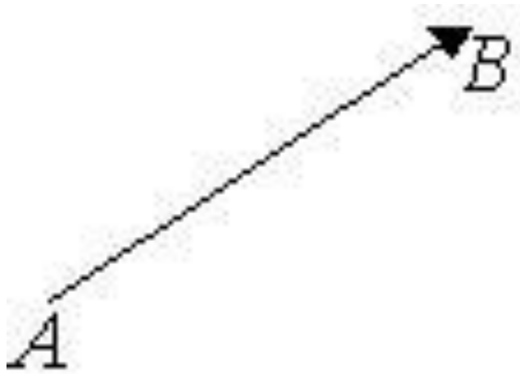
Аналитическая геометрия

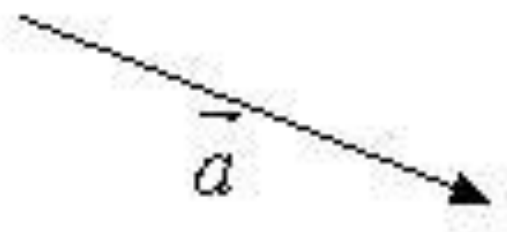
Лекции по математике для студентов I курса

Содержание

Геометрические векторы

- <u>Геометрический вектор</u> – это направленный отрезок.
- Обозначения: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$





Геометрические векторы

- Длина вектора – это расстояние между начальной и конечной точками.
- Обозначения: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$ или просто AB, a.
- Вектор называют нулевым, если его начало и конец совпадают.
- Обозначение: $\vec{O}$.

Геометрические векторы

- Векторы называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
- Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Геометрические векторы

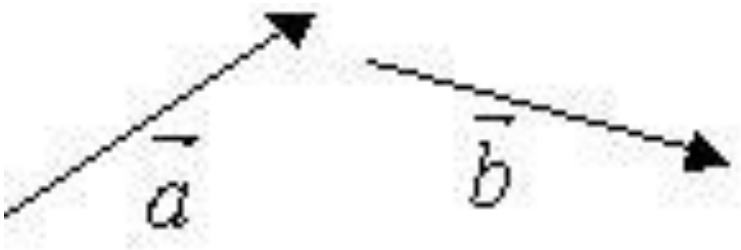
- Векторы называют компланарными, если они лежат в одной плоскости.
- Два вектора называют равными, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину и направление.
- Свободным называют вектор, который можно перемещать в пространстве параллельно его направлению.

Линейные операции над векторами

- Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на число.
- Суммой двух геометрических векторов и называется вектор, который можно построить или по правилу треугольника или по правилу параллелограмма.

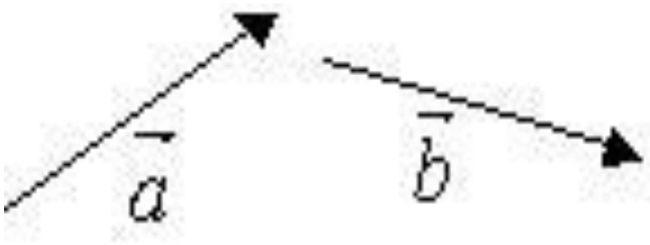
Сложение векторов

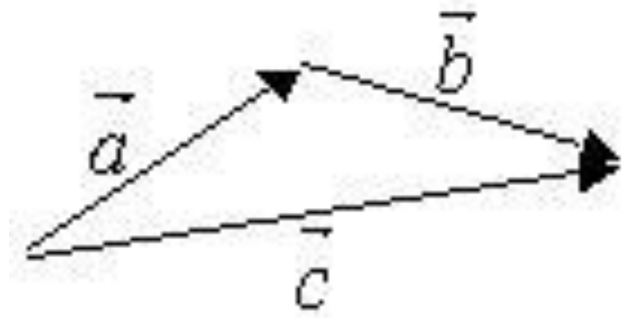
Пусть требуется сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённые на рисунке.



Правило треугольника

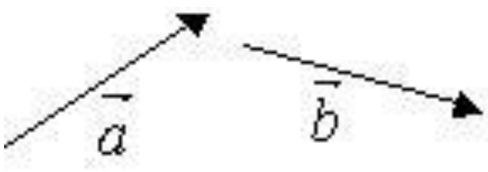
Параллельным переносом совместим конец вектора $\vec{a}$ с началом вектора $\vec{b}$. Тогда суммой $\vec{a}+\vec{b}$ будем называть вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$.

