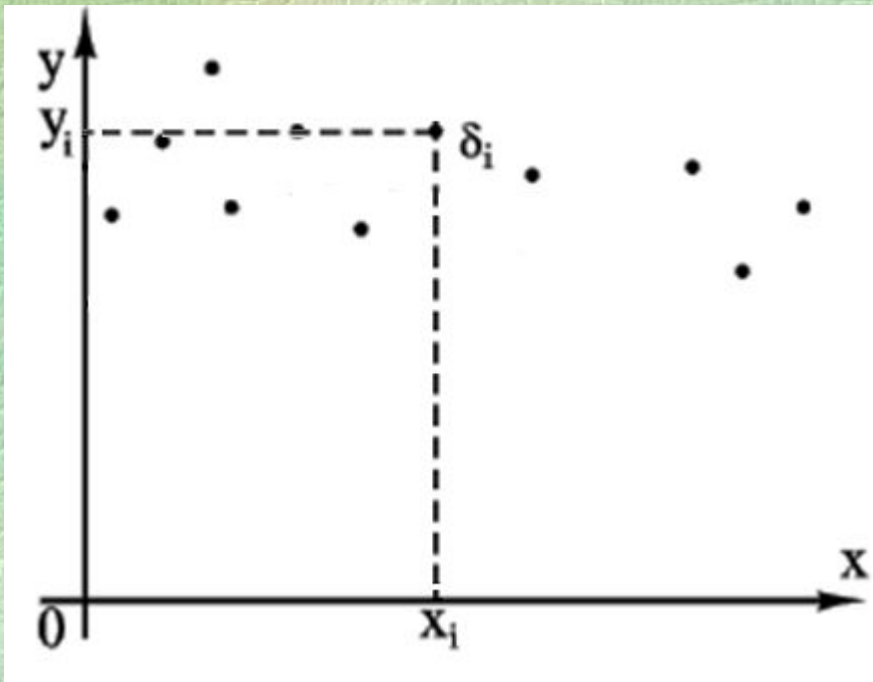


Аппроксимация функций
Метод наименьших квадратов.
Регрессионный анализ.

Понятие «аппроксимация функции»

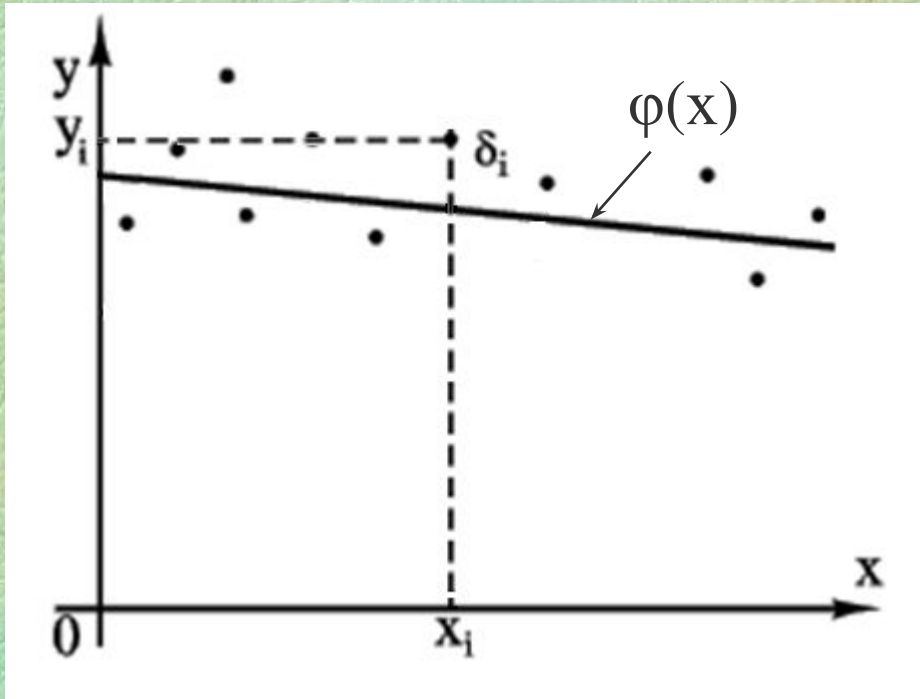
Аппроксимация (от лат. *approximare* приближаться) - научный метод, состоящий в замене одних функций другими, близкими к исходным, но более простыми. Исходная функция $F(x)$ может быть представлена в виде графика (графиков), таблицы значений функции с соответствующими значениями аргументов.



Пусть задана функция $y = F(x)$
группой n точек x_i, y_i :

$$\left. \begin{array}{l} x_1, y_1, \\ x_2, y_2, \\ \dots \\ x_n, y_n \end{array} \right\} \quad (1)$$

Требуется найти такое уравнение функции $\varphi(x)$, которое наилучшим образом соответствовала бы функции $F(x)$.



δ_i — расстояние от i -той точки до функции $\varphi(x)$

Замена функции $F(x)$ на приближенную функцию $\varphi(x)$ называется аппроксимацией.

Соответственно $\varphi(x)$ называется аппроксимирующей функцией $F(x)$

Функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде ряда Тейлора:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \dots \\ + a_{k,k-1} x_k x_{k-1} + \dots + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{kk} x_k^2 + \dots$$

На практике применяются полиномы более простого вида:

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ - для однопараметрической зависимости;

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ - для многопараметрической зависимости;

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + \\ + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \dots + a_{(n-1)n} x_{n-1} x_n + \\ + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$ - для многопараметрической зависимости с учетом парных взаимодействий,

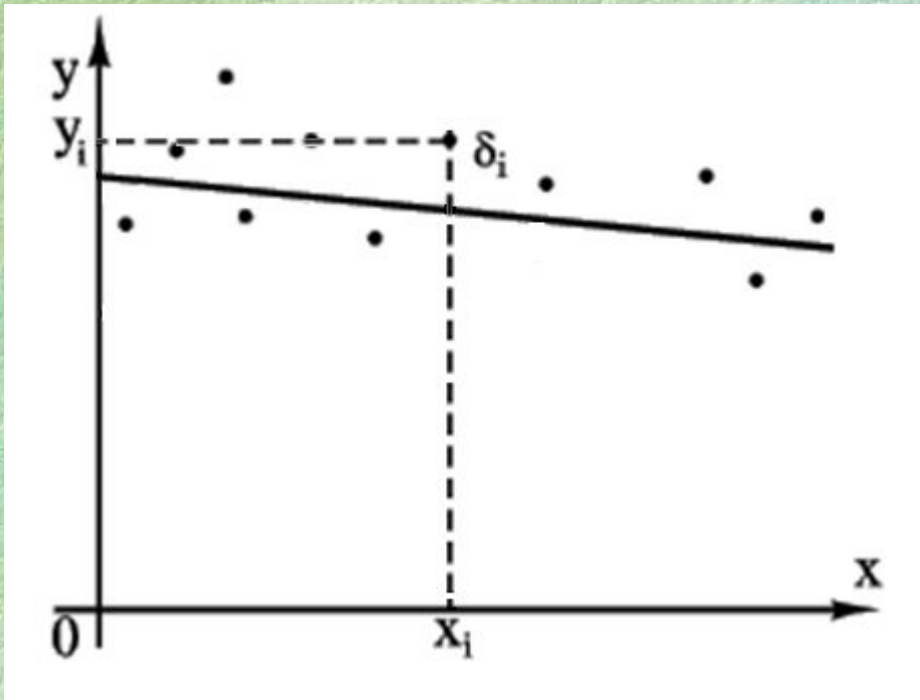
где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - являются неизвестными коэффициентами уравнения, которые определяются методом наименьших квадратов (МНК).

Суть метода наименьших квадратов

Рассмотрим применение МНК в случае применения линейного полинома:

$$\varphi(x) = y = a + bx \quad (2)$$

Пусть мы нашли такую прямую.



Обозначим через δ_i расстояние точки x_i от этой прямой, измеренное параллельно оси y .

Из уравнения (2) следует, что

$$\delta_i = y_i - bx_i - a \quad (3)$$

Чем меньше числа δ_i по абсолютной величине, тем лучше подобрана прямая (2). В качестве характеристики точности подбора прямой (2) можно принять сумму квадратов:

$$SS = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \quad (4)$$

Покажем, как можно подобрать прямую (2) так, чтобы сумма квадратов SS была минимальной.

