Биологические системы. Системная модель Лоттки-Вольтерры

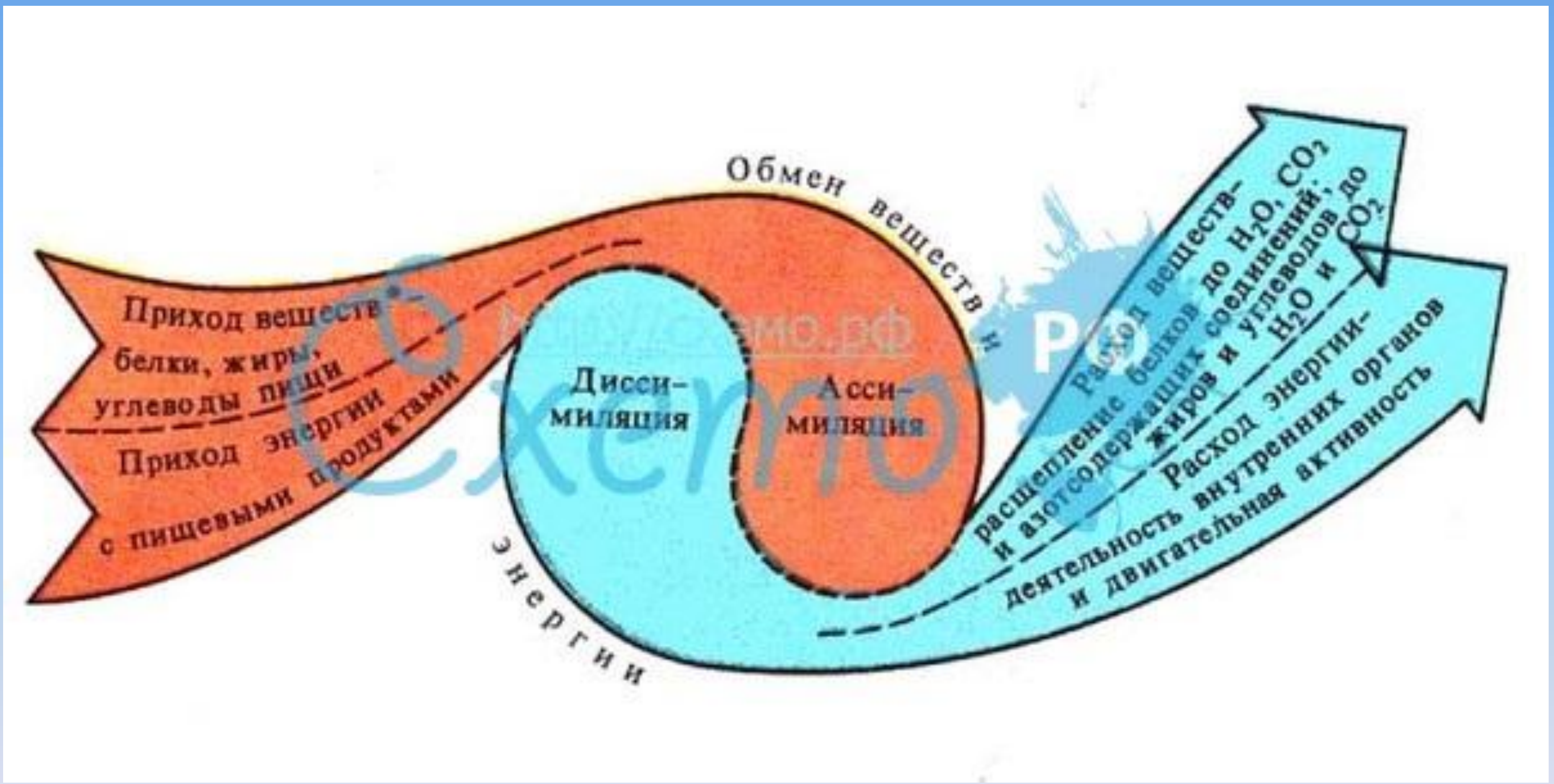
Выполнил: Кравцов И.В, студент 4 курса, специальность ИСиТ, 345 гр.