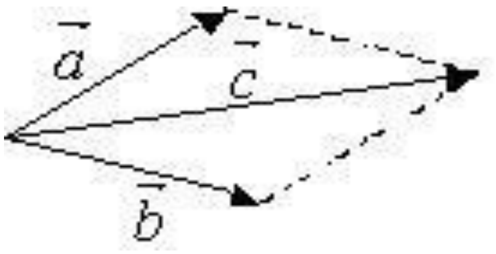




Правило параллелограмма

Параллельным переносом совместим начало вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$. Достроим параллелограмм на концах векторов. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем называть вектор $\vec{c}$, являющийся диагональю параллелограмма, начало которого совпадает с началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



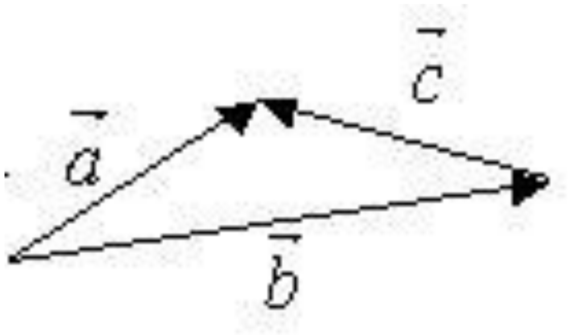


Свойства сложения векторов

- Коммутативность: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- Ассоциативность: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
- Существование нулевого вектора такого, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
- Для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $(-\vec{a})$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Разность векторов

Можно доказать, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует такой вектор $\vec{c}$, который, будучи сложен с $\vec{b}$, даст вектор $\vec{a}$: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$



Такой вектор называют <u>геометрической разностью</u>:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Произведение вектора на число

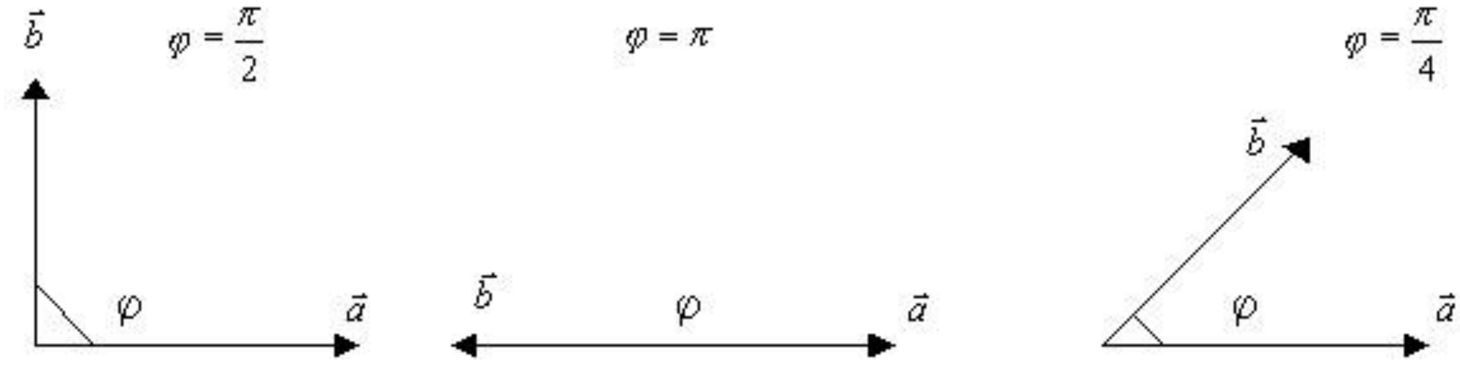
Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вещественное число α называется вектор $\vec{b}$, имеющий длину, равную произведению чисел $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ и направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположное, если $\alpha < 0$.

Свойства произведения

- Ассоциативность сомножителей:
  – $\alpha \cdot (\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$
- Дистрибутивность относительно суммы векторов: $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$
- Дистрибутивность относительно суммы чисел: $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
- Существование числа 1: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Скалярное произведение векторов

- <u>Углом</u> между двумя векторами будем называть угол, который не превосходит π.