Из уравнений (3) и (4) получаем:

$$SS = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2 \quad (5)$$

Условия минимума SS будут:

$$\frac{\partial SS}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial SS}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)x_i = 0 \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) можно записать в таком виде:

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = b \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = b \sum_{i=1}^n x_i + na \quad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) определяют неизвестные коэффициенты a и b :

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{(\sum x_i)^2 + n \sum x_i^2} ;$$

$$a = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n}$$

Пример.

В результате эксперимента получены значения x и y , сведенные в таблицу:

x	1	2	3	4	5	6
y	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0

Найти аппроксимирующую функцию (2) по методу наименьших квадратов.

Решение: Определяем:

Записываем уравнения (8) и (9):

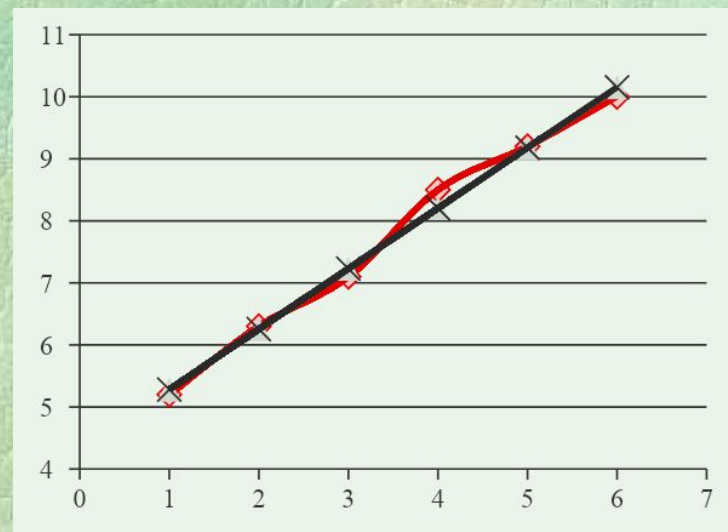
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i y_i$
21	46	91	179

$$21a + 91b = 179,1,$$

$$6a + 21b = 46,3,$$

отсюда находим: $a = 4,3$; $b = 0,98$.

Итоговая формула: $y(x) = 4,3 + 0,98x$



По аналогичной схеме определяются неизвестные коэффициенты в случае применения полиномов:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

На практике наиболее часто используются полиномы второй и третьей степени. Для полинома второй степени имеем:

$$\delta_i = y_i - cx_i^2 - bx_i - a$$

$$SS = \sum_{i=1}^n (y_i - cx_i^2 - bx_i - a)^2$$

Корректные результаты с помощью аппроксимирующей функции можно получить при расчетах только в интервале заданных значений x_i .

Многопараметрическая аппроксимация

Если необходимо учитывать парные взаимодействия параметров, то, как правило, применяется линейный полином следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k + \\ & + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \dots + a_{(k-1)k} x_{k-1} x_k \end{aligned} \quad (10)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_{12} = a_{k+1}; \quad x_1 x_2 = x_{k+1};$$

$$a_{13} = a_{k+2}; \quad x_1 x_3 = x_{k+2};$$

.....

$$a_p = a_m; \quad x_{p-1} x_p = x_m$$

Тогда уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$\varphi(x) = y_p = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k + a_{k+1} x_{k+1} + \dots + a_m x_m = \sum_{i=1}^m a_i x_i$$

где x_0 – фиктивное переменное, равное 1.

Пусть в каждой узловой точке проведено по одному опыту. Рассмотрим таблицу экспериментальных данных, содержащую N строк:

Номер опыта u	Уровни факторов				y_u
	x_{1u}	x_{2u}	\dots	x_{ku}	
1	x_{11}	x_{21}	\dots	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	\dots	x_{k2}	y_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
N	x_{1N}	x_{2N}	\dots	x_{kN}	y_N

где k – счетчик количества входных параметров;

u – счетчик количества узловых точек эксперимента, $u=1, 2, \dots, N$;

N – число узловых точек, а также число опытов;

i – счетчик количества членов регрессии, $i=1, 2, \dots, m$;

Для этих же целей потребуется еще один счетчик – $j=1, 2, \dots, m$.

Для нахождения неизвестных a_0, a_1, \dots, a_m нужно определить частные производные суммы квадратов:

$$\frac{\partial SS}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial SS}{\partial a_1} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial SS}{\partial a_m} = 0.$$

$$SS = [(y_1 - a_0 x_{01} - a_1 x_{11} - \dots - a_m x_{m1})^2 + \text{(первая строка таблицы)} \\ + (y_2 - a_0 x_{02} - a_1 x_{12} - \dots - a_m x_{m2})^2 + \text{(вторая строка таблицы)} \\ \dots \dots \dots \\ + (y_N - a_0 x_{0N} - a_1 x_{1N} - \dots - a_m x_{mN})^2] \text{ (N-ая строка таблицы)}$$

В качестве примера рассмотрим частную производную по a_0 только от первой строки:

$$2a_0 x_{01} x_{01} + 2a_1 x_{01} x_{11} + 2a_2 x_{01} x_{21} + \dots + 2a_m x_{01} x_{m+1} - 2x_{01} y_1$$

Проведем суммирование по всем строкам, затем выполним аналогичные действия по другим производным и получим систему нормальных уравнений:

$$a_0 \sum_u^N x_{0u}x_{0u} + a_1 \sum_u^N x_{0u}x_{1u} + \dots + a_m \sum_u^N x_{0u}x_{mu} = \sum_u^N x_{0u}y_u;$$

$$a_0 \sum_u^N x_{1u}x_{0u} + a_1 \sum_u^N x_{1u}x_{1u} + \dots + a_m \sum_u^N x_{1u}x_{mu} = \sum_u^N x_{1u}y_u;$$

$$\dots$$
$$a_0 \sum_u^N x_{mu}x_{0u} + a_1 \sum_u^N x_{mu}x_{1u} + \dots + a_m \sum_u^N x_{mu}x_{mu} = \sum_u^N x_{mu}y_u$$

Для упрощения записи системы нормальных уравнений введем обозначения:

$$\sum_u^N x_{iu}x_{ju} = ij \quad \text{и} \quad \sum_u^N x_{iu}y_u = jy$$

Тогда матрицы (ij) и (jy) примут следующий вид:

$$(ij) = \begin{pmatrix} 00 & 01 & \dots & 0m \\ 10 & 11 & \dots & 1m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m0 & m1 & \dots & mm \end{pmatrix} \quad (jy) = \begin{pmatrix} 0y \\ 1y \\ \dots \\ my \end{pmatrix}$$

где индекс i определяет номер столбца, а j – номер строки.

Матрица (ij) называется **нормальной** или **информационной**.

Она является **квадратной** и **симметричной**.

(jy) – это столбец свободных членов.

После этого **систему нормальных уравнений** можно записать в матричной форме следующим образом:

$$(a_i)(ij)=(jy) , \quad (11)$$

где (a_i) – строка неизвестных (коэффициентов регрессии).

Систему (11) можно решить с помощью обратной матрицы (C_{ij}) :

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0m} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m0} & C_{m1} & \dots & C_{mm} \end{pmatrix}$$

Тогда неизвестные a_i можно рассчитать по формуле:

$$a_i = \sum_{j=0}^m [C_{ij}(ij)]$$

Т.е. для нахождения коэффициента a_i нужно все элементы i -того столбца перемножить на элементы соответствующей строки матрицы (ij) . Например:

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{01}(0y) + C_{11}(1y) + \dots + C_{m1}(my) = \\ &= C_{01} \sum_{u=1}^N x_{0u} y_u + C_{11} \sum_{u=1}^N x_{1u} y_u + \dots + C_{m1} \sum_{u=1}^N x_{mu} y_u \end{aligned}$$

Рассмотрим пример:

По экспериментальным данным, представленным в таблице, построить линейную регрессионную модель следующего вида:

$$y_p = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2$$

План эксперимента, в которых используется линейная модель, называются планами первого порядка.

x1	x2							
	2,0		4,0		6,0		8,0	
3,0	15,1	15,3	17,3	17,5	19,6	19,8	22,0	22,0
	15,3		17,8		19,8		21,8	
	15,4		17,4		20,0		22,2	
6,0	14,2	14,4	16,9	17,1	20,0	20,0	22,6	22,8
	14,7		17,3		20,1		22,8	
	14,4		17,1		19,8		23,0	
9,0	13,3	13,3	16,6	16,6	19,9	19,9	23,5	23,5
	13,2		16,8		20,0		23,6	
	13,4		16,4		19,8		23,5	

