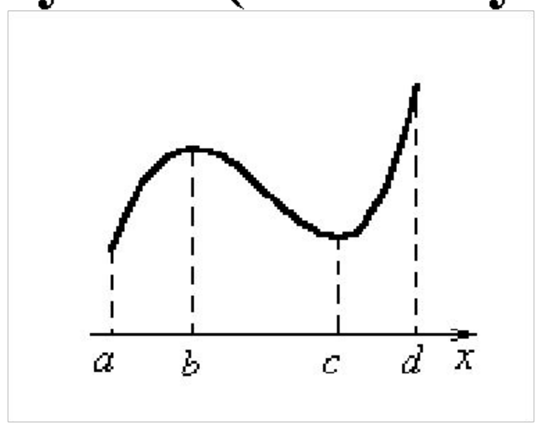
Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X.

1. Промежутки монотонности функции

Теорема 1. (условие монотонности функции на промежутке). Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то для того чтобы она была **строго возрастающей (убывающей)** на этом промежутке необходимо и достаточно чтобы $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X \quad \left(f'(x) < 0 \quad \forall x \in X \right)$.

2. Экстремумы функции

Определение 1. Точка x_0 называется **точкой минимума (максимума)** функции $y=f(x)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и для каждой точки $x \neq x_0$ этой окрестности $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$. Значение функции $f(x_0)$ называется **минимумом (максимумом).**



b – точка максимума, c – точка минимума функции на промежутке $(a;d)$.

Под **экстремумом** понимается либо минимум, либо максимум.

Теорема 2 (необходимое условие существования экстремума). Если функция $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ имеет экстремум, то ее производная а этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Определение 2. Внутренние точки области определения функции в которых производная этой функции равна нулю или не существует называются **стационарными** или **критическими** точками функции.

Теорема 3 (достаточное условие экстремума функции – 1-е правило).

Пусть $x_0 \in X$ - стационарная точка функции $y = f(x)$. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от нее производная $f'(x)>0$, справа $f'(x)<0$, то x_0– точка максимума, в противном случае x_0– точка минимума.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума функции – 2-е правило).

Пусть $f'(x_0)=0$ и существует $f''(x_0)$.

Тогда если $f''(x_0)>0$, то x_0– точка максимума. Если же $f''(x_0)<0$, то x_0– точка минимума.

Правило нахождения точек экстремума и промежутков монотонности

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Найти все критические точки функции $f(x)$. Для этого найти производную, решить уравнение $f'(x)=0$ и найти точки x из области определения, в которых $f'(x)$ не существует.

3. Разбить область определения критическими точками на промежутки и в них найти знаки производной.

4. В промежутках, где производная положительна, функция возрастает, а в промежутках, где производная отрицательна, функция убывает.

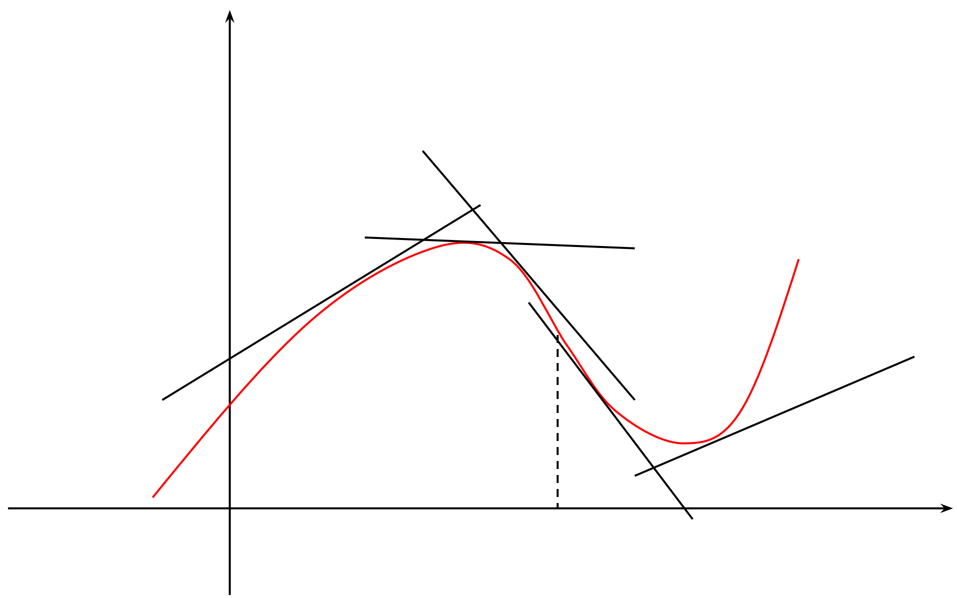
5. Точки экстремума находятся среди критических точек. Пусть x_0 – критическая точка. Если в интервале слева от x_0 производная положительна (отрицательна), а справа отрицательна (положительна), то x_0 – точка максимума (минимума).

