АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ

- Авторегрессионная модель описывается функцией

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{ti} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_{t-j} + v_t$$

- AR-модель

$$y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_{t-j} + v_t$$

Определение

- **Авторегрессионная модель** – это корреляционно-регрессионная модель, которая кроме факторных признаков, содержит одно или больше предыдущих значений зависимой переменной

  - Авторегрессионные модели также называют *динамичными моделями*, так как они отображают временные изменения результирующей (зависимой) переменной относительно ее предыдущих значений

Проблема оценивания неизвестных параметров авторегрессионных моделей

- Среди экзогенных переменных присутствуют стохастические переменные (зависимые)
- Возможна автокорреляция

Оценивание параметров авторегрессионных моделей

- Метод вспомогательных (инструментальных) переменных;
- Метод авторегрессионного преобразования;
- Метод скользящих средних;
- Метод, учитывающий смешанную модель авторегрессии и скользящих средних

Метод вспомогательных (инструментальных) переменных

- **Шаг 1**. Переменная y_{t-k}, для которой нарушается предпосылка применения метода наименьших квадратов, заменяется на новую переменную z, которая сильно коррелирует с y_{t-k}, но не коррелирует с v_t.
- Выбираются переменные $x_{t-k,j}$, от которых зависит y_{t-k}. Строится регрессия вı

$$y_{t-k} = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-k,j}$$

Обычным методом наименьших квадратов оцениваются ее параметры . Выражение $\beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-k,j}$ как . z_{t-k}

Метод вспомогательных (инструментальных) переменных

- **Шаг 3**. Оценки неизвестных коэффициентов преобразованной модели, в которой y_{t-k} заменяются на z_{t-k}, рассчитываются с помощью традиционного метода наименьших квадратов. Эти оценки будут являться оценками неизвестных коэффициентов исходной модели автокорреляции

- Недостаток метода:

  не всегда удается найти эффективные вспомогательные переменные для лаговых значений результирующей переменной

Пример

- Имеются данные об уровнях годовых затрат на потребление и величинах дохода
- Необходимо построить авторегрессионную модель зависимости между данными показателями

Год	Затраты на потребление	Доход
1	51,19	73,07
2	52,94	88,10
3	63,75	113,45
4	76,11	131,07
5	83,13	134,31
6	90,07	145,37
7	92,38	139,06
8	100,59	168,74
9	101,78	164,37
10	111,61	167,49
11	113,90	156,55
12	120,20	159,71
13	118,50	156,15
14	127,55	187,08
15	134,31	183,42

- Авторегрессионная модель

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Предполагается, что величина затрат на потребление зависит не только от величины дохода текущего года, но от затрат на потребление предыдущего периода