1. Запишем исходные данные в следующем виде:

u	X_{0u}	X_{1u}	X_{2u}	X_{3u}	Y_u
1	1	3	2	6	15,3
2	1	3	4	12	17,5
3	1	3	6	18	19,8
4	1	3	8	24	22,0
5	1	6	2	12	14,4
6	1	6	4	24	17,1
7	1	6	6	36	20,0
8	1	6	8	48	22,8
9	1	9	2	18	13,3
10	1	9	4	36	16,6
11	1	9	6	54	19,9
12	1	9	8	72	23,5

где x_{0u} – фиктивное переменное, равное 1;

$$x_{3u} = x_{1u}x_{2u}; \quad y_u = y_{cp}$$

2. Построим матрицы (ij) и (jy):

	00	01	02	03		12	72	60	360
	10	11	12	13		72	504	360	2520
(ij)=	20	21	22	23	=	60	360	360	2160
	30	31	32	33		360	2520	2160	15120

где компоненты матрицы (ij) рассчитываются следующим образом:

$$(00) = \sum_{u=1}^N x_{0u}x_{0u} = 1 * 1 + 1 * 1 + \dots + 1 * 1 = 12$$

$$(12) = \sum_{u=1}^N x_{1u}x_{2u} = 3 * 2 + 3 * 4 + \dots + 9 * 8 = 360$$

При использовании Excel для определения компонентов матрицы (ij) целесообразно применять функцию =СУММПРОИЗВ.

	0y		222,2
	1y		1329,3
(jy)=	2y =		1195,4
	3y		7187,4

где компоненты матрицы (jy) рассчитываются следующим образом:

$$(3y) = \sum_{u=1}^N x_{3u} y_u = 6 * 15,3 + 12 * 17,5 + \dots + 72 * 23,5 = 7187,4$$

3. Построим обратную матрицу (C_{ij}) с помощью Excel. Сначала следует убедиться, что определитель матрицы (ij) не равен 0. В противном случае нельзя построить обратную матрицу.

Определитель рассчитываем с помощью функции =МОПРЕД.

Определитель = 18662400

Компоненты матрицы (C_{ij}) рассчитываются с помощью функции =МОБР.

Эта функция первоначально отображает только первый компонент матрицы. Поэтому далее следует выделить интервал ячеек, начиная с первоначальной ячейки, в которых будут выведены остальные компоненты матрицы (C_{ij}). После этого нажать клавишу F2 и далее сочетание клавиш Contr+Shift+Enter.

В итоге получим:

	3,5	-0,5	-0,583333	0,0833333
	-0,5	0,0833333	0,0833333	-0,01389
$(C_{ij})=$	-0,583333	0,0833333	0,116667	-0,01667
	0,0833333	-0,01389	-0,01667	0,002778

4. Рассчитаем коэффициенты регрессии по формуле:

$$a_i = \sum_{j=0}^m [C_{ij}(ij)]$$

Например:

$$a_0 = 3,5*222,2-0,5*1329,3-0,583*1194,4+0,0833*7187,4=14,68$$

Остальные коэффициенты регрессии равны:

	14,68333
	-0,533333
$a_i =$	0,831667
	0,095833

5. Запишем итоговую формулу и проведем расчеты:

$$y_p = 14,68333 - 0,53333 * x_1 + 0,831667 * x_2 + 0,095833 * x_1 * x_2$$

u	x_{0u}	x_{1u}	x_{2u}	x_{3u}	y_u	y_p
1	1	3	2	6	15,3	15,322
2	1	3	4	12	17,5	17,560
3	1	3	6	18	19,8	19,798
4	1	3	8	24	22	22,037
5	1	6	2	12	14,4	14,297
6	1	6	4	24	17,1	17,110
7	1	6	6	36	20	19,923
8	1	6	8	48	22,8	22,737
9	1	9	2	18	13,3	13,272
10	1	9	4	36	16,6	16,660
11	1	9	6	54	19,9	20,048
12	1	9	8	72	23,5	23,437

Однако полученное решение не является идеальным, т.к. недиагональные компоненты обратной матрицы C_{ij} не равны 0, что приводит к ошибке вычислений.

Количественной мерой оценки ошибки вычислений служит коэффициент ковариации $\rho(a_i, a_j)$:

$$\rho(a_i, a_j) = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}}$$

$\rho(a_i, a_j)$ меняется от -1 до +1.

Если $\rho(a_i, a_j) = 0$, то ошибка вычислений a_i не влияет на вычисление a_j .

Чем ближе $\rho(a_i, a_j)$ к -1, либо +1, тем больше это влияние.

В рассмотренной задаче $\rho(a_i, a_j)$ равны:

$\rho(a_0, a_1) = -0,92582$	$\rho(a_1, a_0) = -0,92582$	$\rho(a_2, a_0) = -0,91287$
$\rho(a_0, a_2) = -0,91287$	$\rho(a_1, a_2) = 0,845154$	$\rho(a_2, a_1) = 0,845154$
$\rho(a_0, a_3) = 0,845154$	$\rho(a_1, a_3) = -0,91287$	$\rho(a_2, a_3) = -0,92582$

Пример расчета $\rho(a_0, a_1) = -0,5/(3,5+0,083)^{0,5} = -0,925$

Следовательно, рассмотренный план эксперимента не является оптимальным.

Матрица (C_{ij}) также называется **матрицей ошибок**, т.к. точность вычисления коэффициентов регрессии a_i зависит от значений ее элементов.

В этой связи, эффективными планами являются так называемые **рототабельные** и **ортогональные** планы.

Рототабельные планы

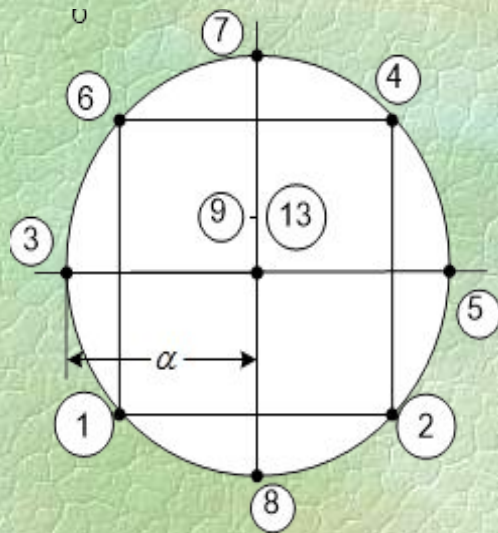
Точность эмпирических формул, полученных по методике планирования эксперимента, зависит от равномерности расположения узловых точек относительно центра плана эксперимента. Равномерность такого

распределения можно оценить с помощью дисперсии расчетного значения y_p , которая равна:

$$S^2(y_{pu}) = \sum_{i=1}^m x_{iu}^2 S^2(a_i)$$

Дисперсия $S^2(y_{pu})$ представляет собой эллипсоид, который называется эллипсоидом рассеяния. Чем меньше эллипсоид рассеяния, тем с большей точностью расчетное значение y_{pu} совпадает с экспериментальным y_u .

Планы, которые требуют, чтобы рассеяние по всем осям было одинаковым, называется рототабельными. Они достигаются при определенных соотношениях элементов в матрице ошибок.



Ортогональные планы

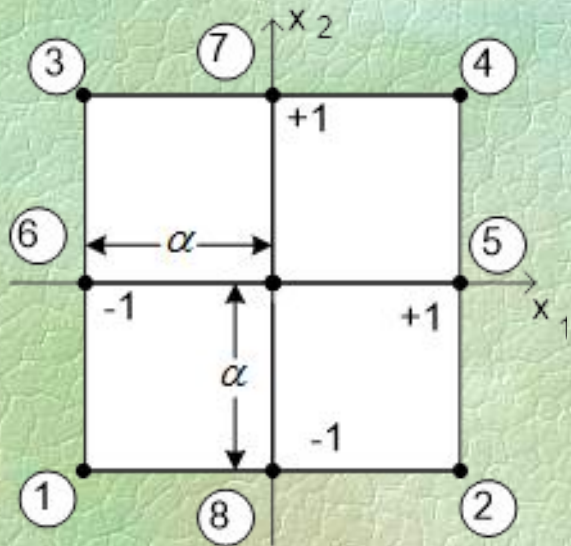
Ортогональные планы строятся так, чтобы в матрице ошибок (C_{ij}) все элементы, не лежащие на главной диагонали, обращались в нуль, т.е. $C_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Это произойдет, если в системе нормальных уравнений (в матрице (ij)) все недиагональные члены будут равны нулю:

