АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Одноканальные СМО с однородным потоком заявок

Рассмотрим одноканальную СМО с однородным потоком заявок при следующих предположениях (рис.4.1):

1) СМО содержит *один обслуживающий прибор*, в котором в каждый момент времени может обслуживаться только одна заявка;

2) перед прибором имеется накопитель **Н** *неограниченной ёмкости*, что означает отсутствие отказов поступающим заявкам при их постановке в очередь **О**, то есть любая поступающая заявка всегда найдет в накопителе место для ожидания независимо от того, сколько заявок уже находится в очереди;

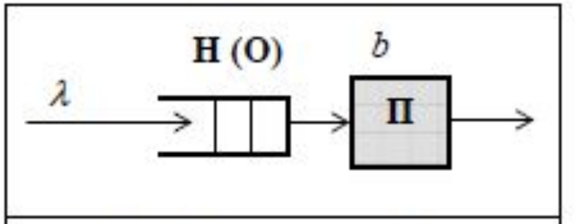


Рис.4.1. Одноканальная система массового обслуживания (СМО)

3) заявки поступают в СМО с интенсивностью λ;

4) средняя длительность обслуживания одной заявки в приборе равна b, причем длительности обслуживания разных заявок не зависят друг от друга;

5) обслуживающий прибор не простаивает, если в системе (накопителе) имеется хотя бы одна заявка, причем после завершения обслуживания очередной заявки мгновенно из накопителя выбирается следующая заявка;

6) заявки из накопителя выбираются в соответствии с бесприоритетной дисциплиной обслуживания в порядке поступления (ОПП) по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO – First In First Out).

7) в системе существует стационарный режим, предполагающий отсутствие перегрузок, то есть нагрузка и, следовательно, загрузка системы меньше 1: $y = \rho = \lambda b < 1$.

В качестве расчётной характеристики обслуживания заявок в СМО будем использовать среднее время ожидания заявок.

Характеристики экспоненциальной СМО M/M/1

- времени ожидания заявок

$$\boxed{w = \frac{\rho b}{1-\rho}}; \tag{4.1}$$

- времени пребывания заявок

$$\boxed{u = w + b = \frac{b}{1-\rho}}; \tag{4.2}$$

- длины очереди заявок

$$l = \lambda w = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

- числа заявок в системе (в очереди и на обслуживании)

$$m = \lambda u = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Из последнего выражения вытекает, что среднее число заявок в системе $m = l + \rho$, где второе слагаемое ρ определяет среднее число заявок, находящихся на обслуживании в приборе. Кроме того, сравнивая выражения (4.1) и (4.2) получим, что $u = \rho w$.

Характеристики неэкспоненциальной СМО M/G/1

С использованием метода средних значений можно показать, что среднее время ожидания заявок определяется по формуле Поллачека-Хинчина [2]:

$$\boxed{w=\frac{\lambda b^2(1+{v_b}^2)}{2(1-\rho)}}, \qquad (4.3)$$

где $\rho=\lambda b<1$ – загрузка системы.

Среднее время пребывания заявок в системе:

$$u=w+b=\frac{\lambda b^2(1+{v_b}^2)}{2(1-\rho)}+b.$$

Характеристики неэкспоненциальной СМО G/M/1

Среднее время ожидания заявок в очереди может быть рассчитано следующим образом [9]:

$$w = \varsigma b / (1 - \varsigma), \tag{4.4}$$

где ς – единственный в области $0 < \varsigma < 1$ корень уравнения

$$\varsigma = A^{*}(\mu - \mu\varsigma). \tag{4.5}$$

Здесь $A^{*}(s)$ – преобразование Лапласа плотности распределения $a(\tau)$ интервалов между поступающими в систему заявками:

$$A^{*}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-s\tau} a(\tau) d\tau \qquad (s \geq 0).$$

