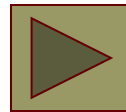


# Аналитическая геометрия

Лекции по математике для студентов I курса

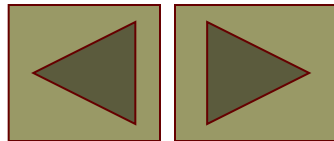
---



# Содержание

---

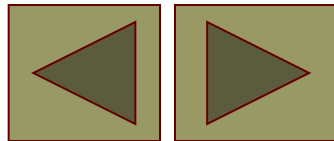
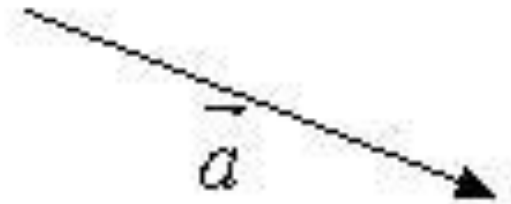
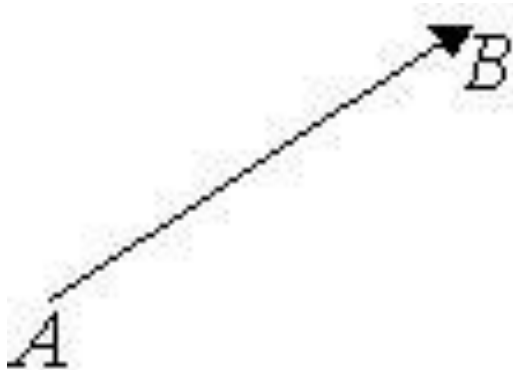
- Геометрические векторы
- Линейные операции над векторами и их свойства
- Скалярное произведение векторов
- Расстояние между точками



# Геометрические векторы

---

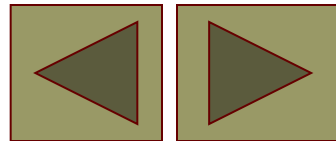
- Геометрический вектор – это направленный отрезок.
- Обозначения:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$



# Геометрические векторы

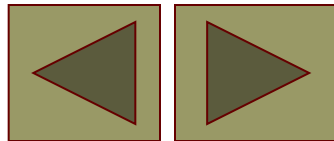
---

- Длина вектора – это расстояние между начальной и конечной точками.
- Обозначения:  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$  или просто  $AB$ ,  $a$ .
- Вектор называют нулевым, если его начало и конец совпадают.
- Обозначение:  $\vec{0}$ .



# Геометрические векторы

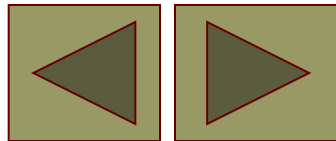
- Векторы называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
- Обозначение:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .



# Геометрические векторы

---

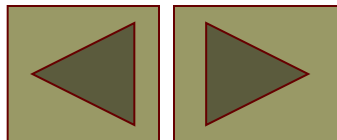
- Векторы называют компланарными, если они лежат в одной плоскости.
- Два вектора называют равными, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину и направление.
- Свободным называют вектор, который можно перемещать в пространстве параллельно его направлению.



# Линейные операции над векторами

---

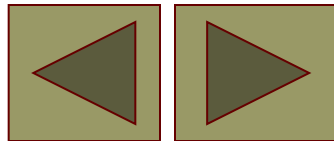
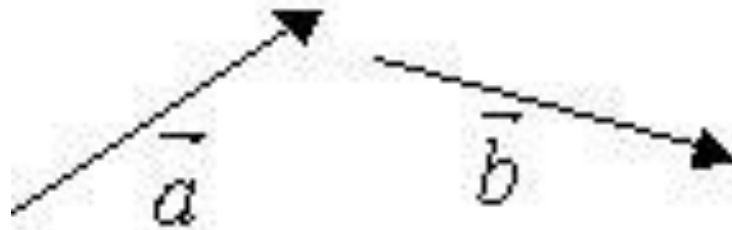
- Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на число.
- Суммой двух геометрических векторов и называется вектор, который можно построить или по правилу треугольника или по правилу параллелограмма.



# Сложение векторов

---

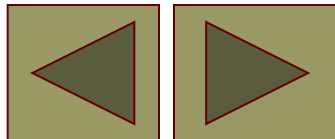
Пусть требуется сложить векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , изображённые на рисунке.





