Численные методы безусловной оптимизации. Метод Хука-Дживса (метод прямого поиска)

Метод Хука-Дживса

Суть метода:

❖ Поиск состоит из последовательности шагов исследующего поиска вокруг базисной точки, за которой в случае успеха следует поиск по образцу. Он применяется для решения задачи минимизирования функции без учета ограничений.

Содержание работы:

1. Исследующий поиск вокруг базисной точки $\bar{x}^{к}$
2. Поиск по «образцу»

Алгоритм метода прямого

- **Методы прямого поиска не используют никакой информации кроме значений целевой функции**

  Самая простая идея прямого поиска заключается в сканировании возможного пространства переменных $\overline{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

В первую очередь задается начальная точка поиска $\overline{x}^0$ и начальное приращение (шаг) $\Delta\overline{x}^0$. После этого начинается исследующий поиск.

Исследующий поиск. Делаем пробный шаг по переменной x_1, т.е. определяем точку $x_1^0 + \Delta x_1^0$ и вычисляем значение функции в точке $\overline{x}' = (x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

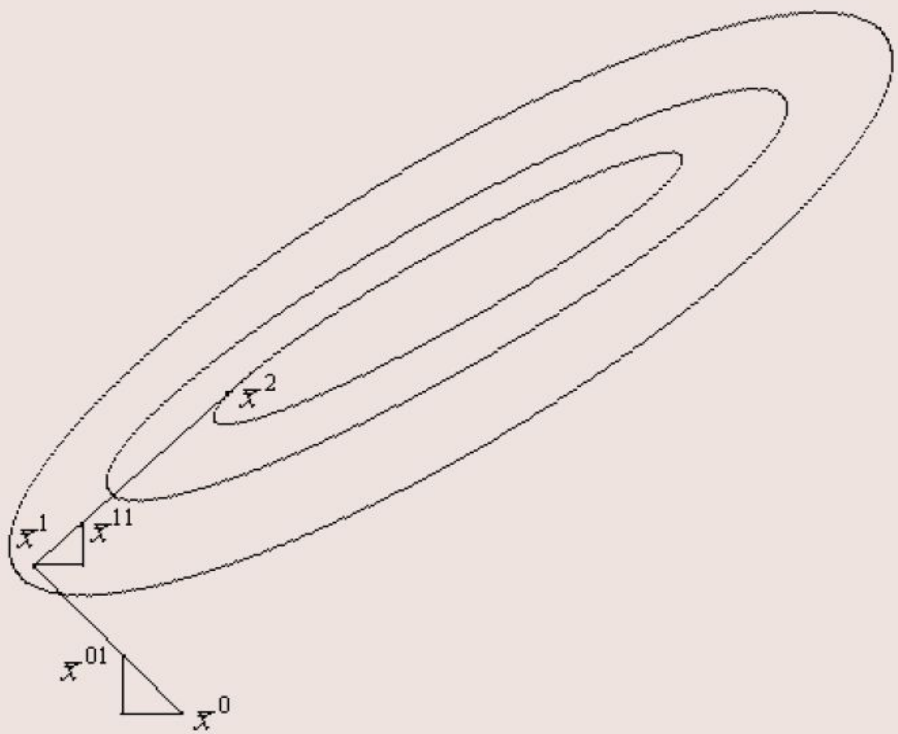
Если значение функции в данной точке больше, чем значение функции $f(\overline{x}^0)$, то делаем пробный шаг по этой же переменной, но в противоположном направлении. Если значение функции и в точке $\overline{x}'' = (x_1^0 - \Delta x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ больше чем $f(\overline{x}^0)$, то оставляем точку x_1^0 без изменений. Иначе заменяем точку $\overline{x}^0$ на $\overline{x}'$ или на $\overline{x}''$ в зависимости от того, где значение функции меньше исходного. Из вновь полученной точки делаем пробные шаги по оставшимся координатам, используя тот же самый алгоритм.