$$\sum_u^N x_{iu}x_{ju} = 0$$

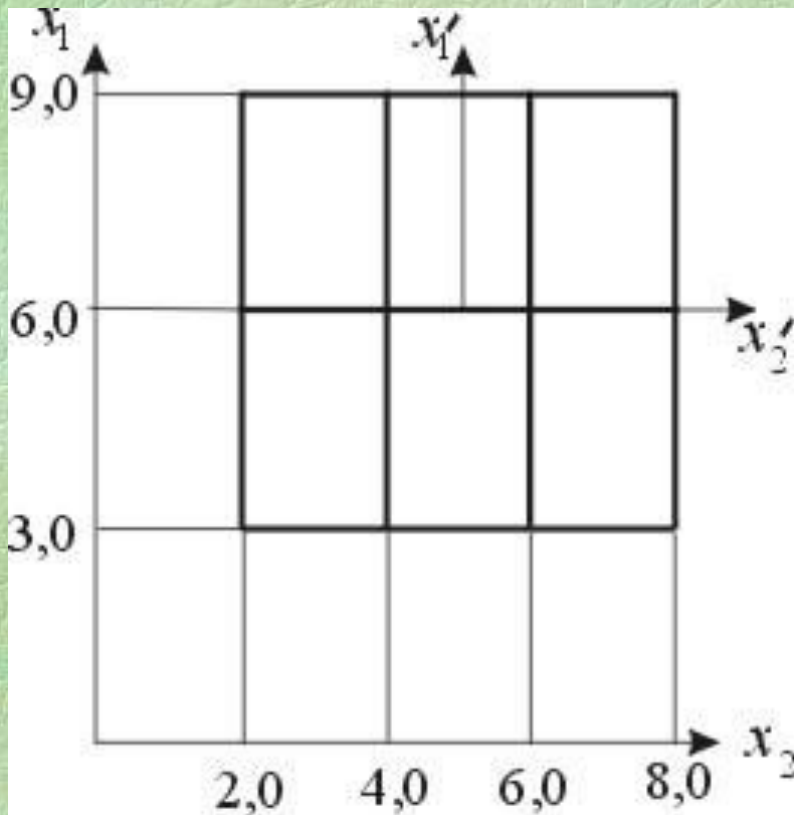
В этом случае каждое уравнение системы нормальных уравнений содержит одно неизвестное, и коэффициенты регрессии высчитываются по формуле:

$$a_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}x_{iu}}$$



Чтобы план первого порядка стал ортогональным, необходимо выполнить три условия:

- эксперимент должен быть **полным факторным** и в каждой **узловой точке** такого эксперимента должно быть **проведено по одному опыту**; если в некоторых точках проведено несколько опытов, то в расчетах должны использоваться **средние значения**;
- по каждому фактору x_1, x_2, \dots, x_k уровни изменения факторов должны быть **равноотстоящими**, то есть расстояния между уровнями $\Delta x_i = \text{const}$;
- **оси координат факторов** должны быть **перенесены в центр эксперимента** путем замены переменных.



Для рассмотренного примера на рисунке графически представлен полный двухфакторный эксперимент первого порядка с равноотстоящими уровнями.

Фактор x_1 изменяется на трех уровнях, принимая значения 3,0; 6,0 и 9,0.

Фактор x_2 имеет четыре уровня – 2,0; 4,0; 6,0 и 8,0 .

В каждой точке проведено по три опыта. Итого имеем 12 экспериментальных точек и 36 опытов.

Найдем новые координаты узловых точек после смещения оси координат в центр эксперимента:

$$x'_i = x_i - 0,5(x_{\max} - x_{\min}) - x_{\min}$$

x_{1i}	x'_{1i}
3	-3
6	0
9	3

x_{2i}	x'_{2i}
2	-3
4	-1
6	1
8	3

Значения $x'_{0i} = 1$.

Значения $x'_{3i} = x'_{1i} * x'_{2i}$

Используя новые координаты получим **центральный двухфакторный план**, который для планов первого порядка является **ортогональный**.

Таблица исходных данных с преобразованными координатами узловых точек выглядит следующим образом:

u	x_{0u}	x_{1u}	x_{2u}	x_{3u}	y_u
1	1	-3	-3	9	15,3
2	1	-3	-1	3	17,5
3	1	-3	1	-3	19,8
4	1	-3	3	-9	22
5	1	0	-3	0	14,4
6	1	0	-1	0	17,1
7	1	0	1	0	20
8	1	0	3	0	22,8
9	1	3	-3	-9	13,3
10	1	3	-1	-3	16,6
11	1	3	1	3	19,9
12	1	3	3	9	23,5

Тогда матрицы (ij) и (jy) примут следующий вид:

(ij)=	12	0	0	0
	0	72	0	0
	0	0	60	0
	0	0	0	360

(jy)=	222,2
	-3,9
	84,4
	34,5

Например, $(12) = 6 + 2 - 2 - 6 + 0 - 6 - 2 + 2 + 6 = 0$;

$(1y) = -3 * 15,3 - 3 * 17,5 + \dots + 3 * 23,5 = -3,9$.

Коэффициенты регрессии
соответственно равны:

$$a_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu}y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}x_{iu}}$$

Например, $a_0 = 222/12=18,51667$;

a_i=	18,51667
	-0,05417
	1,406667
	0,095833

В итоге получим:

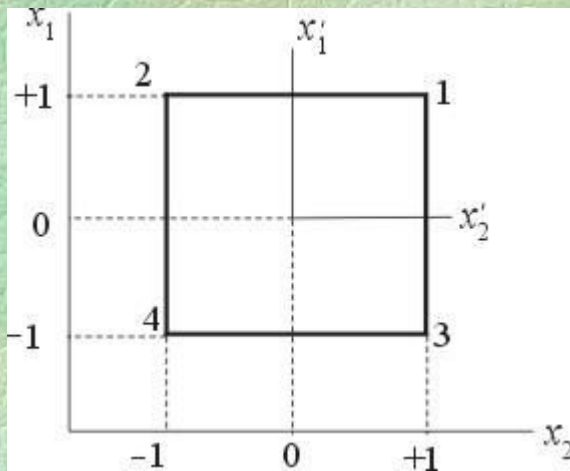
u	x_{0u}	x_{1u}	x_{2u}	x_{3u}	y_u	y_p
1	1	-3	-3	9	15,3	15,32167
2	1	-3	-1	3	17,5	17,56
3	1	-3	1	-3	19,8	19,79833
4	1	-3	3	-9	22	22,03667
5	1	0	-3	0	14,4	14,29667
6	1	0	-1	0	17,1	17,11
7	1	0	1	0	20	19,92333
8	1	0	3	0	22,8	22,73667
9	1	3	-3	-9	13,3	13,27167
10	1	3	-1	-3	16,6	16,66
11	1	3	1	3	19,9	20,04833
12	1	3	3	9	23,5	23,43667

Планы 2^k

Особое место в теории планирования эксперимента занимают **полные факторные эксперименты 2^k** , в которых каждый из k факторов изменяется только на двух уровнях.

Для построения **полного факторного эксперимента 2^k** :

1. Перенесем оси координат в центр эксперимента, т.е. **сделаем план центральным.**
2. Создадим два возможных уровня каждого из факторов в новых координатах: $x_i = +1$ и $x_i = -1$.



Например, при $k=2$ полный факторный эксперимент содержит $N=2^2 = 4$ узла с координатами x_1 и x_2 :

x_1	x_2
+1	+1
+1	-1
-1	+1
-1	-1

В планах 2^k обычно единицу не записывают, поскольку при расчетах важным оказывается только знак при ней.

Тогда план 2^2 можно оформить следующей таблицей:

u	x₀	x₁	x₂	x₁x₂	y_u
1	+	+	+	+	y₁
2	+	+	-	-	y₂
3	+	-	+	-	y₃
4	+	-	-	+	y₄

где x_0 всегда = +1;
 $x_1 x_2 = x_3$

Для эксперимента 2^2 уравнение

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 ,$$

содержащее 4 члена, оказывается адекватным ($m = N$).

Поскольку план ортогонален, то коэффициенты регрессии легко вычисляются по формуле:

$$a_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{iu}}$$

Например:

$$a_0 = \frac{+y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} ; \quad a_{12} = \frac{+y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}$$

Как видно, в числителе знаки столбца x_i приписываются к значениям y_u , а в знаменателе оказывается число N .

