Адаптивные модели прогнозирования

Опр *Адаптивными методами прогнозирования* (или моделями экспоненциального сглаживания) называется методы, позволяющие строить самокорректирующиеся ЭММ, которые учитывают результат реализации прогноза, сделанного на предыдущем шаге, и строят прогноз с учетом полученных результатов.

Алгоритм построения модели адаптивного прогнозирования:

1) делается оценка начальных условий (нулевых значений адаптируемых параметров);
2) делается прогноз на один шаг вперед,
3) полученные прогнозные значения сравниваются с фактическими значениями.
4) Если ошибка прогноза превышает заданной наперед определенной погрешности, то производят модификацию модели, и с учетом этого строят новый прогноз, далее на второй шаг, и опять сравнивают полученный прогноз с фактической реализацией процесса.

Процесс повторяют до тех пор, пока разница, между прогнозным и фактическим значениями, не станет минимальной.

Будут получены параметры адаптируемой модели, и с учетом их значений строят ретроспективный прогноз.

Линейная модель Брауна

$$\widetilde{x}(\tau) = a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau$$

Где $\widetilde{x}(\tau)$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t-м шаге адаптации,

a_{0t}, a_{1t} - адаптируемые параметры модели, τ – период упреждения.

Параметры a_{0t}, a_{1t} рассчитываются по формулам:

$$\begin{cases} a_{0t} = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \\ a_{1t} = \dfrac{1-\beta}{\beta}\left(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}\right) \end{cases}$$

где $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}$ - экспоненциальные средние соответственно 1-го и 2-го порядков; β – параметр сглаживания (адаптации). Иногда параметр сглаживания обозначают как $\alpha=1-\beta$

Расчет экспоненциальных средних

Экспоненциальная средняя 1- го порядка:

$$S_t^{(1)} = (1-\beta)\cdot x_t + \beta \cdot S_{t-1}^{(1)}$$

где β – параметр сглаживания, или так называемый весовой коэффициент, x_t фактическое значение обучающего множества, $S_{t-1}^{(1)}$ - экспоненциальная средняя на предшествующем шаге.

$$S_{t-1}^{(1)} = (1-\beta)\cdot x_{t-1} + \beta \cdot S_{t-2}^{(1)}$$

Подставив, получим:

$$S_t^{(1)} = (1-\beta)\cdot x_t + \beta\cdot(1-\beta)\cdot x_{t-1} + \beta^2 \cdot S_{t-2}^{(1)}$$

Аналогично :

$$S_t^{(1)} = (1-\beta)\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j x_{t-j} + \beta^t S_0^{(1)}$$

Применив такую процедуру экспоненциального сглаживания к исходному ряду, получим сглаженный ряд первого порядка.

Повторное применение процедуры экспоненциального сглаживания уже к сглаженному ряду $S_t^{(1)}$ первого порядка, называется процедурой экспоненциального сглаживания второго порядка :

$$S_t^{(2)} = (1-\beta)\cdot S_t^{(1)} + \beta \cdot S_{t-1}^{(2)}$$

Начальные значения

Начальные значения экспоненциальных средних

$$\begin{cases} S_0^{(1)} = a_{00} - \dfrac{\beta}{1-\beta} a_{10} \\ S_0^{(2)} = a_{00} - \dfrac{2\beta}{(1-\beta)} a_{10} \end{cases}$$

Начальные значения параметров a_{0t0}, a_{10} рассчитываются как коэффициенты регрессии .

$$x_t = a_{00} + a_{10} \cdot t$$

Выбор параметра адаптации

Значение параметра адаптации $\beta=1-\alpha$ лежит в интервале (1; 0).

1) Если требуется придать вес более поздним значения ряда (увеличить степень реагирования модели на последние изменения), то берут значения $\boldsymbol{\beta}$**<0,5**
2) Если хотят получить более сглаженную картину тенденции развития ряда, избежать краткосрочных изменений и повысить степень устойчивости модели, то значения $\boldsymbol{\beta}$**>0,5**
3) Используют метод Брауна: $\beta = 1 - \dfrac{2}{m+1}$, где m –число наблюдений в ряду.
4) выбирают $\boldsymbol{\beta}$, исходя из минимума средней квадратической ошибки между расчетным и фактическим значениями.

Квадратичная модель Брауна

$$\tilde{x}_t(\tau) = a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau + \frac{1}{2} a_{2t} \cdot \tau^2$$

Где $\tilde{x}(\tau)$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t-м шаге адаптации,

$a_{0t},\ a_{1t},\ a_{3t}$ адаптируемые параметры модели, τ – период упреждения.

Параметры $a_{0t},\ a_{1t},\ a_{3t}$ рассчитываются по формулам:

$$\begin{cases} a_{0t} = 3(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) + S_t^{(3)} \\ a_{1t} = \dfrac{1-\beta}{\beta^2}\left[(1+5\beta)S_t^{(1)} - 2(1+4\beta)S_t^{(2)} + (1+3\beta)S_t^{(3)}\right] \\ a_{3t} = \dfrac{(1-\beta)^2}{\beta^2}\left(S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}\right) \end{cases}$$

где $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, S_t^{(3)}$ - экспоненциальные средние соответственно 1-го, 2-го и 3-го порядков; β – параметр сглаживания (адаптации).

