



# АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ



- 
- Авторегрессионная модель описывается функцией

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{ti} + \sum_{j=1}^m \beta_j y_{t-j} + v_t$$

- AR-модель

$$y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j y_{t-j} + v_t$$



# Определение

---

- ▣ **Авторегрессионная модель** – это корреляционно-регрессионная модель, которая кроме факторных признаков, содержит одно или больше предыдущих значений зависимой переменной
- ▣ Авторегрессионные модели также называют *динамическими моделями*, так как они отображают временные изменения результирующей (зависимой) переменной относительно ее предыдущих значений



# Проблема оценивания неизвестных параметров авторегрессионных моделей

---

- Среди экзогенных переменных присутствуют стохастические переменные (зависимые)
- Возможна автокорреляция



# Оценивание параметров авторегрессионных моделей

---

- Метод вспомогательных (инструментальных) переменных;
- Метод авторегрессионного преобразования;
- Метод скользящих средних;
- Метод, учитывающий смешанную модель авторегрессии и скользящих средних



# Метод вспомогательных (инструментальных) переменных

---

- **Шаг I.** Переменная  $y_{t-k}$ , для которой нарушается предпосылка применения метода наименьших квадратов, заменяется на новую переменную  $z$ , которая сильно коррелирует с  $y_{t-k}$ , но не коррелирует с  $v_t$ .
- Выбираются переменные  $x_{t-k,j}$ , от которых зависит

$y_{t-k}$ . Строится регрессия в

$$y_{t-k} = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{t-k,j}$$

Обычным методом наименьших квадратов

оцениваются ее параметры. Выражение  $\beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{t-k,j}$

как  $z_{t-k}$ .



# Метод вспомогательных (инструментальных) переменных

---

- **Шаг 3.** Оценки неизвестных коэффициентов преобразованной модели, в которой  $y_{t-k}$  заменяются на  $z_{t-k}$ , рассчитываются с помощью традиционного метода наименьших квадратов. Эти оценки будут являться оценками неизвестных коэффициентов исходной модели автокорреляции



---

□ Недостаток метода:

не всегда удастся найти эффективные  
вспомогательные переменные для лаговых значений  
результатирующей переменной



# Пример

---

- Имеются данные об уровнях годовых затрат на потребление и величинах дохода
- Необходимо построить авторегрессионную модель зависимости между данными показателями



Год	Затраты на потребление	Доход
1	51,19	73,07
2	52,94	88,10
3	63,75	113,45
4	76,11	131,07
5	83,13	134,31
6	90,07	145,37
7	92,38	139,06
8	100,59	168,74
9	101,78	164,37
10	111,61	167,49
11	113,90	156,55
12	120,20	159,71
13	118,50	156,15
14	127,55	187,08
15	134,31	183,42

---

□ Авторегрессионная модель

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Предполагается, что величина затрат на потребление зависит не только от величины дохода текущего года, но от затрат на потребление предыдущего периода



- 
- Выбор в качестве инструментальной переменной независимой переменной  $x_{t-1}$
  - Авторегрессионная модель