Найдем коэффициенты регрессии для следующего плана 2^2 :

u	x₀	x₁	x₂	x₁x₂	y_u
1	+	+	+	+	5
2	+	+	-	-	7
3	+	-	+	-	9
4	+	-	-	+	11

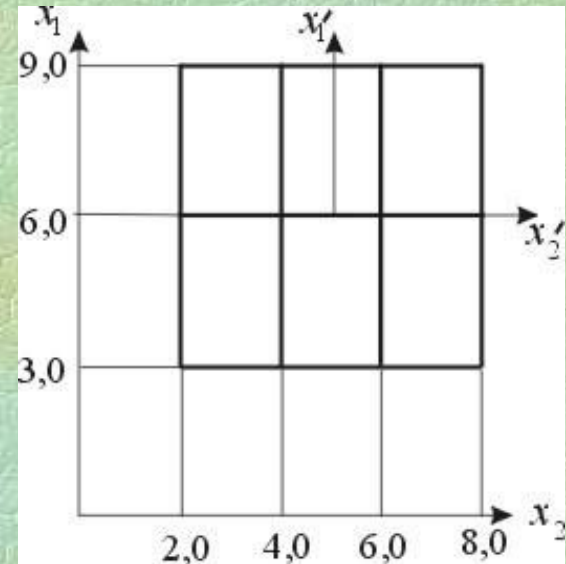
a_i	y_p
8	5
-2	7
-1	9
0	11

Построим для ранее рассмотренного примера **план 2^2**

Нам понадобится всего четыре эксперимента.

Заменяем старые координаты новыми:

x_{1i}	x'_{1i}	x_{2i}	x'_{2i}
9	+	8	+
3	-	2	-



Тогда план эксперимента 2^2 можно представить следующим образом:

u	x_{0u}	x_{1u}	x_{2u}	x_{3u}	y_u
1	+	+	+	+	23,5
2	+	+	-	-	13,3
3	+	-	+	-	22
4	+	-	-	+	15,3

Рассчитаем коэффициенты a_i :

$$a_0 = (23,5 + 13,3 + 22 + 15,3) / 4 = 18,525;$$

$$a_1 = (23,5 + 13,3 - 22 - 15,3) / 4 = -0,125;$$

$$a_2 = (23,5 - 13,3 + 22 - 15,3) / 4 = 4,225;$$

$$a_3 = (23,5 - 13,3 - 22 + 15,3) / 4 = 0,875$$

В итоге получим:

u	X_{0u}	X_{1u}	X_{2u}	X_{3u}	y_u	y_p
1	+	+	+	+	23,5	23,5
2	+	+	-	-	13,3	13,3
3	+	-	+	-	22	22
4	+	-	-	+	15,3	15,3

Таким образом, план 2^2 позволил получить точный результат с помощью четырех экспериментов вместо первоначальных 12 экспериментов.

Центральный композиционный план

Применяется, если аппроксимируемые функции не являются линейными.

Центральное композиционное планирование – это поэтапное построение плана, которое позволяет получить адекватное уравнение за минимальное количество экспериментов.

Первоначально предполагают, что модель процесса линейна, то есть содержит свободный и линейные члены и парные взаимодействия. Такой эксперимент содержит две серии опытов.

Первая серия экспериментов для случая полного факторного эксперимента проводится по плану 2^k .

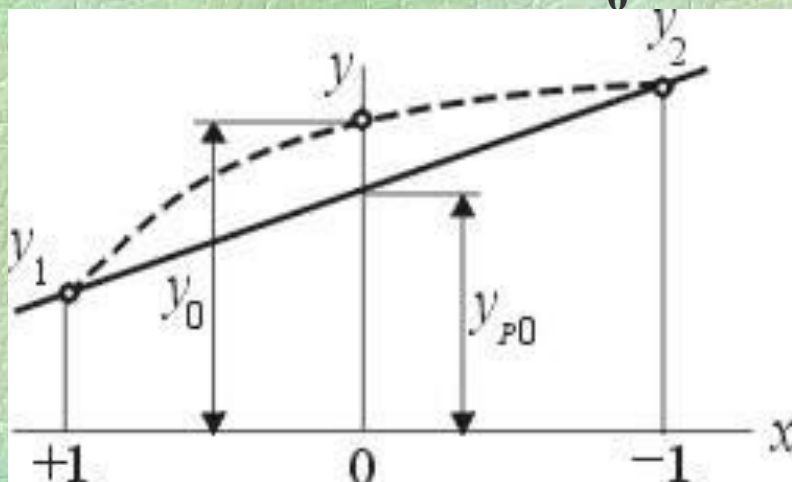
Вторая серия из n_0 опытов проводится в центре эксперимента, чтобы найти ошибку воспроизводимости.

Для определения числа опытов n_0 , пользуются таблицей:

$$\text{при } k = 2 \quad n_0 = 4,$$

$$k = 3 \quad n_0 = 6,$$

$$k = 4 \quad n_0 = 6 \quad \text{и т. д.}$$



Суть идеи проверки адекватности модели в центре эксперимента рассмотрим на однофакторном эксперименте.

Уравнение прямой

$$y_p = a_0 + a_1 x_1$$

точно проходит через экспериментальные точки y_1 и y_2 , то есть адекватно в периферийных точках. В центральной точке с координатой $x = 0$ по уравнению имеем $y_{p0} = a_0$. Но значение y_0 , полученное как среднее по опытам, проведенным в этой точке, равно:

$$y_0 = \frac{\sum_u^{n_0} y_{0u}}{n_0}$$

Если эти значения находятся в доверительном интервале

$$a_0 = y_0 \pm \Delta y,$$

то уравнение прямой адекватно также в центральной точке.

где $\Delta y = t_p * S_x$, где t_p - коэффициент Стьюдента (берется по таблице),

S_x – среднеквадратичное отклонение:

$$S_x = \sqrt{\frac{SS_0}{f_0 n_0}}, \quad \text{где } SS_0, f_0, n_0 \text{ - сумма квадратов отклонений, степень свободы и количество опытов во второй серии экспериментов.}$$

Если адекватность линейного уравнения не доказана, то необходимо перейти к модели второго порядка:

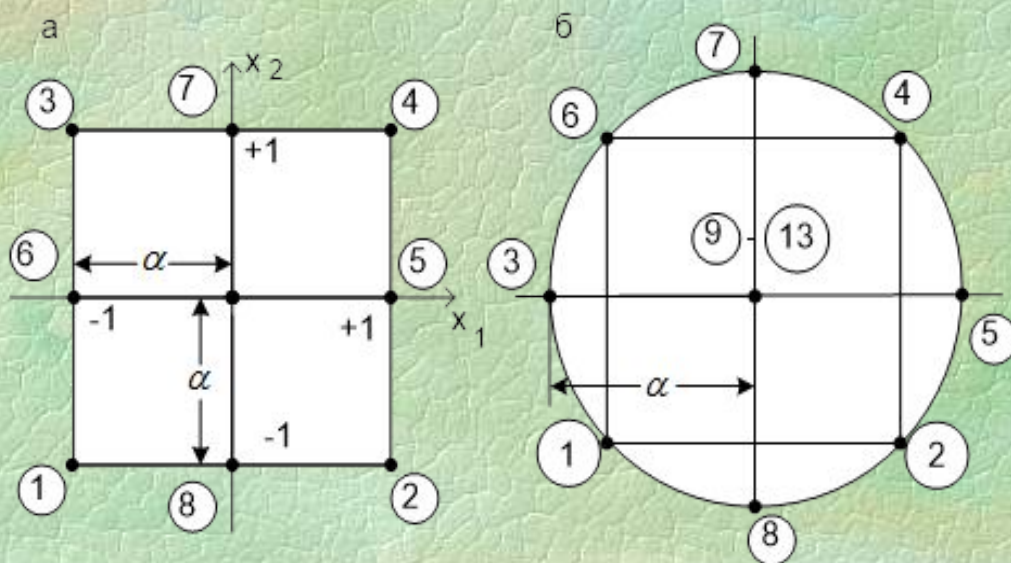
$$y = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \dots + a_{k-1,k} x_{k-1} x_k + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{kk} x_k^2.$$

Для этого проводится третья серия экспериментов, т.е. строится план второго порядка.

План второго порядка имеет свои достоинства и недостатки и не может быть оптимальным сразу по нескольким критериям.

Особое место среди планов второго порядка занимают **ортогональные** и **рототабельные** планы, так как содержат минимальное и строго определенное количество опытов третьей серии, которые добавляются к опытам первых двух серий, затраченным при построении линейной модели.