- Выбор в качестве инструментальной переменной независимой переменной x_{t-1}

- Авторегрессионная модель

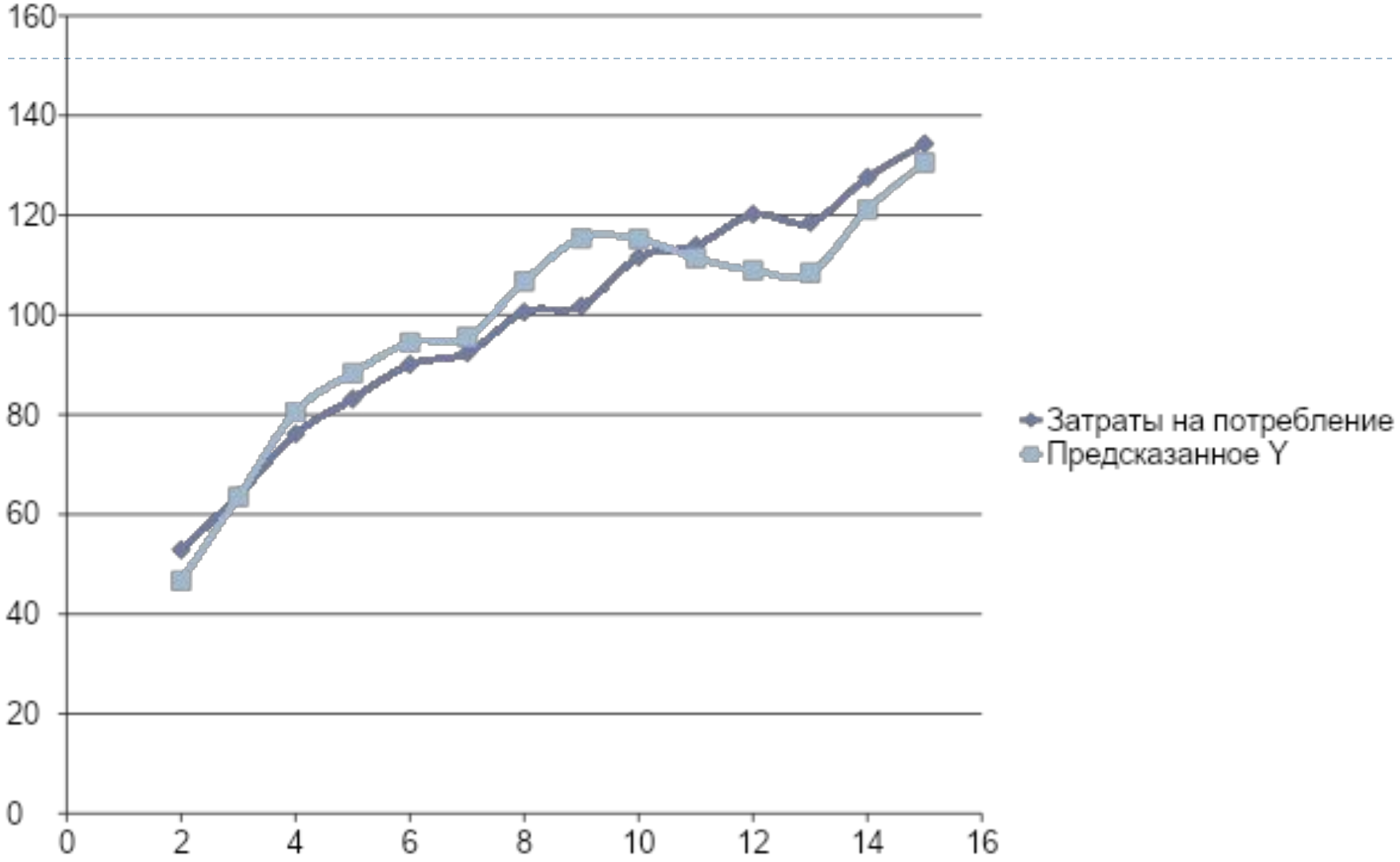
$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Год	Затраты на потребление (y_t)	Доход (x_t)	Доход (x_{t-1})
1	51,19	73,07	-
2	52,94	88,10	73,07
3	63,75	113,45	88,10
4	76,11	131,07	113,45
5	83,13	134,31	131,07
6	90,07	145,37	134,31
7	92,38	139,06	145,37
8	100,59	168,74	139,06
9	101,78	164,37	168,74
10	111,61	167,49	164,37
11	113,90	156,55	167,49
12	120,20	159,71	156,55
13	118,50	156,15	159,71
14	127,55	187,08	156,15
15	134,31	183,42	187,08

- Авторегрессионная модель, полученная на основе представленных данных

$$\hat{y}_t = -19{,}3172 + 0{,}4522x_t + 0{,}3578y_{t-1}$$

- R-квадрат = 0,915 - 91,5% изменения затрат на потребление объясняется выбранными параметрами: уровнем дохода и затратами на потребление предыдущего года


160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Затраты на потребление
Предсказанное Y

- Выбор в качестве инструментальной переменной, полученной на основе построения уравнения регрессии типа

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + v_{t-1}$$

- Параметры данного уравнения

$$\hat{y}_{t-1} = -0{,}4329 + 0{,}7019 x_{t-1}$$

Год	Затраты на потребление (y_t)	Доход (x_t)	Затраты на потребление ($\hat{y}_{t-1}$)
1	51,19	73,07	-
2	52,94	88,10	50,85
3	63,75	113,45	61,40
4	76,11	131,07	79,19
5	83,13	134,31	91,56
6	90,07	145,37	93,83
7	92,38	139,06	101,59
8	100,59	168,74	97,16
9	101,78	164,37	118,00
10	111,61	167,49	114,93
11	113,90	156,55	117,12
12	120,20	159,71	109,44
13	118,50	156,15	111,66
14	127,55	187,08	109,16
15	134,31	183,42	130,87

- Параметры уравнения

$$\hat{y}_t = -19{,}0965 + 0{,}4521x_t + 0{,}5098y_{t-1}$$

- R-квадрат = 0,915

Метод авторегрессионного преобразования (AR)

- предполагает построение уравнений авторегрессии вида

$$y_t = f\left(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}\right)$$

Метод скользящих средних (MA)

- позволяет оценить зависимость переменной от величин случайных составляющих

$$y_t = f\left(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}\right)$$

Метод, учитывающий смешанную модель авторегрессии и скользящих средних (ARMA)

- оценивает модель, включающую лаговые зависимые переменные и случайные составляющие

$$y_t = f\left(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n}, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}\right)$$