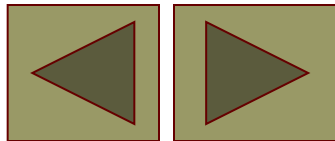
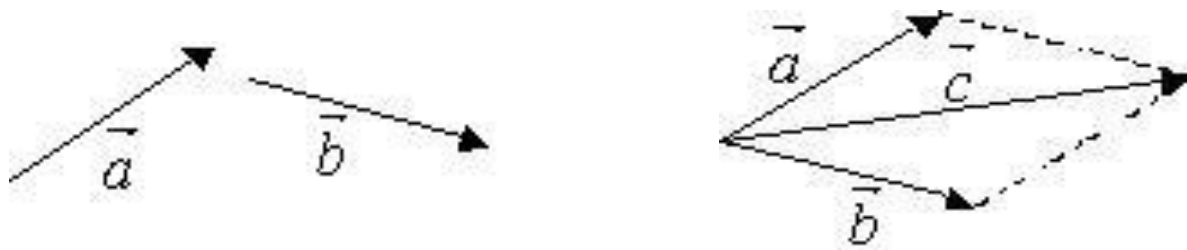
# Правило треугольника

Параллельным переносом совместим конец вектора  $\vec{a}$  с началом вектора  $\vec{b}$ . Тогда суммой  $\vec{a} + \vec{b}$  будем называть вектор  $\vec{c}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ , а конец с концом вектора  $\vec{b}$ .



# Правило параллелограмма

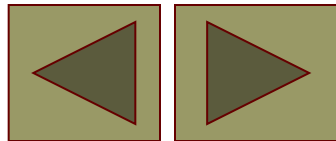
Параллельным переносом совместим начало вектора  $\vec{a}$  и начало вектора  $\vec{b}$ . Построим параллелограмм на концах векторов. Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будем называть вектор  $\vec{c}$ , являющийся диагональю параллелограмма, начало которого совпадает с началом векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



# Свойства сложения векторов

---

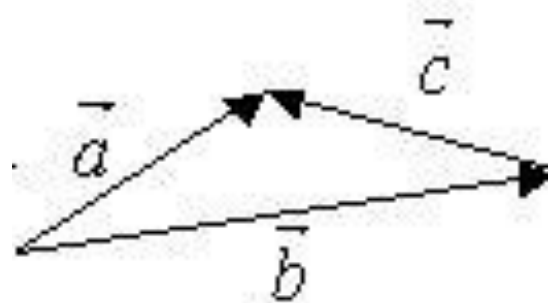
- Коммутативность:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Ассоциативность:  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- Существование нулевого вектора такого, что  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- Для любого вектора  $\vec{a}$  существует противоположный вектор  $(-\vec{a})$  такой, что  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$



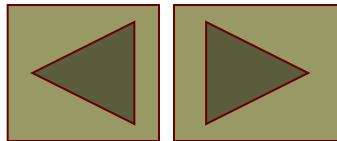
# Разность векторов

Можно доказать, что для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  существует такой вектор  $\vec{c}$ , который, будучи сложен с  $\vec{b}$ , даст вектор  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Такой вектор называют геометрической разностью:



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

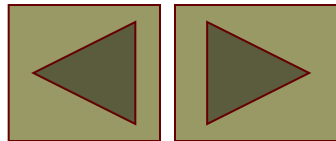


# Произведение вектора на число

---

Произведением  $\alpha \vec{a}$  вектора  $\vec{a}$  на

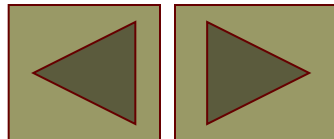
вещественное число  $\alpha$  называется вектор  $\vec{b}$ , имеющий длину, равную произведению чисел  $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$  и направление, совпадающее с направлением вектора  $\vec{a}$ , если  $\alpha > 0$ , и противоположное, если  $\alpha < 0$ .