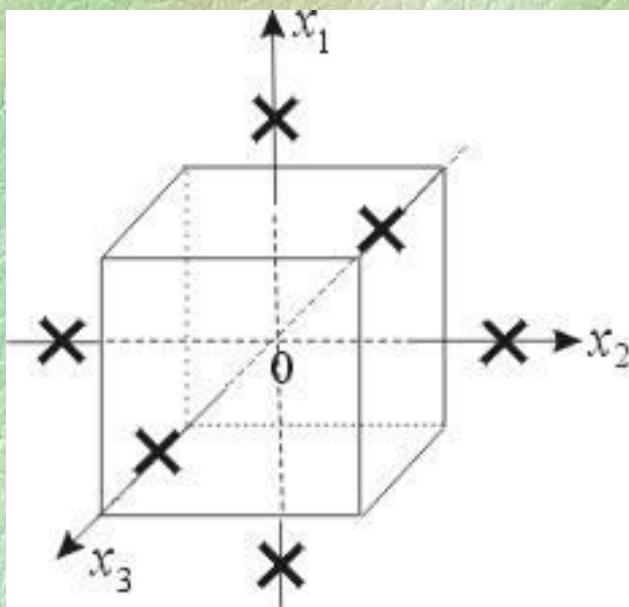
Рототабельные эксперименты не ортогональны, а ортогональные – не обладают рототабельностью.



Опыты третьей серии ортогональных и рототабельных планов выполняются в так называемых **звездных точках плана**, расположенных на каждой оси на расстоянии звездного плеча α от центральной точки в положительном и отрицательном направлении.

В k - факторном эксперименте на k осях расположится $2k$ звездных точек, следовательно **третья серия состоит из $2k$ опытов**.

Например, для 3-х факторного эксперимента имеем:



и	x_1	x_2	x_3
1	$+\alpha$	0	0
2	$-\alpha$	0	0
3	0	$+\alpha$	0
4	0	$-\alpha$	0
5	0	0	$+\alpha$
6	0	0	$-\alpha$

План становится ортогональным, если звездное плечо α подобрано так, что нормальная матрица в методе наименьших квадратов вырождается в диагональную, следовательно,

$$\sum_u^N x_{iu}x_{ju} = 0 \quad \text{при } i \neq j. \text{ Это происходит при следующих значениях звездного плеча } \alpha :$$

$$\alpha = 1,0 \quad \text{при } k = 2,$$

$$\alpha = 1,21 \quad \text{при } k = 3 ,$$

$$\alpha = 1,41 \quad \text{при } k = 4 \text{ и т. д.}$$

Для такого эксперимента полученные ранее коэффициенты регрессии при линейных членах и парных взаимодействиях пересчитывать не надо.

Все три серии опытов участвуют в расчете новых коэффициентов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ и пересчете коэффициента a_0 .

Для рототабельного плана второго порядка (для случая полного факторного эксперимента) звездное плечо вычисляется по формуле:

$$\alpha = 2^{k/4}. \quad \text{Тогда:}$$

$$\alpha = 1,41 \quad \text{при } k = 2,$$

$$\alpha = 1,68 \quad \text{при } k = 3,$$

$$\alpha = 2,0 \quad \text{при } k = 4 \text{ и т. д.}$$

После третьей серии опытов по рототабельному плану коэффициенты при линейных членах и парных взаимодействиях также не пересчитываются. Рассчитываются только новые коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ и пересчитывается коэффициент a_0 .

По этим коэффициентам нормальная матрица не ортогональна, приходится решать систему из $(k+1)$ уравнений с $(k+1)$ неизвестными. Причем при составлении нормальных уравнений должны участвовать опыты всех трех серий.

Рассмотрим пример построения регрессионной модели четырехфакторного эксперимента ($k=4$) по методике центрального композиционного планирования.

В рассматриваемом эксперименте параметры плана x_1, \dots, x_4 изменяются в диапазонах:

	x_1	x_2	x_3	x_4
Верхний уровень	1,02	45	1,25	300
Нижний уровень	0,72	35	0,75	200

Перенесем начало координат в центр эксперимента и заменим старые переменные x_i на новые x'_i .

Физические переменные	x_1	x_2	x_3	x_4
В центре эксперта ($x'_i=0$)	0,87	40	1	250
Интервал Δx_i	0,15	5	0,25	50
Верхний уровень ($x'_i=+1$)	1,02	45	1,25	300
Нижний уровень ($x'_i=-1$)	0,72	35	0,75	200

Первая серия опытов представляет собой ПФЭ 2^4 , состоящий из 16 опытов (по одному опыту в каждой точке).

и	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	уи
1	1	1	1	1	1	21,5
2	1	1	1	1	-1	32,8
3	1	1	1	-1	1	16,7
4	1	1	1	-1	-1	26,4
5	1	1	-1	1	1	29,3
6	1	1	-1	1	-1	9
7	1	1	-1	-1	1	42,2
8	1	1	-1	-1	-1	20,2
9	1	-1	1	1	1	17,7
10	1	-1	1	1	-1	40,2
11	1	-1	1	-1	1	13,8
12	1	-1	1	-1	-1	34,6
13	1	-1	-1	1	1	10,2
14	1	-1	-1	1	-1	1,2
15	1	-1	-1	-1	1	24
16	1	-1	-1	-1	-1	13

Подсчитаем коэффициенты регрессии a_1 , принимая во внимание только парные взаимодействия:

и	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	x5'	x6'	x7'	x8'	x9'	x10'	yu
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	21,5
2	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	32,8
3	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	16,7
4	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	26,4
5	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	29,3
6	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	9
7	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	42,2
8	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	20,2
9	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	17,7
10	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	40,2
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	13,8
12	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	34,6
13	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	10,2
14	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1,2
15	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	24
16	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	13
ai	22,05	2,71	3,41	-1,81	-0,12	-3,82	0,2	2,78	4,4	-7,91	-0,43	

В результате такого эксперимента получаем регрессию:

$$y_p = 22,05 + 2,71 x_1 + 3,41 x_2 - 1,81 x_3 - 0,12 x_4 - 3,83 x_1 x_2 + \\ + 0,2 x_1 x_3 + 2,79 x_1 x_4 + 4,4 x_2 x_3 - 7,91 x_2 x_4 - 0,4 x_3 x_4 .$$

Имеем 11 членов уравнения при 16 опытах, следовательно, отброшено 5 членов: четыре тройных и одно четверное взаимодействия. Они “по определению” незначимы, но в этом можно убедиться, подсчитав сумму квадратов, принадлежащую этим членам:

$$SS_{от} = SS_{общ} - SS_{ост} = \sum_{u=1}^{16} y_u^2 - N \sum_{i=0}^{10} a_i^2 = \\ = (21,5^2 + 32,8^2 + \dots + 13^2) - 16 (22,05^2 + 2,71^2 + \dots + 0,4^2) = 0,63$$

При 5 степенях свободы вклад всех отброшенных членов в общую дисперсию очень мал, однако для его оценки по критерию Фишера необходимо иметь ошибку воспроизводимости эксперимента.

Для этого проводим вторую серию из $n_0 = 6$ опытов в центре. План этой части эксперимента приведен в таблице:

u	x₁	x₂	x₃	x₄	y_{0u}
1	0	0	0	0	12,5
2	0	0	0	0	12,9
3	0	0	0	0	11,5
4	0	0	0	0	12
5	0	0	0	0	13
6	0	0	0	0	13

Вычислим суммы, среднее и доверительный интервал:

$$\sum_{u=1}^6 y_{0u} = 12,5 + \dots + 13,0 = 74,9;$$

$$y_{0\text{cp}} = y_0 = 74,9 / 6 = 12,48 ;$$

$$SS_0 = \sum_{u=1}^6 y_{0u}^2 - \frac{1}{n_0} \left(\sum_{u=1}^6 y_{0u} \right)^2 = (12,5^2 + \dots + 13,0^2) - 74,9^2/6 = 1,9;$$

$$\Delta y = t_p \sqrt{\frac{SS_0}{(n_0 - 1)n_0}} = 2,57 \sqrt{\frac{1,9}{5 * 6}} = 0,65$$

Критерий Фишера для отброшенных членов:

$$F_{от} = \frac{0,65/5}{1,9/5} = 0,4$$

Это меньше табличного значения $F_T(0,95; 5; 5) = 5,1$, поэтому все отброшенные члены не значимы.

Полезно провести оценку значимости членов полученной регрессии. Мало значимыми могут быть члены с наименьшими значениями коэффициентов регрессии, например, $a_4 x_4$, $a_{13} x_1 x_3$ и $a_{14} x_1 x_4$.