- Угол между векторами будем обозначать $\angle(\vec{a}, \vec{b})$

Скалярное произведение векторов

- <u>Скалярным произведением</u> двух геометрических векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Скалярное произведение векторов

- Если $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, т.к. $\cos\varphi > 0$.
- Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, т.к. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.
- Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, т.к. $\cos\varphi < 0$.

Пример 1.

Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5$$

Скалярное произведение векторов

Необходимое и достаточное условие перепендикулярности векторов

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны, т.к. и наоборот.

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Свойства скалярного произведения

- Коммутативность: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Ассоциативность: $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Дистрибутивность относительно суммы векторов: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны.

Угол между векторами

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, то угол между векторами можно вычислять по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Пример 2.

Вычислить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$

и скалярное произведение векторов равно -3 ,

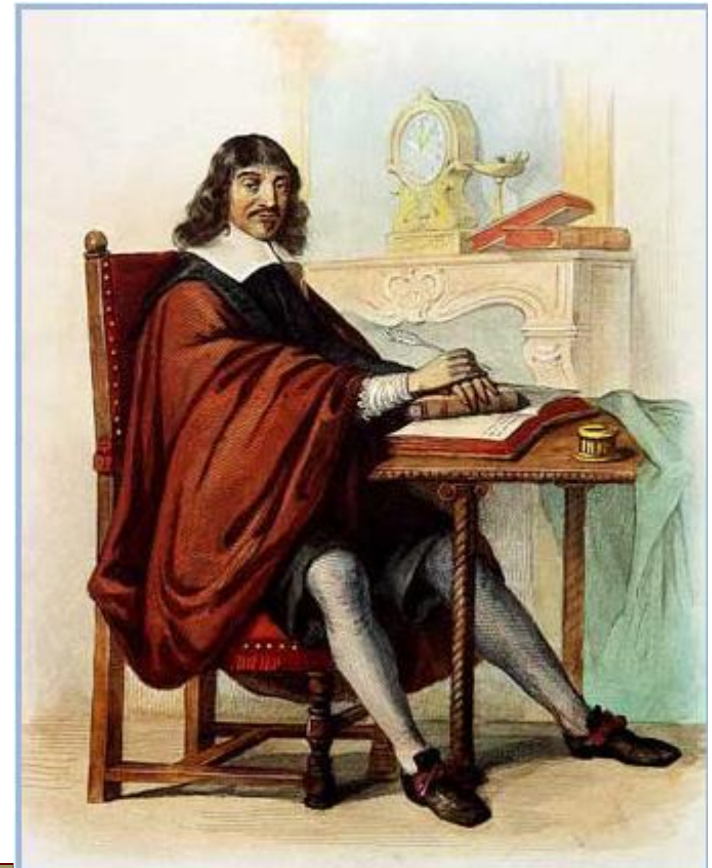
Решение:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{5}$$

Ответ: $\varphi = \arccos(-0.2)$

Рене Декарт предложил координатный метод

Метод позволяет описывать геометрические объекты аналитически, т.е. на языке алгебры.