# Свойства произведения

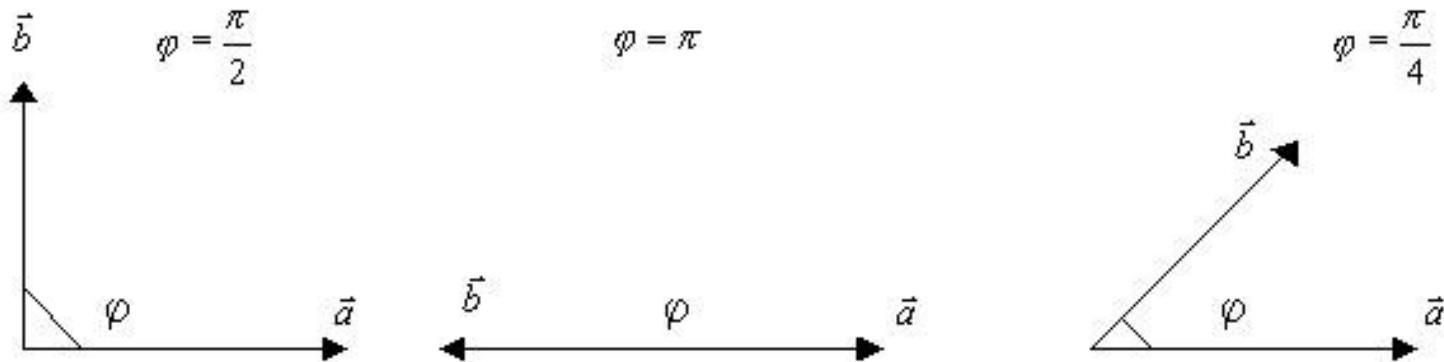
---

- Ассоциативность сомножителей:
  - $\alpha \cdot (\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$
- Дистрибутивность относительно суммы векторов:  $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$
- Дистрибутивность относительно суммы чисел:  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
- Существование числа 1:  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

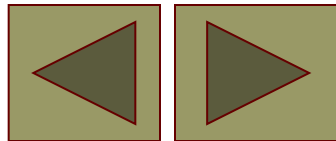


# Скалярное произведение векторов

- Углом между двумя векторами будем называть угол, который не превосходит  $\pi$ .



- Угол между векторами будем обозначать  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$

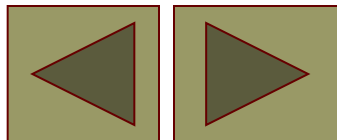


# Скалярное произведение векторов

---

- Скалярным произведением двух геометрических векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \varphi$$

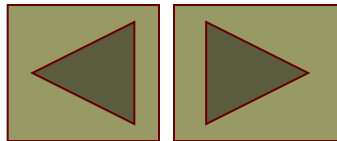




# Скалярное произведение векторов

---

- Если  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ , то  $\underline{a} \cdot \underline{b} > 0$ , т.к.  $\cos \varphi > 0$ .
- Если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то  $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ , т.к.  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .
- Если  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ , то  $\underline{a} \cdot \underline{b} < 0$ , т.к.  $\cos \varphi < 0$ .



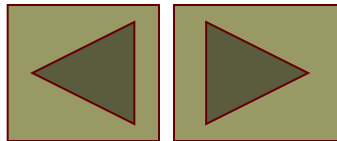
## Пример 1.

---

Вычислить скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,  
если  $|\vec{a}| = 3$ ;  $|\vec{b}| = 5$  и  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

**Решение:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$$



# Скалярное произведение векторов

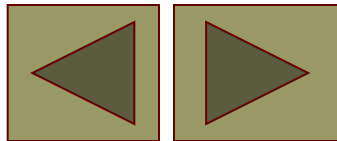
---

## Необходимое и достаточное условие перепендикулярности векторов

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны, т.к.

и наоборот.

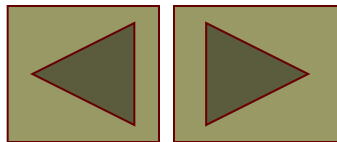
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$



# Свойства скалярного произведения

---

- Коммутативность:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Ассоциативность:  $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Дистрибутивность относительно суммы векторов:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны.

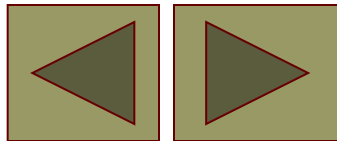


## Угол между векторами

---

Так как  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ , то угол между векторами можно вычислять по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



## Пример 2.

---

Вычислить угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если

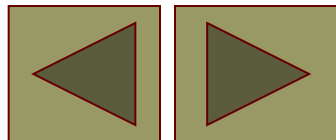
$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 5$$