Проверим их по критерию Фишера, рассчитав сумму квадратов отклонений по формуле:

$$SS_{ai} = a_i^2 N.$$

При табличном значении $F_T(0,95; 1; 5) = 6,6$ для указанных членов регрессии критерии Фишера будут следующими:

$$F_{a4} = \frac{16 * 0,12^2 / 1}{1,9 / 5} = 0,6; \quad F_{a13} = \frac{16 * 0,2^2 / 1}{1,9 / 5} = 1,68;$$

$$F_{a14} = \frac{16 * 0,4^2 / 1}{1,9 / 5} = 6,7$$

т.е. только член с коэффициентом a_{14} находится на пределе значимости, и его можно оставить в уравнении.

В центре эксперимента значение по уравнению y_{p0} не совпадает с экспериментальным значением $y_0 = 12,48 \pm 0,65$, то есть модель в этой точке не адекватна.

Необходимо добавить $2k = 8$ опытов в звездных точках и достроить модель до квадратичной.

Переходим к третьей серии экспериментов.

Звездное плечо $\alpha = 2^{4/4} = 2$. Координаты звездных точек указаны в таблице:

Переменная	x1	x2	x3	x4
Уровень $x_i' = +\alpha$	1,17	50	1,5	350
Уровень $x_i' = -\alpha$	0,57	30	0,5	150

Экспериментальные данные (третья серия экспериментов) в звездных точках приведены в таблице:

и	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	yu
1	1	2	0	0	0	29,4
2	1	-2	0	0	0	18,3
3	1	0	2	0	0	19,3
4	1	0	-2	0	0	5,7
5	1	0	0	2	0	27,7
6	1	0	0	-2	0	34,9
7	1	0	0	0	2	12,3
8	1	0	0	0	-2	12,7

Полный план для расчета по третьей серии содержит 25 экспериментов:

u	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	yu
1	1	1	1	1	1	21,5
2	1	1	1	1	-1	32,8
3	1	1	1	-1	1	16,7
4	1	1	1	-1	-1	26,4
5	1	1	-1	1	1	29,3
6	1	1	-1	1	-1	9
7	1	1	-1	-1	1	42,2
8	1	1	-1	-1	-1	20,2
9	1	-1	1	1	1	17,7
10	1	-1	1	1	-1	40,2
11	1	-1	1	-1	1	13,8
12	1	-1	1	-1	-1	34,6
13	1	-1	-1	1	1	10,2
14	1	-1	-1	1	-1	1,2
15	1	-1	-1	-1	1	24
16	1	-1	-1	-1	-1	13
17	1	0	0	0	0	12,5
18	1	2	0	0	0	29,4
19	1	-2	0	0	0	18,3
20	1	0	2	0	0	19,3
21	1	0	-2	0	0	5,7
22	1	0	0	2	0	27,7
23	1	0	0	-2	0	34,9
24	1	0	0	0	2	12,3
25	1	0	0	0	-2	12,7

Первые 16
строк – первая
серия
экспериментов

← Вторая серия

Третья серия

Нормальная система уравнений для третьей серии будет иметь вид:

$$a_0 \sum_u^{25} x_{0u}^2 x_{0u}^2 + a_{11} \sum_u^{25} x_{0u}^2 x_{1u}^2 + \dots + a_{44} \sum_u^{25} x_{0u}^2 x_{4u}^2 = \sum_u^{25} x_{0u}^2 y_u ;$$

$$a_0 \sum_u^{25} x_{1u}^2 x_{0u}^2 + a_{11} \sum_u^{25} x_{1u}^2 x_{1u}^2 + \dots + a_{44} \sum_u^{25} x_{1u}^2 x_{4u}^2 = \sum_u^{25} x_{1u}^2 y_u ;$$

$$a_0 \sum_u^{25} x_{2u}^2 x_{0u}^2 + a_{11} \sum_u^{25} x_{2u}^2 x_{1u}^2 + \dots + a_{44} \sum_u^{25} x_{2u}^2 x_{4u}^2 = \sum_u^{25} x_{2u}^2 y_u ;$$

$$a_0 \sum_u^{25} x_{3u}^2 x_{0u}^2 + a_{11} \sum_u^{25} x_{3u}^2 x_{1u}^2 + \dots + a_{44} \sum_u^{25} x_{3u}^2 x_{4u}^2 = \sum_u^{25} x_{3u}^2 y_u ;$$

$$a_0 \sum_u^{25} x_{4u}^2 x_{0u}^2 + a_{11} \sum_u^{25} x_{4u}^2 x_{1u}^2 + \dots + a_{44} \sum_u^{25} x_{4u}^2 x_{4u}^2 = \sum_u^{25} x_{4u}^2 y_u$$

Учитывая, что в системе уравнений параметры входят во второй степени, план третьей серии тоже нужно возвести в квадрат:

u	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	yu
1	1	1	1	1	1	21,5
2	1	1	1	1	1	32,8
3	1	1	1	1	1	16,7
4	1	1	1	1	1	26,4
5	1	1	1	1	1	29,3
6	1	1	1	1	1	9
7	1	1	1	1	1	42,2
8	1	1	1	1	1	20,2
9	1	1	1	1	1	17,7
10	1	1	1	1	1	40,2
11	1	1	1	1	1	13,8
12	1	1	1	1	1	34,6
13	1	1	1	1	1	10,2
14	1	1	1	1	1	1,2
15	1	1	1	1	1	24
16	1	1	1	1	1	13
17	1	0	0	0	0	12,5
18	1	4	0	0	0	29,4
19	1	4	0	0	0	18,3
20	1	0	4	0	0	19,3
21	1	0	4	0	0	5,7
22	1	0	0	4	0	27,7
23	1	0	0	4	0	34,9
24	1	0	0	0	4	12,3
25	1	0	0	0	4	12,7

Для рототабельного плана матрица третьей серии не ортогональна, поэтому для решения системы уравнений нужно найти информационную матрицу (ij) , столбец свободных членов (jy) и обратную матрицу (Cij) :

	25	24	24	24	24
	24	48	16	16	16
$(ij)=$	24	16	48	16	16
	24	16	16	48	16
	24	16	16	16	48

	525,6
	543,6
$jy=$	452,8
	603,2
	452,8

Найдем коэффициенты a_{ii} :

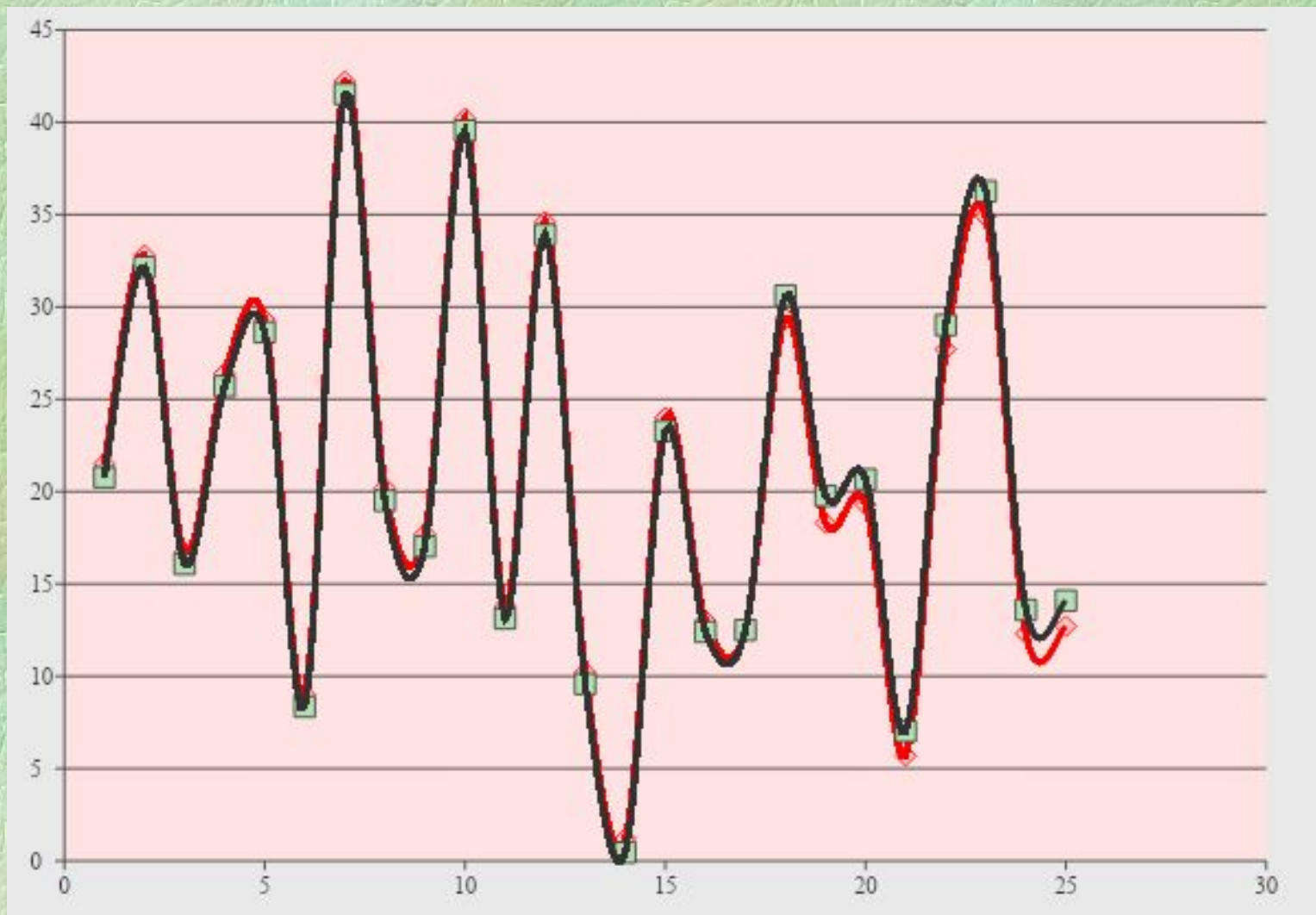
	1	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25
	-0,25	0,088	0,057	0,057	0,057
$Cij=$	-0,25	0,057	0,088	0,057	0,057
	-0,25	0,057	0,057	0,088	0,057
	-0,25	0,057	0,057	0,057	0,088