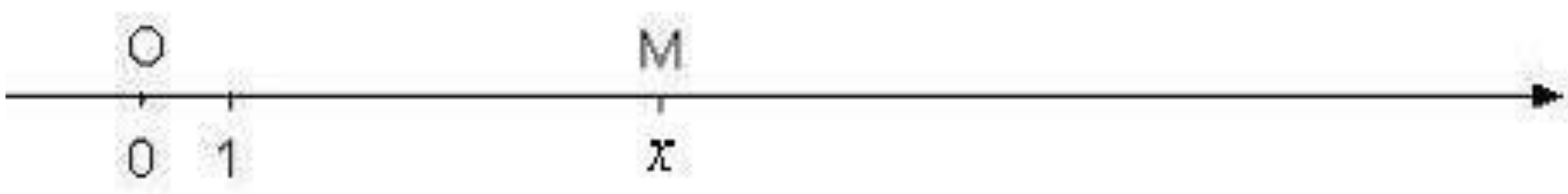


Одномерная система координат

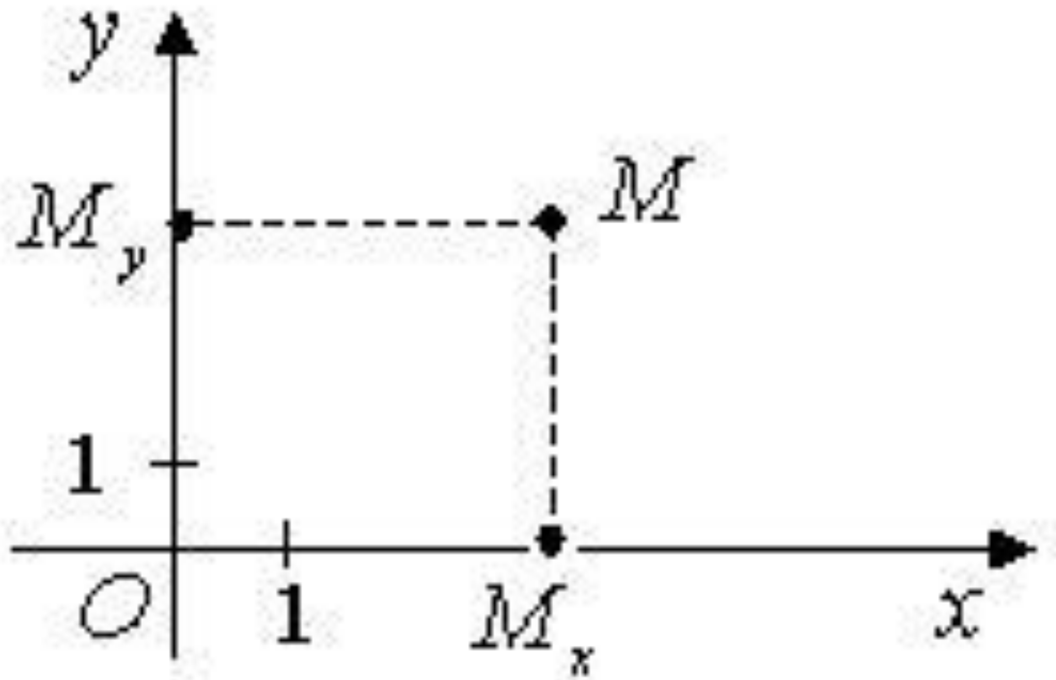
- Прямая с заданным направлением
- Задана точка – начало координат
- Выбран единичный масштаб

Координата точки

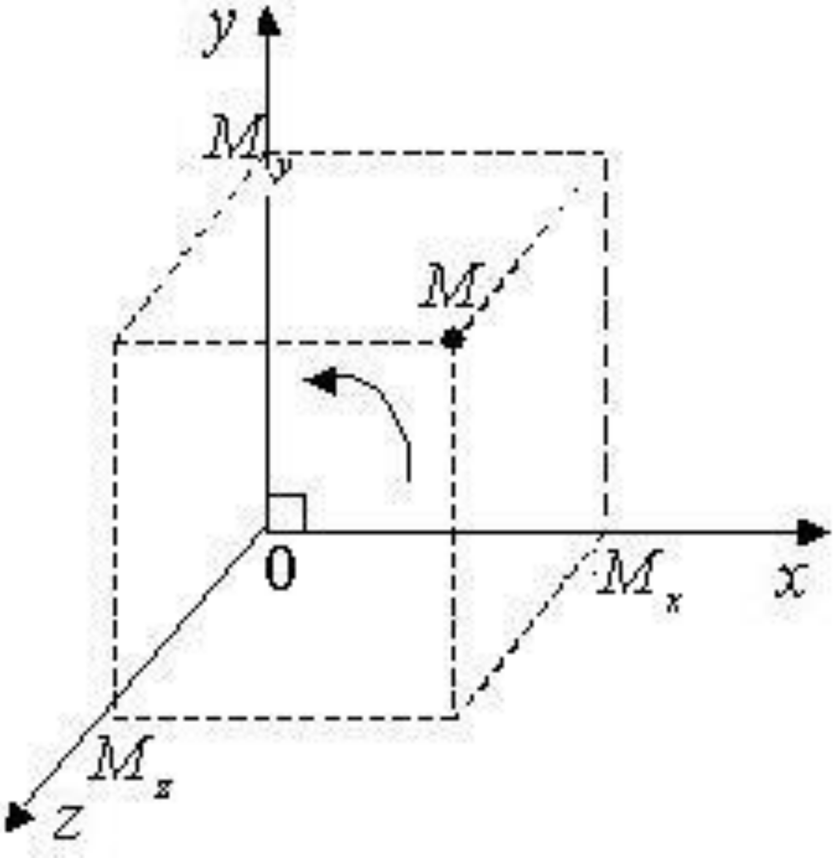
- Координата точки равна расстоянию от начала координат до заданной точки
- Координата положительна, если направление вектора $\overrightarrow{OM}$ совпадает с направлением координатной оси
- Иначе координата точки отрицательна