и скалярное произведение векторов равно  $-3$ ,

**Решение:**

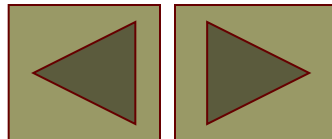
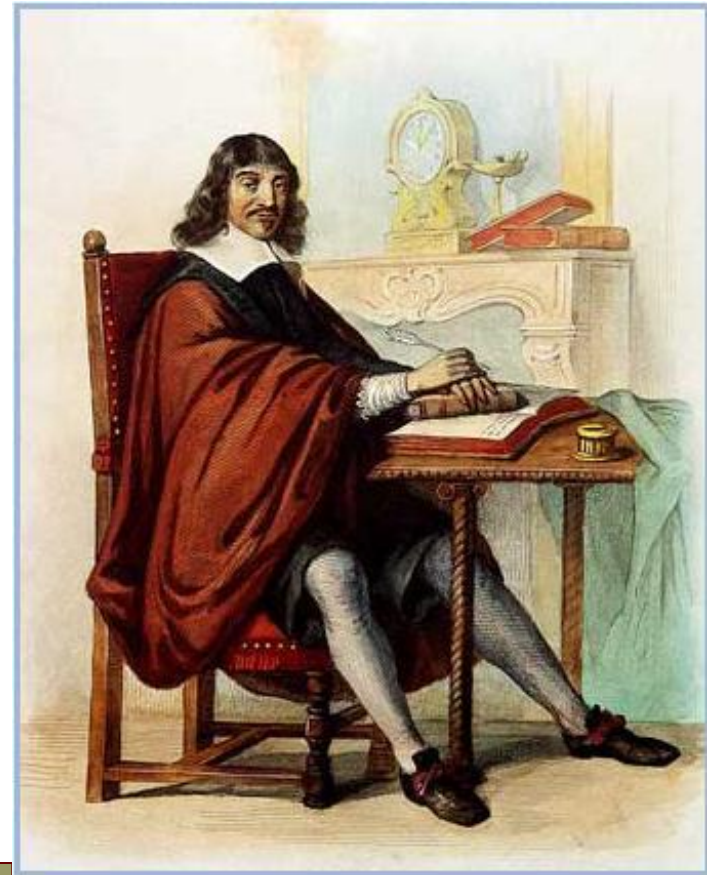
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{5}$$

**Ответ:**  $\varphi = \arccos(-0.2)$



# Рене Декарт предложил координатный метод

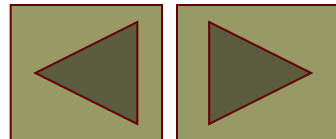
Метод позволяет описывать  
геометрические объекты  
аналитически, т.е. на языке  
алгебры.



# Одномерная система координат

---

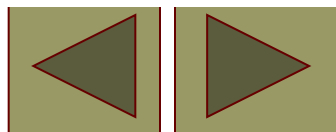
- Прямая с заданным направлением
- Задана точка – начало координат
- Выбран единичный масштаб





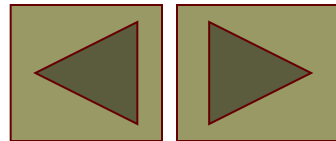
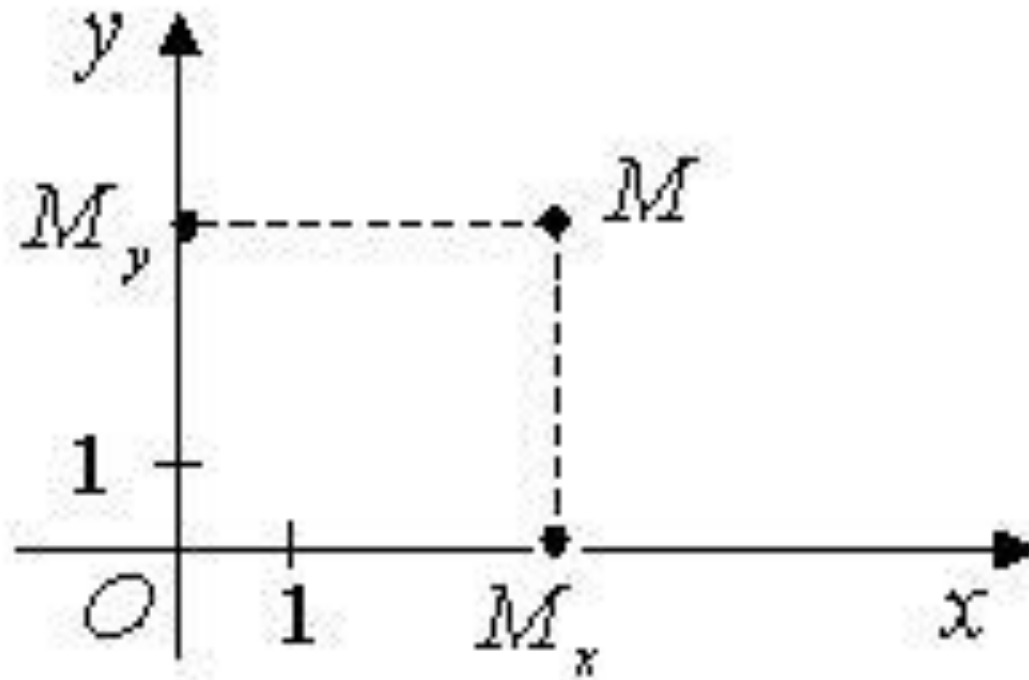
# Координата точки