Биологические системы - совокупность взаимосвязанных и взаимодействую-их живых элементов различной сложности

Классификация биологических систем по сложности

Уровень сложности	Пример
Элементарные биологические системы	Клетки
Организмы с низкой способностью воспринимать информацию	Растения
организмы с более развитой способностью воспринимать информацию	Животные
Системы, характеризующиеся самосознанием, мышлением и нетривиальным поведением	Люди

Обмен веществ и энергии



Признаки биологических систем

- Способность к обмену веществ.
- Способность к размножению (самовоспроизведению).
- Способность к движению.
- Способность к раздражимости.
- Наследственность.
- Изменчивость
- Рост и развитие
- Саморегуляция

Системная модель Лоттки – Вольтерры. Что это?

Модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва»

В математической форме предложенная система имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x,$$
$$\frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y.$$

где x— количество жертв, y — количество хищников, t — время, α,β,ɣ,δ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

Рассматривается закрытый ареал, в котором обитают два вида — травоядные («жертвы») и хищники, предполагается, что животные не иммигрируют и не эмигрируют, и что еды для травоядных животных имеется с избытком. Тогда уравнение изменения количества жертв (без учета хищников) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

где α — коэффициент рождаемости жертв, x — величина популяции жертв, $\frac{dx}{dt}$ — скорость прироста популяции жертв.

Пока хищники не охотятся, они вымирают, следовательно, уравнение для численности хищников (без учёта жертв) принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y,$$

где γ — коэффициент убыли хищников, y — величина популяции хищников, $\frac{dy}{dt}$ — скорость прироста популяции хищников.

При встречах хищников и жертв (частота которых прямо пропорциональна величине xy) происходит убийство жертв с коэффициентом β , сытые хищники способны к воспроизводству с коэффициентом δ . С учётом этого, система уравнений модели такова:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy = (\alpha - \beta y)x \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \end{cases}$$

Решение задачи.
Нахождение стационарной позиции

Для стационарной позиции $\bar{x} > 0, \bar{y} > 0$ изменение популяции равно нулю. Следовательно:

$$\alpha\bar{x} - \beta\bar{x}\bar{y} = 0,$$
$$-\gamma\bar{y} + \delta\bar{x}\bar{y} = 0,$$

из чего следует, что стационарная точка системы вокруг которой происходят колебания, определяется следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta},$$
$$\bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Задание отклонения в системе

Теперь на надо ввести в нашу систему колебания $\tilde{x} \ll \bar{x}$ и $\tilde{y} \ll \bar{y}$. Из-за малой величины квадратами, кубами и т.д. $\tilde{x}$ можно пренебречь. Теперь популяция x и y будет равняться:

$$x = \bar{x} + \tilde{x}$$

$$y = \bar{y} + \tilde{y}$$

Далее расписываем предыдущее уравнение:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \alpha(\bar{x}+\tilde{x}) - \beta(\bar{x}+\tilde{x})(\bar{y}+\tilde{y}) = \frac{\alpha\gamma}{\delta} + \alpha\tilde{x} - \frac{\beta\gamma\alpha}{\delta\beta} - \frac{\beta\gamma}{\delta}\tilde{y} - \frac{\beta\alpha}{\beta}\tilde{x} - \beta\tilde{x}\tilde{y} = -\frac{\beta\gamma}{\delta}\tilde{y}$$

Похожий ответ получаем относительно хищников:

