

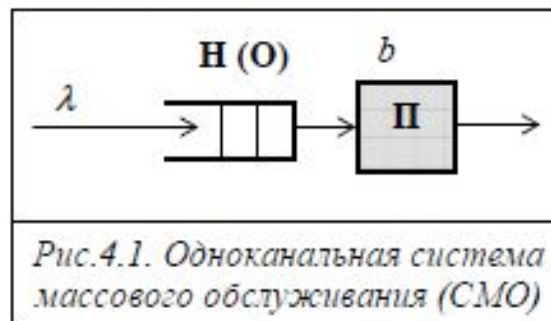
# АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## Одноканальные СМО с однородным потоком заявок

Рассмотрим одноканальную СМО с однородным потоком заявок при следующих предположениях (рис.4.1):

1) СМО содержит *один обслуживающий прибор*, в котором в каждый момент времени может обслуживаться только одна заявка;

2) перед прибором имеется накопитель **Н** *неограниченной ёмкости*, что означает отсутствие отказов поступающим заявкам при их постановке в очередь **О**, то есть любая поступающая заявка всегда найдет в накопителе место для ожидания независимо от того, сколько заявок уже находится в очереди;



3) заявки поступают в СМО с интенсивностью  $\lambda$ ;

4) средняя длительность обслуживания одной заявки в приборе равна  $b$ , причем длительности обслуживания разных заявок не зависят друг от друга;

5) обслуживающий прибор не простаивает, если в системе (накопителе) имеется хотя бы одна заявка, причем после завершения обслуживания очередной заявки мгновенно из накопителя выбирается следующая заявка;

6) заявки из накопителя выбираются в соответствии с беспriorитетной дисциплиной обслуживания в порядке поступления (ОПП) по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO – First In First Out).

7) в системе существует стационарный режим, предполагающий отсутствие перегрузок, то есть нагрузка  $\rho$ , следовательно, загрузка системы меньше 1:  $\rho = \lambda b < 1$ .

В качестве расчётной характеристики обслуживания заявок в СМО будем использовать среднее время ожидания заявок.

## Характеристики экспоненциальной СМО М/М/1

- времени ожидания заявок

$$w = \frac{\rho b}{1 - \rho}; \quad (4.1)$$

- времени пребывания заявок

$$u = w + b = \frac{b}{1 - \rho}; \quad (4.2)$$

- длины очереди заявок

$$l = \lambda w = \frac{\rho^2}{1 - \rho};$$

- числа заявок в системе (в очереди и на обслуживании)

$$m = \lambda u = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Из последнего выражения вытекает, что среднее число заявок в системе  $m = l + \rho$ , где второе слагаемое  $\rho$  определяет среднее число заявок, находящихся на обслуживании в приборе. Кроме того, сравнивая выражения (4.1) и (4.2) получим, что  $u = \rho w$ .

## Характеристики неэкспоненциальной СМО M/G/1

С использованием метода средних значений можно показать, что среднее время ожидания заявок определяется по формуле Поллачека-Хинчина [2]:

$$w = \frac{\lambda b^2 (1 + v_b^2)}{2(1 - \rho)} \quad (4.3)$$

где  $\rho = \lambda b < 1$  – загрузка системы.

Среднее время пребывания заявок в системе:

$$u = w + b = \frac{\lambda b^2 (1 + v_b^2)}{2(1 - \rho)} + b.$$

## Характеристики неэкспоненциальной СМО G/M/1

Среднее время ожидания заявок в очереди может быть рассчитано следующим образом [9]:

$$w = \zeta b / (1 - \zeta), \quad (4.4)$$

где  $\zeta$  – единственный в области  $0 < \zeta < 1$  корень уравнения

$$\zeta = A^*(\mu - \mu\zeta). \quad (4.5)$$

Здесь  $A^*(s)$  – преобразование Лапласа плотности распределения  $a(\tau)$  интервалов между поступающими в систему заявками:

$$A^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} a(\tau) d\tau \quad (s \geq 0).$$