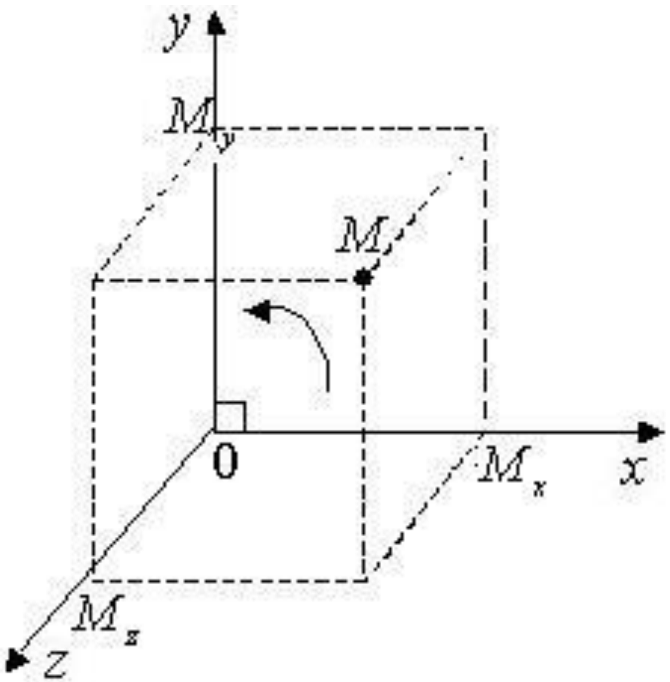
Двумерная система координат



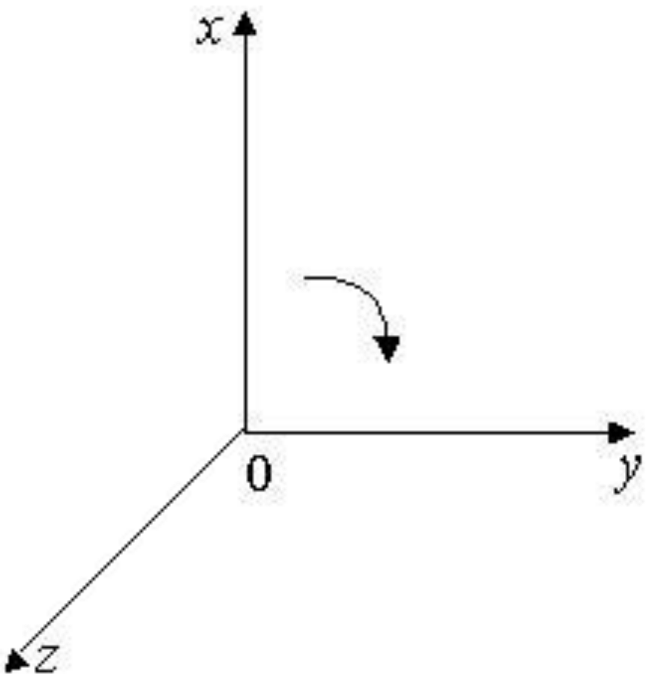
Трёхмерная система координат



- Правая система координат
- Левая система координат

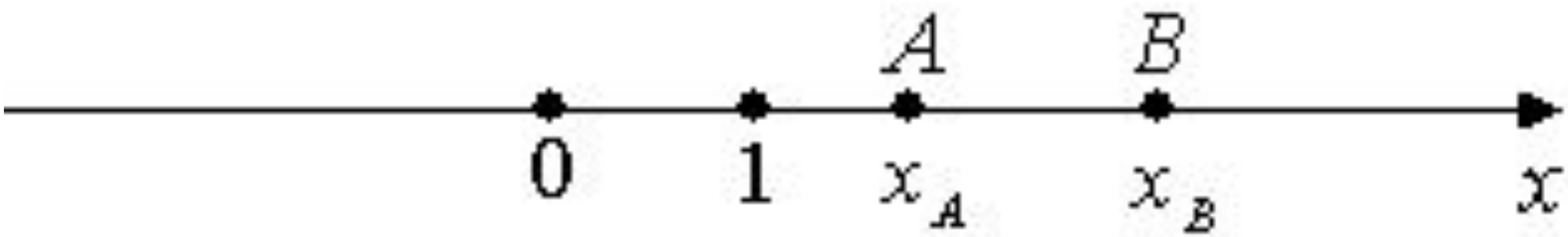


Поворот от оси *Ox* к оси *Oy* против часовой стрелки



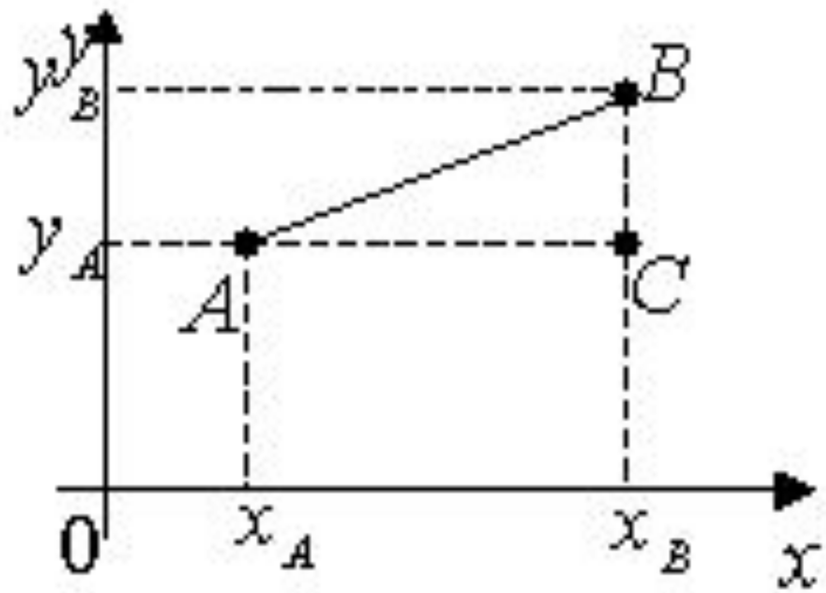
Поворот от оси *Oy* к оси *Ox* по часовой стрелке

Расстояние между точками на прямой линии



$$d=|x_A - x_B|$$

Расстояние между точками на плоскости



$$d=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Расстояние между точками в геометрическом пространстве

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Пример 3.

Дано:

A (1, -3, 5)

B (2, 4, -6)

d - ?

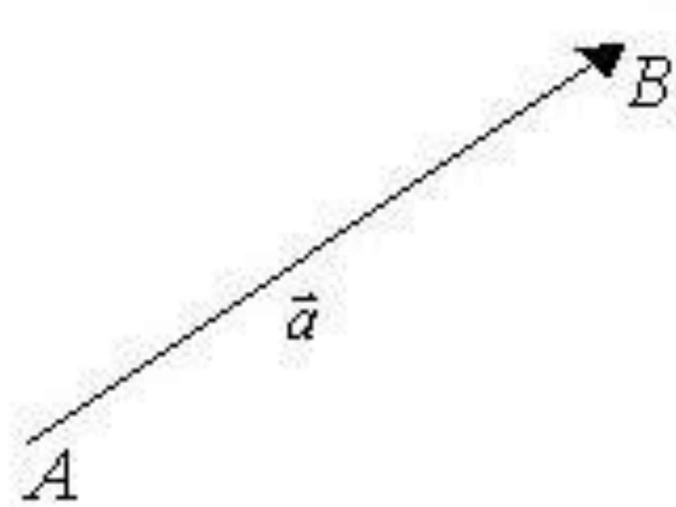
Решение:

$$d=\sqrt{(2-1)^2+(4-(-3))^2+(-6-5)^2}=\sqrt{1+49+121}=\sqrt{171}$$

Расстояние между точками пространства

- Длина вектора – это расстояние между двумя точками: началом и концом вектора

$$AB = |\vec{a}|$$



Расстояние между точками пространства

- Из определения скалярного произведения следует, что $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$, т.к. cos0=1.
- Следовательно, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. (расстояние между 2-я точками)
  - **Вывод.** Длину вектора можно найти с помощью операции скалярного произведения. В этом случае говорят, что в линейном векторном пространстве геометрических векторов введена <u>метрика</u>, т.е. способ вычисления расстояний между точками этого пространства.