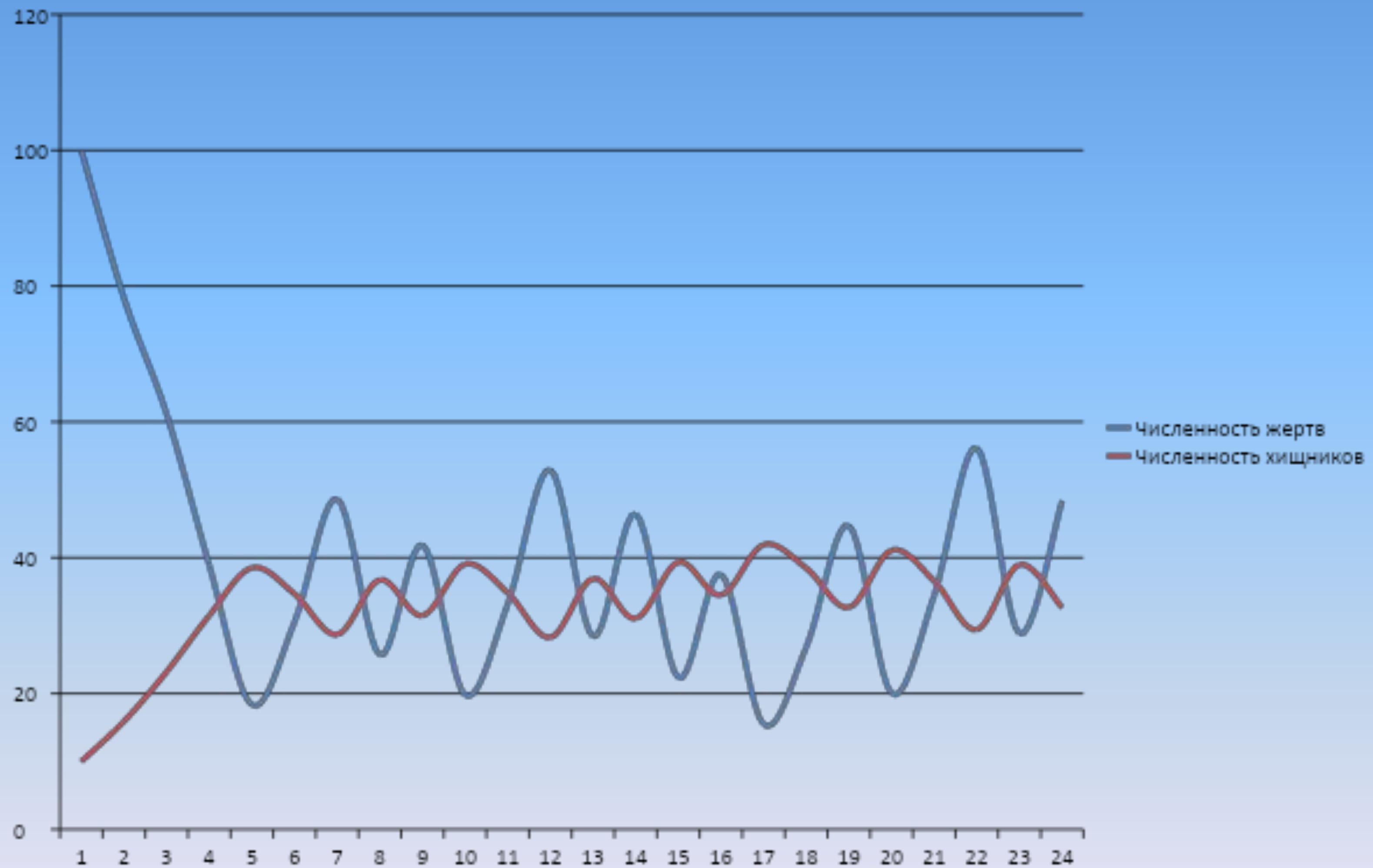
$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{\delta\alpha}{\beta}\tilde{x}$$

После чего дифференцируем одно уравнение и подставляем в него другое:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt} = -\frac{\beta\gamma}{\delta}\frac{\delta\alpha}{\beta}\tilde{x} = -\alpha\gamma\tilde{x}$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt} + \alpha\gamma\tilde{x} = 0$$

— является уравнением гармонического осциллятора с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\gamma}}$



120
100
80
60
40
20
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
Численность жертв
Численность хищников

Спасибо за внимание