## Характеристики СМО общего вида

G/G/1

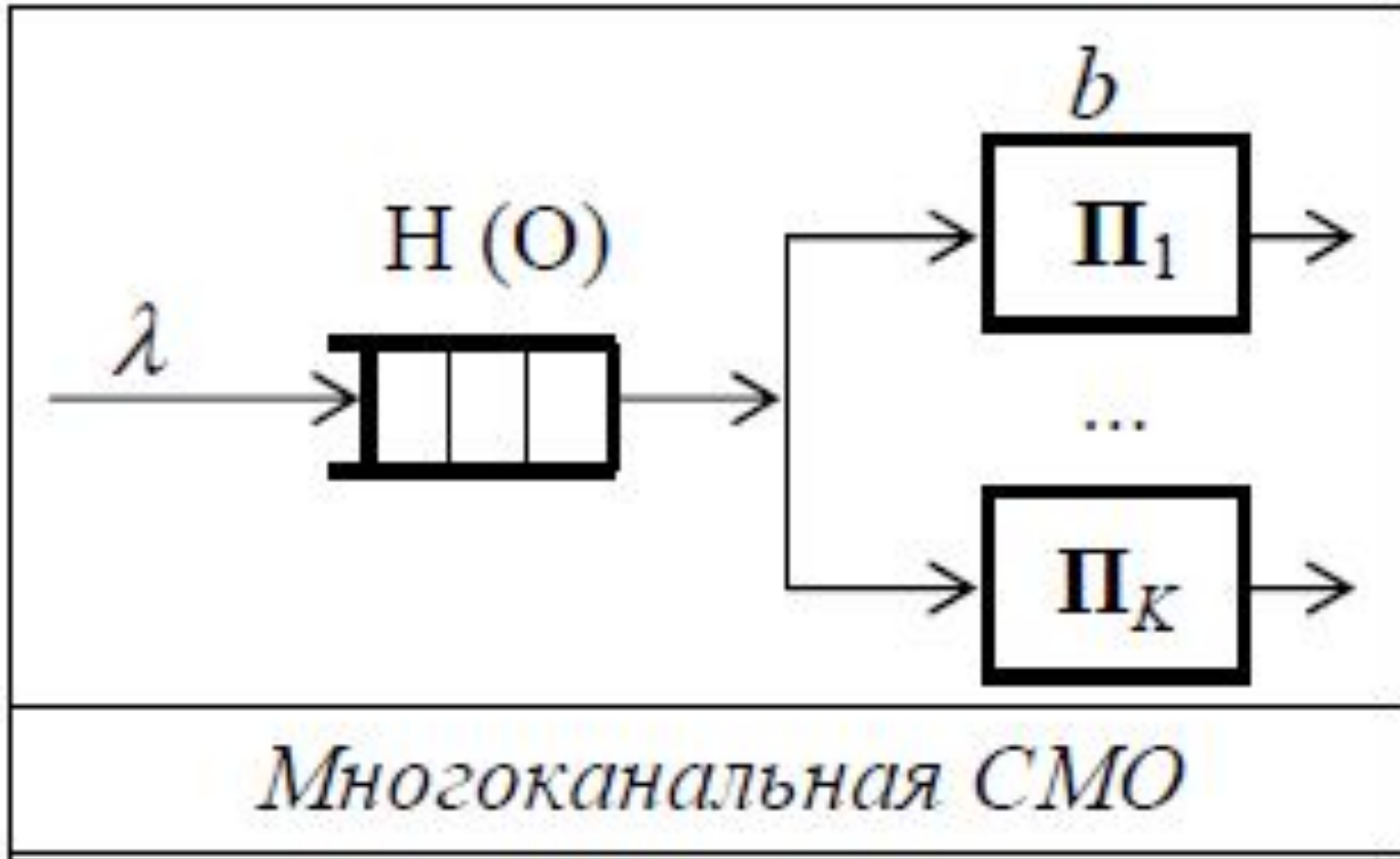
Как показал анализ многочисленных опубликованных результатов, одним из наиболее удачных приближений для расчета среднего времени ожидания в СМО G/G/1 является следующая формула [17]:

$$\tilde{w} \approx \frac{\rho b (v_a^2 + v_b^2)}{2(1-\rho)} f(v_a), \quad (4.6)$$