Расчет экспоненциальных средних

Экспоненциальные средние:

$$S_t^{(1)} = (1-\beta)\cdot x_t + \beta \cdot S_{t-1}^{(1)}$$
$$S_t^{(2)} = (1-\beta)\cdot S_t^{(1)} + \beta \cdot S_{t-1}^{(2)}$$
$$S_t^{(3)} = (1-\beta)\cdot S_t^{(2)} + \beta \cdot S_{t-1}^{(3)}$$

Расчет начальных значений экспоненциальных средних:

$$\begin{cases} S_0^{(1)} = a_{00} - \dfrac{\beta}{1-\beta} a_{10} + \dfrac{\beta(1+\beta)}{2(1-\beta)^2} a_{20} \\[2ex] S_0^{(2)} = a_{00} - \dfrac{2\beta}{(1-\beta)} a_{10} + \dfrac{\beta(1+2\beta)}{(1-\beta)^2} a_{20} \\[2ex] S_0^{(2)} = a_{00} - \dfrac{3\beta}{(1-\beta)} a_{10} + \dfrac{3\beta(1+3\beta)}{2(1-\beta)^2} a_{20} \end{cases}$$

Модель Хольта

$$\tilde{x}_t(\tau) = a_t + b_t \cdot \tau$$

где $\tilde{x}(\tau)$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед после t шагов адаптации, $a_t,\ b_t$ - корректируемые параметры модели на каждом шаге t, τ – период упреждения прогноза.

Адаптация параметров модели $a_t,\ b_t$:

$$\begin{cases} a_t = \alpha_1 x_t + (1-\alpha_1)\cdot(a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1-\alpha_2) b_{t-1} \end{cases}$$

Здесь $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,\ 1]$ параметры адаптации.

мультипликативная модель Хольта-Уинтерса

Рекуррентные формулы обновления :

$$\begin{cases} a_{0t} = \alpha_1 \dfrac{x_t}{f_{t-l}} + (1-\alpha_1)(a_{0t-1} + a_{1t-1}) \\ a_{1t} = \alpha_2 (a_{0t} - a_{0t-1}) + (1-\alpha_2) a_{1t-1} \\ f_t = \alpha_3 \dfrac{x_t}{a_{0t}} + (1-\alpha_3) f_{t-l} \end{cases}$$

где a_{0t}, a_{1t} - адаптируемые параметры линейного тренда на t-м шаге адаптации, α_1, α_2, α_3 - параметры адаптации, f_t - адаптируемый параметр сезонных коэффициентов на t- м шаге адаптации, l – период сезонности.

Прогнозирование в мультипликативной модели на τ шагов вперед осуществляется по формуле:

$$\tilde{x}_{t+\tau} = (a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau) f_{t-l+\tau}$$

где $\tilde{x}_{t+\tau}$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t-м шаге адаптации.

аддитивная модель Хольта-Уинтерса

Рекуррентные формулы обновления :

$$\begin{cases} a_{0t} = \alpha_1 (x_t - f_{t-l}) + (1-\alpha_1)(a_{0t-1} + a_{1t-1}) \\ a_{1t} = \alpha_2 (a_{0t} - a_{0t-1}) + (1-\alpha_2) a_{1t-1} \\ f_t = \alpha_3 (x_t - a_{0t}) + (1-\alpha_3) f_{t-l} \end{cases}$$

где a_{0t}, a_{1t} - адаптируемые параметры линейного тренда на t-м шаге адаптации, α_1, α_2, α_3 - параметры адаптации, f_t - адаптируемый параметр сезонных коэффициентов на t- м шаге адаптации, l – период сезонности.

Прогнозирование в мультипликативной модели на τ шагов вперед осуществляется по формуле:

$$\tilde{x}_{t+\tau} = a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau + f_{t-l+\tau}$$

где $\tilde{x}_{t+\tau}$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t-м шаге адаптации.

Определение начальных параметров

a_{00}, a_{10} параметры определяются как коэффициенты регрессии

$$x_t = a_{00} + a_{10} \cdot t$$

адаптируемые коэффициенты сезонности определяются как среднее арифметическое значение индексов $\tilde{f}_t = x_t / \hat{y}_t$ (для мультипликативной модели)

и $\tilde{f}_t = x_t - \hat{y}_t$ (для аддитивной модели), причем рассчитываются они для каждой одноименной фазы периода ($\hat{y}_t$ - расчетные значения линейного тренда).

Параметры α_1, α_2, α_3 определяются из условия минимизации суммы квадратов ошибок, причем необходимо учитывать, что α_2 параметр сглаживания тренда, а α_3 - параметр адаптации сезонных коэффициентов