$a_0 =$	12,5
$a_{11} =$	3,172917
$a_{22} =$	0,335417
$a_{33} =$	5,035417
$a_{44} =$	0,335417

В итоге получим:

u	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	x5'	x6'	x7'	x8'	x9'	x10'	X11'	X12'	X13'	X14'	yu	yp
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	21,5	20,77917
2	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	32,8	32,15417
3	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	16,7	16,07917
4	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	26,4	25,70417
5	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	29,3	28,62917
6	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	9	8,354167
7	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	42,2	41,52917
8	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	20,2	19,50417
9	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	17,7	17,02917
10	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	40,2	39,55417
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	13,8	13,12917
12	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	34,6	33,90417
13	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	10,2	9,579167
14	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1,2	0,454167
15	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	24	23,27917
16	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	12,40417
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12,5	12,5
18	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	29,4	30,61667
19	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	18,3	19,76667
20	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	19,3	20,66667
21	1	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	5,7	7,016667
22	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	27,7	29,01667
23	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	34,9	36,26667
24	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	12,3	13,59167
25	1	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	12,7	14,09167
ai	12,5	2,7125	3,4125	-1,8125	-0,125	-3,825	0,2	2,7875	4,4	-7,912	-0,437	3,1729	0,3354	5,0354	0,3354		

Графическое представление полученной математической модели



Дисперсионный анализ полученной модели

Подсчитаем суммы квадратов:

$$SS_{\text{общ}} = \sum_u^N y_u^2 = 22,7^2 + 32,1^2 + 16^2 + \dots + 14,1^2 = 13868$$

$$SS_{a_i} = a_i \sum_u^N x_{iu} y_u$$

Например, $SS_{a_1} = 2,71 * (1 * 21,5 + 1 * 32,8 + \dots + 0 * 12,7) = 177,9$

$$SS_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^m a_i \sum_u^N x_{iu} y_u = \sum_{i=1}^m SS_{a_i} = 13845,6$$

$$SS_{\text{от}} = SS_{\text{общ}} - SS_{\text{ост}} = 22,4$$

Оценка компонентов математической модели по критерию Фишера

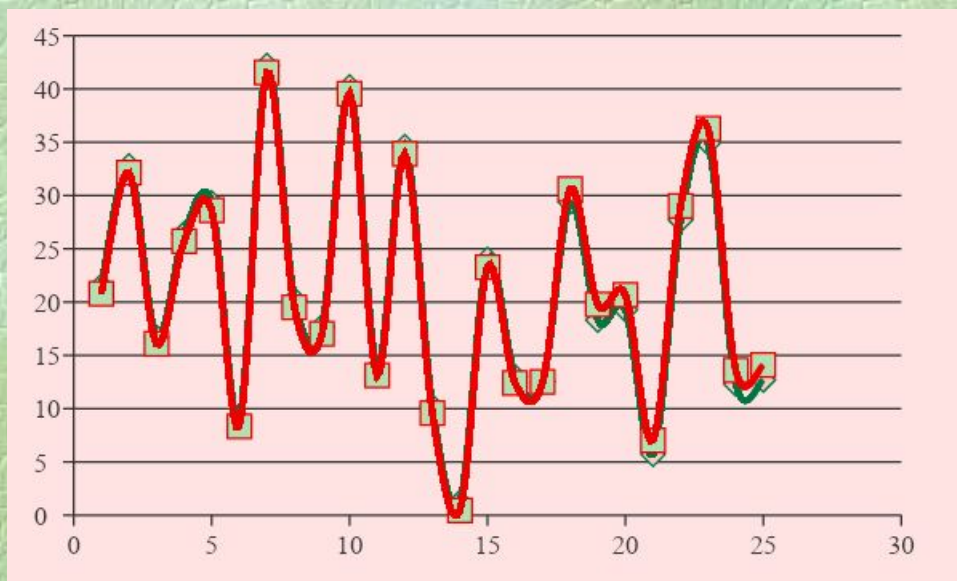
u	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	x5'	x6'	x7'	x8'	x9'	x10'	X11'	X12'	X13'	X14'	yu
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	21,5
2	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	32,8
3	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	16,7
4	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	26,4
5	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	29,3
6	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	9
7	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	42,2
8	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	20,2
9	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	17,7
10	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	40,2
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	13,8
12	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	34,6
13	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	10,2
14	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1,2
15	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	24
16	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12,5
18	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	29,4
19	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	18,3
20	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	19,3
21	1	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	5,7
22	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	27,7
23	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	34,9
24	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	12,3
25	1	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	12,7
ai	12,5	2,7125	3,4125	-1,8125	-0,125	-3,825	0,2	2,7875	4,4	-7,9125	-0,4375	3,172917	0,335417	5,035417	0,335417	
SSi	6570,00	177,94	279,14	78,66	0,35	234,09	0,64	124,32	309,76	1001,72	3,06	1724,80	151,88	3037,36	151,88	
Fai	18771,43	508,40	797,55	224,75	1,00	668,83	1,83	355,21	885,03	2862,06	8,75	4927,99	433,93	8678,18	433,93	
Fтабл.	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	161,45	

$$F_{a_i} = \frac{SS_{a_i}/1}{SS_{a_{min}}/1} \quad SS_{a_{min}} \text{ у фактора } X_4; \quad F_{табл}(0,95;1;1) = 161,45$$

Итоговая таблица

u	x0'	x1'	x2'	x3'	x4'	x5'	x6'	x7'	x8'	x9'	x10'	X11'	X12'	X13'	X14'	yu	yp
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	21,5	21,14
2	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	32,8	31,39
3	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	16,7	15,97
4	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	26,4	26,22
5	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	29,3	28,99
6	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	9	7,59
7	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	42,2	41,42
8	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	20,2	20,02
9	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	17,7	17,79
10	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	40,2	39,19
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	13,8	12,62
12	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	34,6	34,02
13	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	10,2	10,34
14	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1,2	0,09
15	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	24	22,77
16	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	12,52
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12,5	12,50
18	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	29,4	30,62
19	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	18,3	19,77
20	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	19,3	20,67
21	1	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	5,7	7,02
22	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	27,7	29,02
23	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	34,9	36,27
24	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	12,3	13,84
25	1	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	12,7	13,84
ai	12,5	2,7125	3,4125	-1,8125	0	-3,825	0	2,7875	4,4	-7,9125	0	3,172917	0,335417	5,035417	0,335417		

Полученная математическая модель



$Y_p =$

$$12,5 + 2,71X'_1 + 3,41X'_2 - 1,81X'_3 - 3,82X'_5 + 2,78X'_7 + 4,4X'_8 - 7,91X'_9 + 3,17X'_{11} + 0,33X'_{12} + 5,03X'_{13} + 0,33X'_{14}$$