АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Метод гармонической линеаризации широко используется для исследования режимов автоколебаний нелинейных систем. Наиболее распространёнными способами исследования автоколебаний являются алгебраический и частотный.

Алгебраический метод позволяет на основании характеристического уравнения определить амплитуду и частоту возможных автоколебаний.

Пусть САР имеет одну нелинейность $F(x)$ и линейную часть, выполняющую роль фильтра (рисунок 1). Решение ищется в форме $\boldsymbol{x = a \cdot \sin\omega t}$.

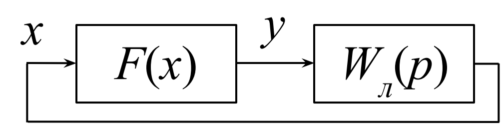

Рисунок 1

В искомом решении неизвестны амплитуда $\boldsymbol{a}$ и частота $\boldsymbol{\omega}$. Но при гармонической линеаризации в искомом решении $\boldsymbol{a = const}$ и $\boldsymbol{\omega = const}$. Следовательно, гармонически линеаризованную систему можно рассматривать как линейную с постоянными коэффициентами.

Линейная система имеет периодическое решение паре чисто мнимых корней $\boldsymbol{\lambda_{1,2} = \pm j\omega}$ характеристического уравнения (граница колебательной устойчивости). Следовательно, для определения возможного периодического решения (и его параметров) необходимо в характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы подставить корни $\boldsymbol{\lambda = j\omega}$.

Характеристическое уравнение находится из передаточной функции разомкнутой системы путём **как?**

Будем рассматривать симметричные колебания. Тогда гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейности

$$W_н(a,p) = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p.$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{pc}(a,p) = \ \mathbf{?}$$

Характеристическое уравнение системы **?**

Как отмечалось, для отыскания периодического решения необходимо в характеристическое уравнение подставить $\boldsymbol{\lambda = j\omega}$:

$$Q(j\omega) + R(j\omega)\cdot\left[q(a) + jq'(a)\right] = 0. \qquad (1)$$

При нечётно-симметричной однозначной нелинейности (q' =0):

$$Q(j\omega) + R(j\omega)\cdot q(a) = 0. \qquad (2)$$

В уравнении (1) или (2) выделяются вещественная и мнимая части:

$$\boldsymbol{U(a,\omega) + jV(a,\omega) = 0.}$$

В результате получаем два уравнения

из которых находятся искомые амплитуда ***a*** и частота ***ω*** периодического решения.

Определённое таким образом периодическое решение может и не означать автоколебательного процесса в системе. Это решение необходимо исследовать на его устойчивость. Если решение устойчиво, то имеет место автоколебательный процесс. Неустойчивое периодическое решение говорит о том, что в системе имеют место затухающие или расходящиеся колебания (неустойчивый предельный цикл на фазовом портрете).

Устойчивость периодического решения можно проверить по выражению

$$\frac{\partial U}{\partial a}\cdot\frac{\partial V}{\partial \omega}-\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial U}{\partial \omega}>0, \qquad (4)$$

где U, V – вещественная и мнимая части из (3).

Кроме того, в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы, все корни (кроме использованных $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$) должны иметь отрицательные вещественные части, или удовлетворять критерию Гурвица (*для систем 3-го и 4-го порядка достаточно положительности всех коэффициентов характеристического уравнения*).

Если уравнения (3) не имеют положительных вещественных решений для ***a*** и ***ω***, колебания в рассматриваемой нелинейной системе невозможны.

Пример. Определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе, структурная схема которой приведена на рисунке 2.

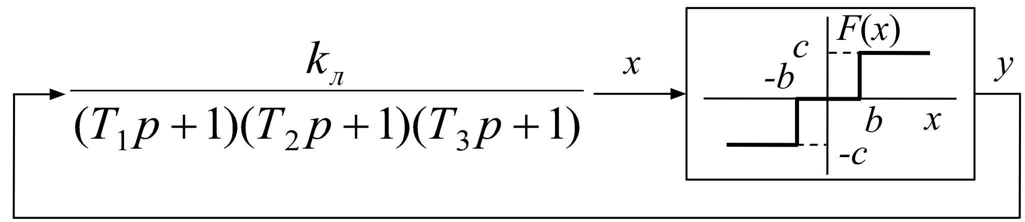

Рисунок 2

Гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейности

$$W(a,p) = q(a). \qquad (5)$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{pc}(a,p) = \ \mathbf{?}$$