- Координата точки равна расстоянию от начала координат до заданной точки
- Координата положительна, если направление вектора  $\overrightarrow{OM}$  совпадает с направлением координатной оси
- Иначе координата точки отрицательна

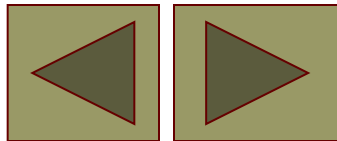
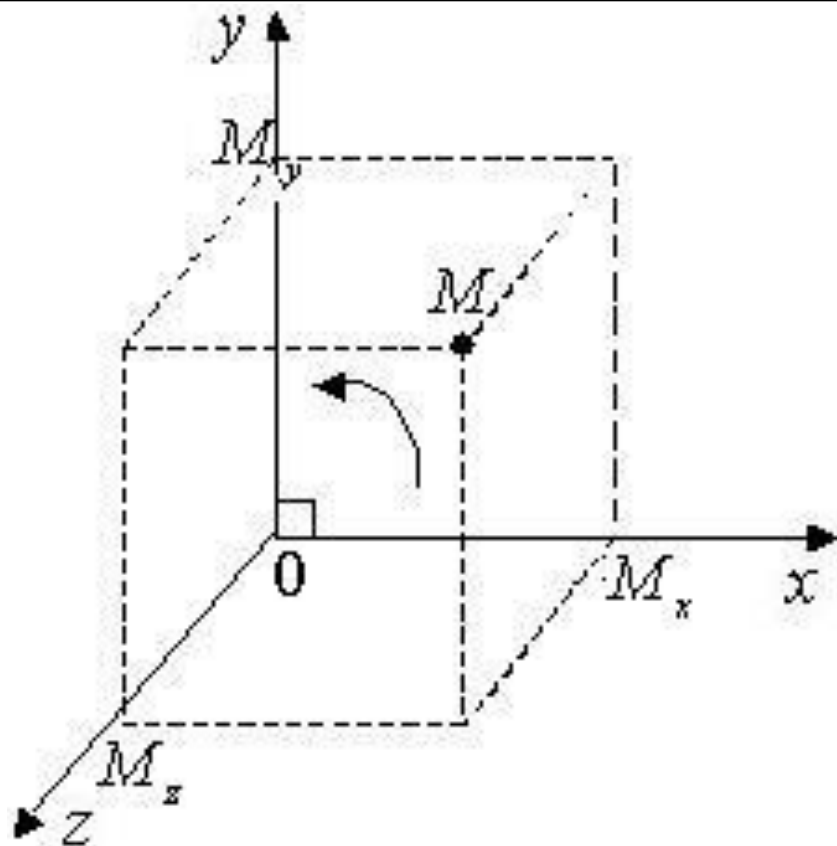