Характеристики СМО общего вида G/G/1

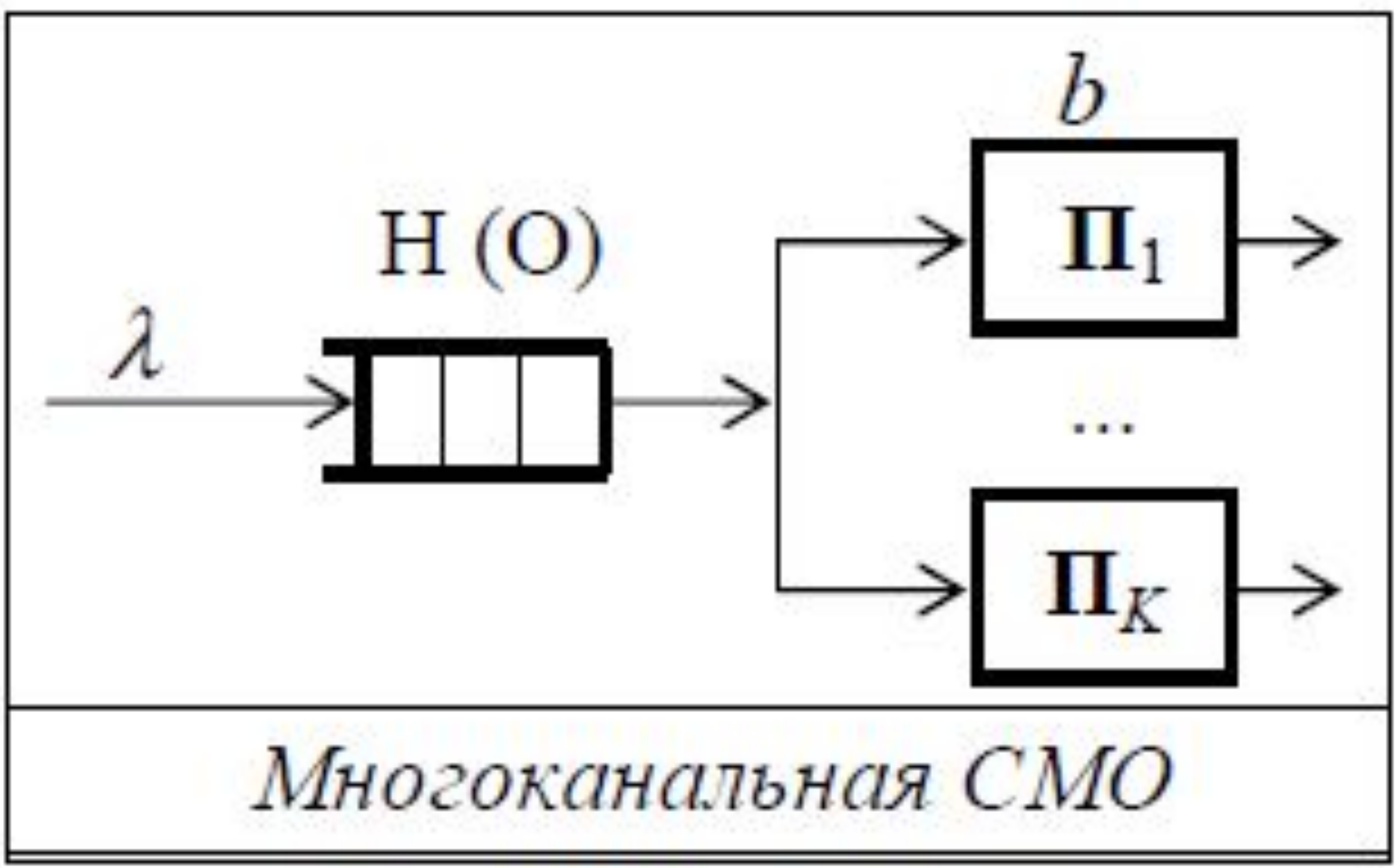
Как показал анализ многочисленных опубликованных результатов, одним из наиболее удачных приближений для расчета среднего времени ожидания в СМО G/G/1 является следующая формула [17]:

$$\boxed{\tilde{w} \approx \frac{\rho b (v_a^2 + v_b^2)}{2(1-\rho)} f(v_a)}, \tag{4.6}$$

где $\rho = \lambda b < 1$ – загрузка системы; λ, v_a – интенсивность потока заявок и коэффициент вариации интервалов между поступающими в систему заявками; b, v_b – среднее значение и коэффициент вариации длительности обслуживания заявок; $f(v_a)$ – корректирующая функция, рассчитываемая в зависимости от значения коэффициента вариации v_a:

$$f(v_a) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{2(1-\rho)(1-v_a^2)^2}{3\rho(v_a^2+v_b^2)}\right], & v_a < 1 \\ \exp\left[-(1-\rho)\dfrac{v_a^2-1}{v_a^2+4v_b^2}\right], & v_a \ge 1. \end{cases}$$

Многоканальные СМО с однородным потоком заявок



Характеристики многоканальной СМО M/M/K

В качестве основной характеристики функционирования СМО, будем использовать среднее время ожидания w заявок.

Точный метод расчета характеристик обслуживания заявок в многоканальной СМО разработан при следующих предположениях:

- поток заявок – *простейший*;
- длительность обслуживания заявок распределена по *экспоненциальному* закону со средним значением b;
- все K приборов – *идентичны*, и любая заявка может быть обслужена любым прибором;
- ёмкость накопителя – *не ограничена*;
- в системе *отсутствуют перегрузки*, то есть загрузка системы меньше 1: $\rho = \dfrac{\lambda b}{K} < 1$

При этих предположениях среднее время ожидания заявок определяется следующим образом:

$$w = \frac{Pb}{K(1-\rho)}, \tag{4.8}$$

где P – вероятность того, что все K приборов заняты обслуживанием заявок.

Вероятность P определяется как:

$$P = \frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} P_0,$$

где P_0 – вероятность простоя многоканальной СМО, то есть вероятность того, что в системе нет заявок:

$$P_0 = \left[\frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(K\rho)^i}{i!} \right]^{-1}.$$

Характеристики и свойства ДО БП

При бесприоритетной ДО средние времена ожидания одинаковы для всех классов заявок и определяются по следующей формуле:

$$w_k^{\text{БП}} = w^{\text{БП}} = \frac{\sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i^2 (1 + \nu_{b_i}^2)}{2(1-R)} \qquad (k = 1, \ldots, H), \tag{4.9}$$

где $R = \sum_{i=1}^{H} \rho_i = \sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i$ – суммарная загрузка системы.

Выражение (4.5) получено в предположении, что в системе существует стационарный режим и отсутствует перегрузка: $R < 1$.

Характеристики и свойства ДО ОП

Приоритеты называются ***относительными***, если они учитываются только в момент выбора заявки на обслуживание и не сказываются на работе системы в период обслуживания заявки любого класса (приоритета).

Для ДО ОП среднее время ожидания заявок класса k определяется по следующей формуле:

$$w_k^{\text{ОП}} = \frac{\sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i^2 (1 + \nu_{b_i}^2)}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} \qquad (k = 1, \ldots, H), \tag{4.10}$$

где R_{k-1} и R_k – суммарные загрузки, создаваемые заявками, которые имеют приоритет не ниже $(k-1)$ и k соответственно:

$$R_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i; \qquad R_k = \sum_{i=1}^{k} \rho_i. \tag{4.11}$$