3. Условия выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$ и в каждой точке сегмента имеет конечную производную, т.е. в каждой точке к графику функции можно провести касательную.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **вогнутой** на $[a;b]$, если график этой функции лежит выше любой касательной к графику

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой** на $[a;b]$, если график этой функции лежит ниже любой касательной к графику.



Теорема 5. Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\forall x\in[a;b]$ имеет конечные первую и вторую производные, то для того чтобы функция была выпуклой на $[a;b]$ необходимо и достаточно чтобы $f''(x)\leq 0$, а для того чтобы она была вогнутой необходимо и достаточно, чтобы $f''(x)\geq 0$ $\forall x\in[a;b]$.

Если при переходе через точку x_0 функция меняется с выпуклости на вогнутость, или, наоборот – с вогнутости на выпуклость, то эта точка называется **точкой перегиба**.

Теорема 6 (необходимое условие точки перегиба). Если точка $x_0 \in X$ является точкой перегиба, то ее вторая производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Теорема 7 (достаточное условие точки перегиба). Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.

Правило нахождения точек перегиба и промежутков выпуклости и вогнутости

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Найти $f''(x)$ и решить уравнение $f''(x) = 0$ и найти точки x из области определения, в которых $f''(x)$ не существует.

3.Разбить область определения найденными в предыдущем пункте точками на промежутки и в них найти знаки второй производной.

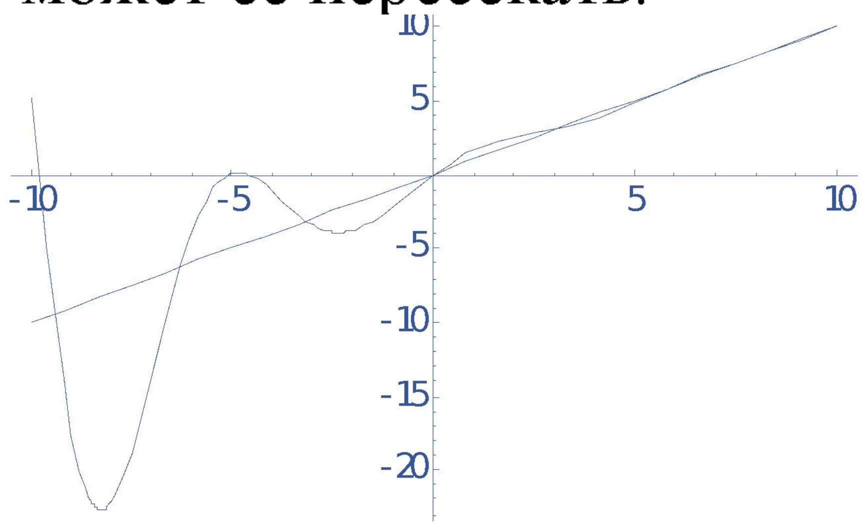
4. В промежутках, где вторая производная положительна, функция вогнутая, а в промежутках, где вторая производная отрицательна, функция выпуклая.

5. Абсциссы точек перегиба нужно искать среди значений, найденных в пункте 2. Пусть x_0 – такое значение. Если производная в точке x_0 (конечная или бесконечная) существует и в интервалах непосредственно слева и справа от x_0 вторая производная имеет разные знаки, то x_0 – абсцисса точки перегиба.

4. Асимптоты функции

Определение. Прямая называется *асимптотой* кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может ее пересекать.



Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ – **вертикальная асимптота** кривой $y=f(x)$.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет **наклонную асимптоту** $y=kx+b$

Тогда

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$.

Схема исследования функций

1) Находится область определения функции.
2) Функция исследуется на непрерывность и точки разрыва.
3) Функция исследуется на четность и нечетность.
4) Функция исследуется на периодичность.
5) Находятся точки пересечения с осями координат.
6) Функция исследуется на монотонность.
7) Функция исследуется на выпуклость и вогнутость и точки перегиба.
8) Находятся асимптоты.
9) Построение графика.