# Двумерная система координат

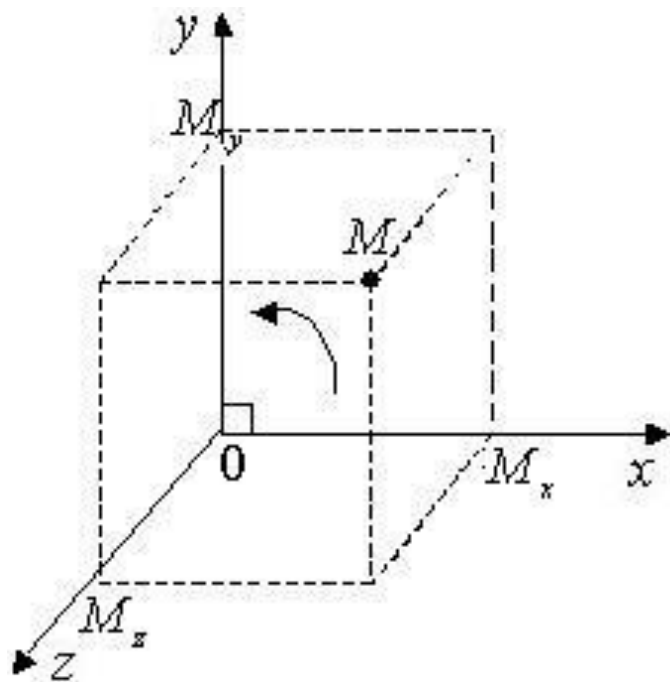
---



# Трёхмерная система координат

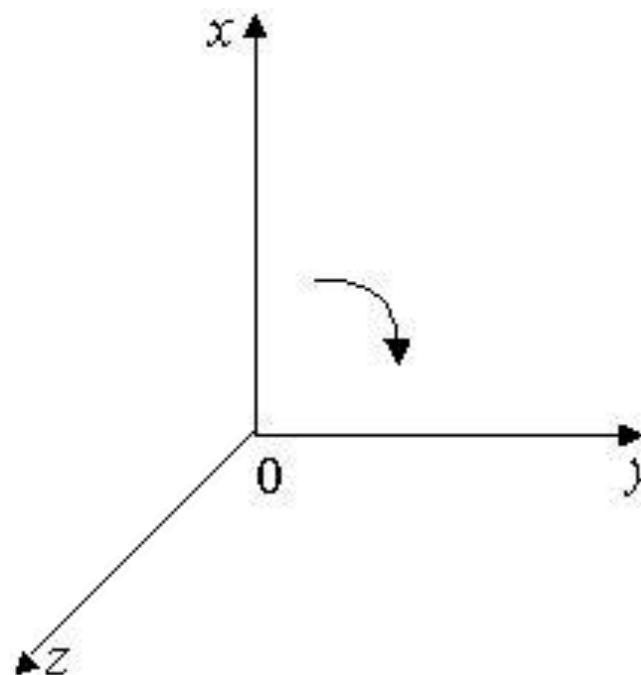


□ Правая система  
координат

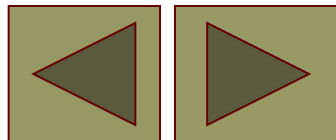


Поворот от оси  $Ox$  к оси  $Oy$   
против часовой стрелки

□ Левая система  
координат

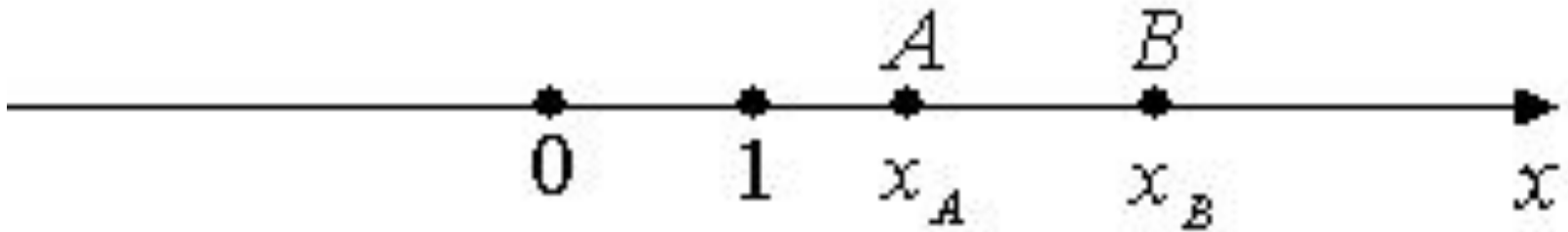


Поворот от оси  $Oy$  к оси  $Ox$   
по часовой стрелке

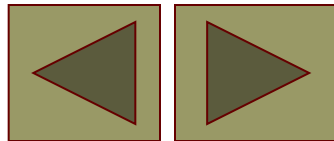


# Расстояние между точками на прямой ЛИНИИ

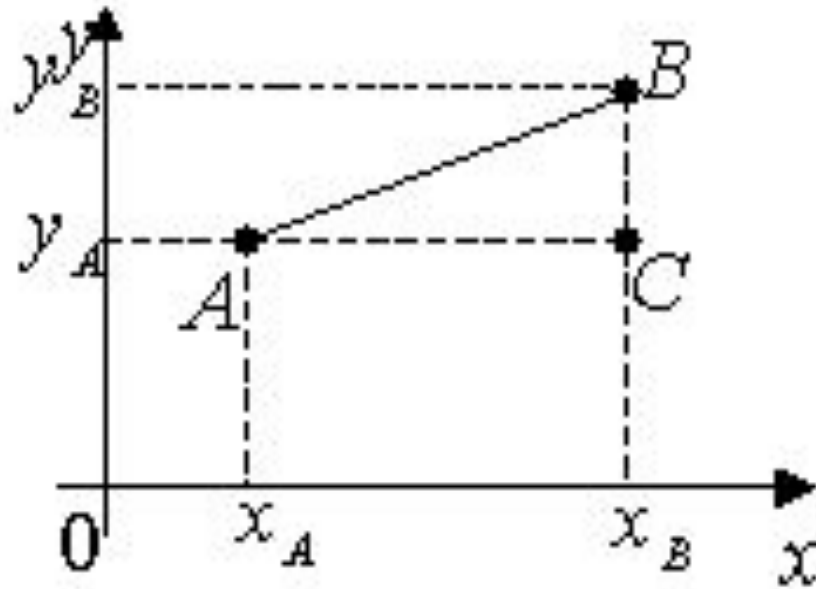
---



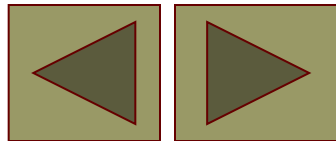
$$d = |x_A - x_B|$$



# Расстояние между точками на плоскости



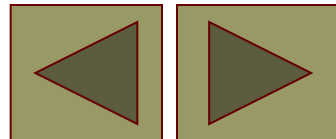
$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