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

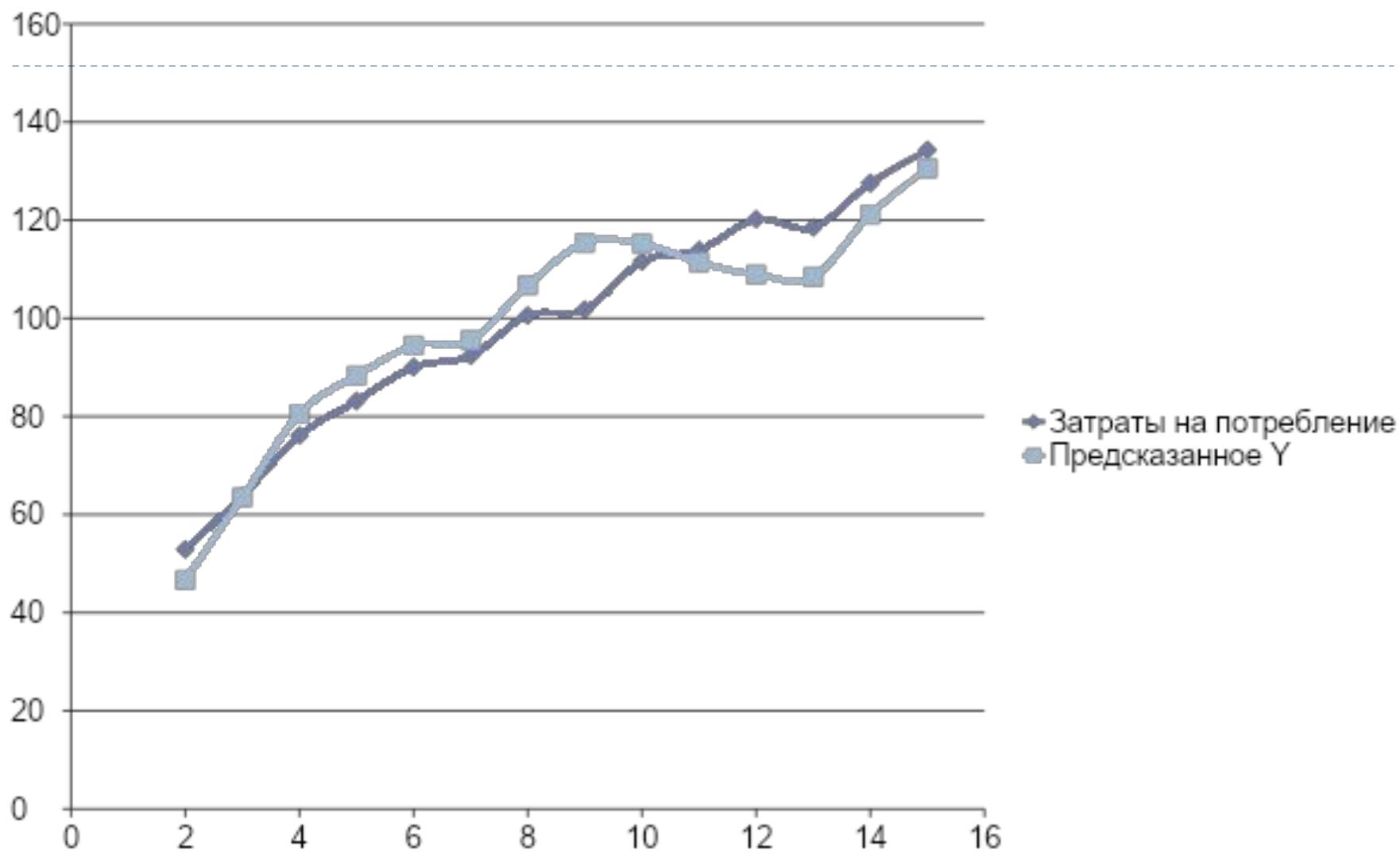


Год	Затраты на потребление ( $y_t$ )	Доход ( $x_t$ )	Доход ( $x_{t-1}$ )
1	51,19	73,07	-
2	52,94	88,10	73,07
3	63,75	113,45	88,10
4	76,11	131,07	113,45
5	83,13	134,31	131,07
6	90,07	145,37	134,31
7	92,38	139,06	145,37
8	100,59	168,74	139,06
9	101,78	164,37	168,74
10	111,61	167,49	164,37
11	113,90	156,55	167,49
12	120,20	159,71	156,55
13	118,50	156,15	159,71
14	127,55	187,08	156,15
15	134,31	183,42	187,08

- 
- Авторегрессионная модель, полученная на основе представленных данных

$$\hat{y}_t = -19,3172 + 0,4522x_t + 0,3578y_{t-1}$$

- R-квадрат = 0,915 - 91,5% изменения затрат на потребление объясняется выбранными параметрами: уровнем дохода и затратами на потребление предыдущего года
- 
- 



- 
- Выбор в качестве инструментальной переменной, полученной на основе построения уравнения регрессии типа

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + v_{t-1}$$

- Параметры данного уравнения

$$\hat{y}_{t-1} = -0,4329 + 0,7019x_{t-1}$$



Год	Затраты на потребление ( $y_t$ )	Доход ( $x_t$ )	Затраты на потребление ( $\hat{y}_{t-1}$ )
1	51,19	73,07	-
2	52,94	88,10	50,85
3	63,75	113,45	61,40
4	76,11	131,07	79,19
5	83,13	134,31	91,56
6	90,07	145,37	93,83
7	92,38	139,06	101,59
8	100,59	168,74	97,16
9	101,78	164,37	118,00
10	111,61	167,49	114,93
11	113,90	156,55	117,12
12	120,20	159,71	109,44
13	118,50	156,15	111,66
14	127,55	187,08	109,16
15	134,31	183,42	130,87

---

□ Параметры уравнения

$$\hat{y}_t = -19,0965 + 0,4521x_t + 0,5098y_{t-1}$$

□ R-квадрат = 0,915



# Метод авторегрессионного преобразования (AR)

---

- предполагает построение уравнений авторегрессии вида

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})$$



# Метод скользящих средних (МА)

---

- позволяет оценить зависимость переменной от величин случайных составляющих

$$y_t = f(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p})$$



# Метод, учитывающий смешанную модель авторегрессии и скользящих средних (ARMA)

---

- оценивает модель, включающую лаговые зависимые переменные и случайные составляющие

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n}, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p})$$