Свойства длины вектора

- 1. $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- 2. $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, λ - вещественное число
- 3. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ - неравенство Коши-Буняковского
- 4. $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ - неравенство треугольника

Пример 3.

Вычислить длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$

Решение:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{(\vec{a})^2+2\vec{a}\vec{b}+(\vec{b})^2}=$$

$$=\sqrt{(\vec{a})^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b})^2}=\sqrt{3^2+2\cdot3\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{3}+5^2}=$$

$$=\sqrt{9+15+25}=\sqrt{49}=7.$$

Ортонормированный базис

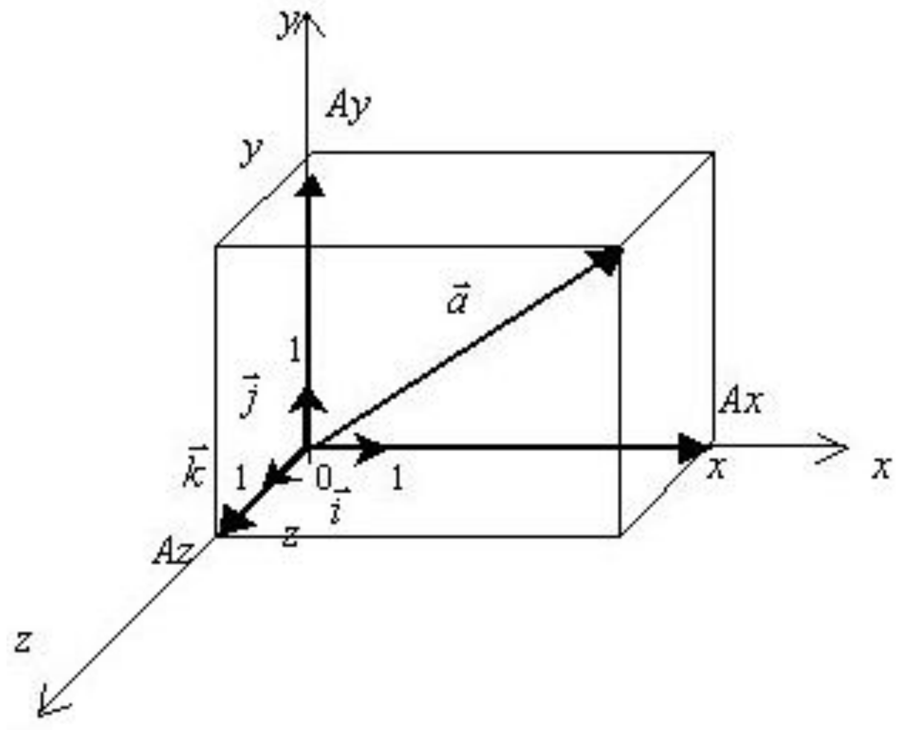
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$$

$$\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$$

$$\overrightarrow{OA_y} = y \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA_z} = z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$



Пример 4.

Известны координаты начальной и конечной точек вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(1,\ 3,\ -2)$ и $B(-1, 2, 7)$.

Разложить вектор $\overrightarrow{AB}$ по базису , , .

Решение. В примере 1 были найдены координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ (-2; -1; 9).

Следовательно $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$

Ответ: $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$

Пример 2.

Известны координаты начальной и конечной точек вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(1,\ 3,\ -2)$ и $B(-1, 2, 7)$.

Разложить вектор $\overrightarrow{AB}$ по базису , , .

Решение. В примере 1 были найдены координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ (-2; -1; 9).

Следовательно $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$

Ответ: $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$

Пример 2.

Известны координаты начальной и конечной точек вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(1, 3, -2)$ и $B(-1, 2, 7)$.

Разложить вектор $\overrightarrow{AB}$ по ортонормированному базису

Решение. В примере 1 были найдены координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ (-2; -1; 9).

Следовательно $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$

Ответ: $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$