# Расстояние между точками в геометрическом пространстве

---

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



### Пример 3.

---

Дано:

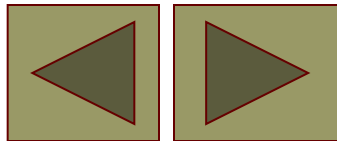
$$A (1, -3, 5)$$

$$B (2, 4, -6)$$

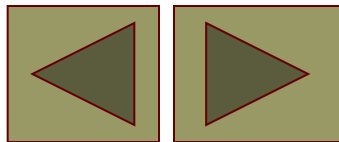
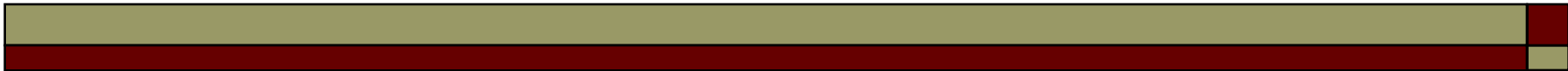
$d$  - ?

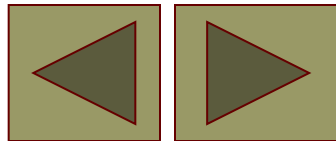
**Решение:**

$$d = \sqrt{(2-1)^2 + (4-(-3))^2 + (-6-5)^2} = \sqrt{1+49+121} = \sqrt{171}$$







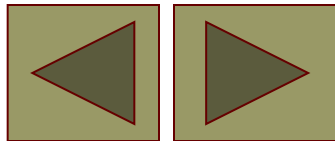
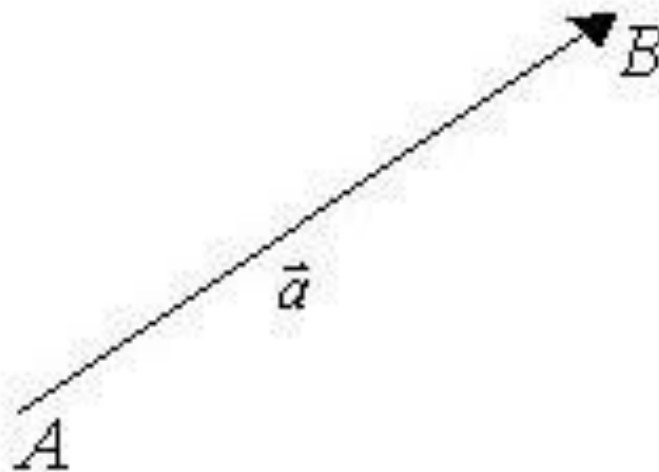


# Расстояние между точками пространства

---

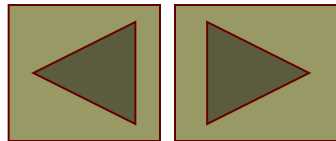
- Длина вектора – это расстояние между двумя точками: началом и концом вектора

$$AB = |\vec{a}|$$



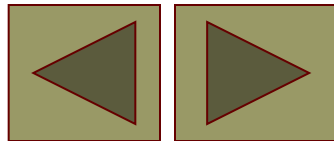
# Расстояние между точками пространства

- Из определения скалярного произведения следует, что  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$ , т.к.  $\cos 0 = 1$ .
- Следовательно,  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ . (расстояние между 2-я точками)
- **Вывод.** Длину вектора можно найти с помощью операции скалярного произведения. В этом случае говорят, что в линейном векторном пространстве геометрических векторов введена метрика, т.е. способ вычисления расстояний между точками этого пространства.



# Свойства длины вектора

- 1.  $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- 2.  $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$   $\lambda$  - вещественное число
- 3.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  - неравенство Коши-Буняковского
- 4.  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  - неравенство треугольника



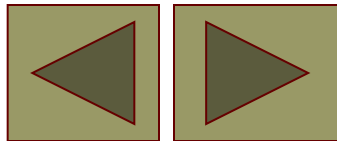
### Пример 3.