Характеристическое уравнение системы **?**

$$T_1T_2T\lambda^3 + (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\lambda^2 + (T_1 + T_2 + T_3\ 1)\lambda + k_л \cdot q(a) = 0. \qquad (7)$$

Подставим $p = j\omega$:

$$-jT_1T_2T\omega^3 - (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\omega^2 + j(T_1 + T_2 + T_3)\omega + k_л \cdot q(a) = 0. \qquad (8)$$

Выделим в (8) вещественную и мнимую части:

$$\left.\begin{aligned} U &= k_л \cdot q(a) - (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\omega^2 = 0; \\ V &= (T_1 + T_2 + T_3)\omega - T_1T_2T_3\omega^3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Второе уравнение системы (9) запишем как $\omega(T_1 + T_2 + T_3 - T_1T_2T_3\,\omega^2) = 0$.
Решение $\omega = 0$ не имеет смысла, так как отыскивается периодическое решение.

Тогда $\omega^2 = \dfrac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}$, (10)

откуда частота периодического решения $\omega = \sqrt{\dfrac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}$. (11)

Подставив (10) в первое уравнение системы (9), получим

$$q(a) = \frac{(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)(T_1 + T_2 + T_3)}{k_л T_1 T_2 T_3}. \qquad (12)$$

Зная зависимость $q(a)$, по (12) можно определить амплитуду a периодического решения. Для заданной нелинейности

$$q = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{при } a > b.$$

В данном случае проще воспользоваться графиком $q(a)$ (рисунок 3), построенном по параметрам нелинейного звена (см. пример 2).

Отложив на графике найденное по (12) значение $q(a)$ (штрихпунктирная линия), определим, что имеется два периодических решения – с амплитудой $\boldsymbol{a_1}$ и амплитудой $\boldsymbol{a_2}$. Необходимо определить, какое из решений устойчиво.

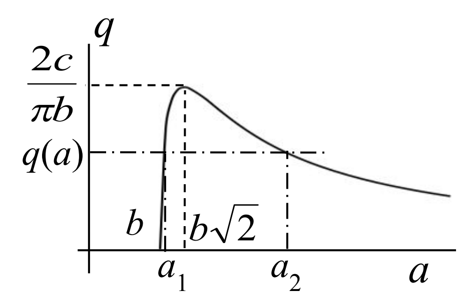

Рисунок 3

Для определения устойчивости воспользуемся условием (4):

$$\frac{\partial U}{\partial a}\cdot\frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial U}{\partial \omega} > 0.$$

Определим частные производные из (9):

$$\frac{\partial U}{\partial a} = k_л \frac{\partial q(a)}{\partial a}; \qquad \frac{\partial U}{\partial \omega} = -2(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\omega = -2(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3}};$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial V}{\partial \omega} = T_1 + T_2 + T_3 - 2T_1T_2T_3\omega^2 = -(T_1 + T_2 + T_3).$$

Подставим в (4): $\frac{\partial U}{\partial a} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} > 0$ или $-k_л \frac{\partial q(a)}{\partial a}(T_1 + T_2 + T_3) > 0.$

Условие выполняется, если $\frac{\partial q(a)}{\partial a} < 0,$ то есть, на участке характеристики $\boldsymbol{q(a)}$, где с увеличением $\boldsymbol{a}$ коэффициент $\boldsymbol{q}$ уменьшается.

Проверка корней характеристического уравнения не требуется, так как система третьего порядка и все коэффициенты характеристического уравнения положительны.

Следовательно, рассмотренная система будет находиться в режиме автоколебаний. Амплитуда автоколебаний (на входе нелинейного звена) равна $\boldsymbol{a_2}$, а частота определяется выражением (11).

В режиме автоколебаний система может оказаться, если начальные условия будут больше $b\sqrt{2}$. Если начальные условия будут в диапазоне от b до $b\sqrt{2}$, в системе будут затухающие колебания. При меньших начальных условиях колебаний не будет, так как $\boldsymbol{x}$ будет находиться в зоне нечувствительности нелинейности.

При определённых параметрах системы расчётное значение $\boldsymbol{q(a)}$ будет больше $\frac{2c}{\pi b}$ и колебаний также не будет.