где  $\rho = \lambda b < 1$  – загрузка системы;  $\lambda$ ,  $v_a$  – интенсивность потока заявок и коэффициент вариации интервалов между поступающими в систему заявками;  $b$ ,  $v_b$  – среднее значение и коэффициент вариации длительности обслуживания заявок;  $f(v_a)$  – корректирующая функция, рассчитываемая в зависимости от значения коэффициента вариации  $v_a$ :

$$f(v_a) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{2(1-\rho)(1-v_a^2)^2}{3\rho(v_a^2+v_b^2)}\right], & v_a < 1 \\ \exp\left[-(1-\rho)\frac{v_a^2-1}{v_a^2+4v_b^2}\right], & v_a \geq 1. \end{cases}$$

**Многоканальные СМО с однородным потоком заявок**



## Характеристики многоканальной СМО М/М/К

В качестве основной характеристики функционирования СМО, будем использовать среднее время ожидания  $w$  заявок.

Точный метод расчета характеристик обслуживания заявок в многоканальной СМО разработан при следующих предположениях:

- поток заявок – *простейший*;
- длительность обслуживания заявок распределена по *экспоненциальному* закону со средним значением  $b$ ;
- все  $K$  приборов – *идентичны*, и любая заявка может быть обслужена любым прибором;
- ёмкость накопителя – *не ограничена*;
- в системе *отсутствуют перегрузки*, то есть загрузка системы

меньше 1: 
$$\rho = \frac{\lambda b}{K} < 1$$

При этих предположениях среднее время ожидания заявок определяется следующим образом:

$$w = \frac{Pb}{K(1-\rho)}, \quad (4.8)$$

где  $P$  – вероятность того, что все  $K$  приборов заняты обслуживанием заявок.

Вероятность  $P$  определяется как:

$$P = \frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} P_0,$$

где  $P_0$  – вероятность простоя многоканальной СМО, то есть вероятность того, что в системе нет заявок:

$$P_0 = \left[ \frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(K\rho)^i}{i!} \right]^{-1}.$$



## Характеристики и свойства ДО БП

При беспriorитетной ДО средние времена ожидания одинаковы для всех классов заявок и определяются по следующей формуле:

$$w_k^{\text{БП}} = w^{\text{БП}} = \frac{\sum_{i=1}^H \lambda_i b_i^2 (1 + v_{b_i}^2)}{2(1 - R)} \quad (k = 1, \dots, H), \quad (4.9)$$

где  $R = \sum_{i=1}^H \rho_i = \sum_{i=1}^H \lambda_i b_i$  – суммарная загрузка системы.

Выражение (4.5) получено в предположении, что в системе существует стационарный режим и отсутствует перегрузка:  $R < 1$ .

## Характеристики и свойства

Приоритеты называются **относительными**, если они учитываются только в момент выбора заявки на обслуживание и не сказываются на работе системы в период обслуживания заявки любого класса (приоритета).

Для ДО ОП среднее время ожидания заявок класса  $k$  определяется по следующей формуле:

$$w_k^{\text{ОП}} = \frac{\sum_{i=1}^H \lambda_i b_i^2 (1 + \nu_{b_i}^2)}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} \quad (k = 1, \dots, H), \quad (4.10)$$

где  $R_{k-1}$  и  $R_k$  – суммарные загрузки, создаваемые заявками, которые имеют приоритет не ниже  $(k-1)$  и  $k$  соответственно:

$$R_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i; \quad R_k = \sum_{i=1}^k \rho_i. \quad (4.11)$$