---

Вычислить длину вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  и  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

**Решение:**

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 2\vec{a}\vec{b} + (\vec{b})^2} = \\ &= \sqrt{(\vec{a})^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b})^2} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 5^2} = \\ &= \sqrt{9 + 15 + 25} = \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$



# Ортонормированный базис

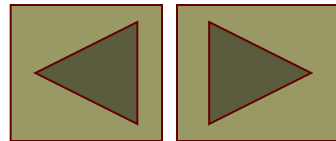
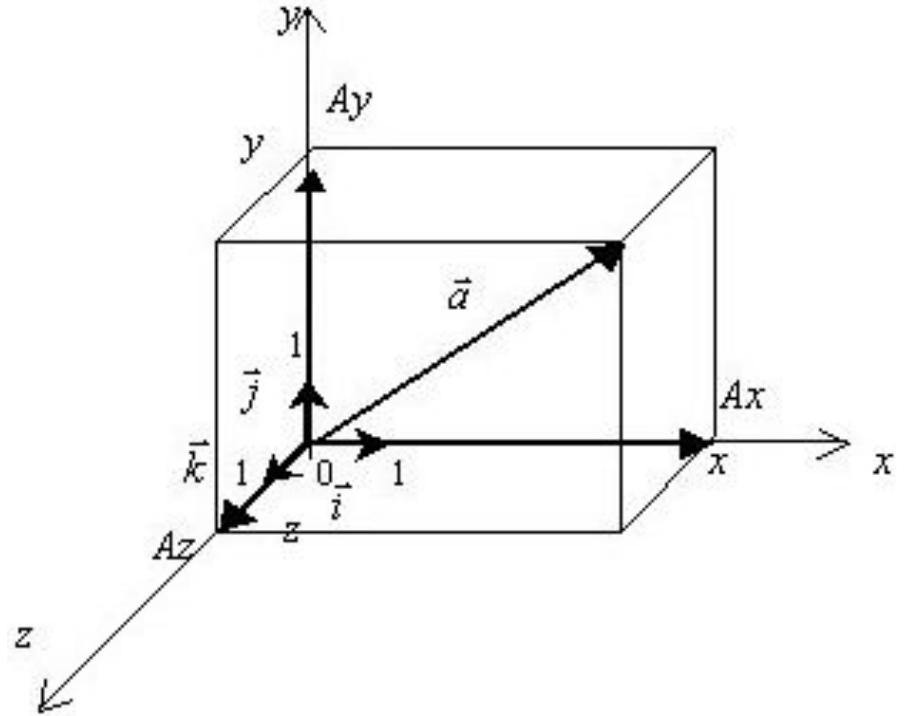
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$$

$$\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$$

$$\overrightarrow{OA_y} = y \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA_z} = z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$



## Пример 4.

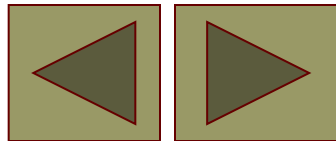
Известны координаты начальной и конечной точек вектора  $\overrightarrow{AB}$ :  $A(1, 3, -2)$  и  $B(-1, 2, 7)$ .

Разложить вектор  $\overrightarrow{AB}$  по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

**Решение.** В примере 1 были найдены координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$   $(-2; -1; 9)$ .

Следовательно  $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

**Ответ:**  $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$





## Пример 2.

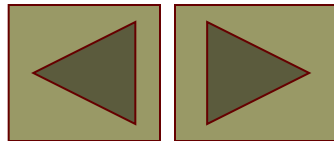
Известны координаты начальной и конечной точек вектора  $\overrightarrow{AB}$ :  $A(1, 3, -2)$  и  $B(-1, 2, 7)$ .

Разложить вектор  $\overrightarrow{AB}$  по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

**Решение.** В примере 1 были найдены координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$   $(-2; -1; 9)$ .

Следовательно  $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

**Ответ:**  $\overrightarrow{AB} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$



## Пример 2.

Известны координаты начальной и конечной точек вектора  $\overrightarrow{AB}$  :  $A(1, 3, -2)$  и  $B(-1, 2, 7)$ .

Разложить вектор  $\overrightarrow{AB}$  по ортонормированному базису

**Решение.** В примере 1 были найдены координаты вектора  $(-2; -1; 9)$ .

Следовательно  $= -2 \quad - \quad +9$

**Ответ:**  $= -2 \quad - \quad +9 \overrightarrow{AB}$   
 $\overrightarrow{AB} \quad \begin{matrix} \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ i & j & k \end{matrix}$