Поиск по образцу. После исследующего поиска мы получаем точку $\overline{x}^{01}$. Направление $\overline{x}^{01}-\overline{x}^{0}$ определяет направление, в котором функция уменьшается. Поэтому проводим минимизацию функции в указанном направлении, решая задачу

$$\min_{\lambda} f(\overline{x}^{0}+\lambda\cdot(\overline{x}^{01}-\overline{x}^{0})).$$

В поиске по "образцу" величина шага по каждой переменной пропорциональна величине шага на этапе исследующего поиска. Если удастся сделать удачный шаг в поиске по "образцу", то в результате находим новое приближение $\overline{x}^{1}=\overline{x}^{0}+\lambda^{0}\cdot(\overline{x}^{01}-\overline{x}^{0})$, где

$$\lambda^{0}=\arg\min_{\lambda} f(\overline{x}^{0}+\lambda\cdot(\overline{x}^{01}-\overline{x}^{0})).$$



Определяем значение функции в начальной точке

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = (5+6)^2+(6-1)^2= 146.$$

Выбираем приращения:

$$\Delta x_1=2\ ; \qquad \Delta x_2=2$$

Осуществляем исследующий поиск по координате x_1

$x_1^{(0)1} = 5+2 = 7$;

$f(\mathbf{x}^{(0)1}) = (7+6)^2+(6-1)^2= 194$ - шаг неудачный.

$x_1^{(0)2} = 5-2 = 3$;

$f(\mathbf{x}^{(0)2}) = (3+6)^2+(6-1)^2= 106$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$x_2^{(0)3} = 6+2 = 8$;

$f(\mathbf{x}^{(0)3}) = (3+8)^2+ (8-1)^2= 170$ - шаг неудачный.

$x_2^{(0)4} = 6-2 = 4$;

$f(\mathbf{x}^{(0)4}) = (3+4)^2+(4-1)^2=58$ - шаг удачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(1)}$ с координатами (3; 4).

Осуществляем пошаговый поиск по образцу:

Точка $\mathbf{x}^{(2)}$ имеет координаты (1; 2); $f(\mathbf{x}^{(2)})= (1+2)^2+(2-1)^2=10$.

Точка $\mathbf{x}^{(3)}$ имеет координаты (-1; 0); $f(\mathbf{x}^{(3)}) =(-1+0)^2+(0-1)^2=2$.

Точка $\mathbf{x}^{(4)}$ имеет координаты (-3,-2);

$f(\mathbf{x}^{(4)}) =(-3-2)^2+(-2-1)^2=34$ - шаг неудачный.

Переходим ко второй итерации.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(3)} = (-1; 0)$.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_1:

$\mathbf{x}^{(3)1} = (1; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(3)1}) = (1+0)^2+(0-1)^2=2$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$\mathbf{x}^{(3)2} = (1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(3)2}) = (1+2)^2+(2-1)^2=10$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(3)3} = (1; -2)$; $f(\mathbf{x}^{(3)3}) = (1-(-2))^2+(-2-1)^2=10$ - шаг неудачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(4)}$ с координатами (1; 0).

Осуществляем пошаговый поиск по образцу:

Точка $\mathbf{x}^{(5)}$ имеет координаты (3; 0);

$f(\mathbf{x}^{(5)})= (3+0)^2+(0-1)^2=10$ - шаг неудачный.

Поскольку неудачными оказались шаги по всем направлениям, проверяем условие окончания алгоритма $\Delta x_i=2> \varepsilon=0,2$, уменьшаем приращения в два раза: $\Delta x_1=1$; $\Delta x_2=1$

и переходим ко второй итерации.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(4)} = (1; 0)$.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_1:

$\mathbf{x}^{(4)1} = (2; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(4)1}) = (2+0)^2+(0-1)^2=5$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(4)2} = (0; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(4)2}) = (0+0)^2+(0-1)^2=1$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$\mathbf{x}^{(4)3} = (0; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(4)3}) = (0+1)^2+(1-1)^2=1$ - шаг удачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(5)}$ с координатами (0; 1); $f(\mathbf{x}^{(5)}) = 1$.

Осуществляем пошаговый поиск по образцу.

Точка $\mathbf{x}^{(6)}$ имеет координаты (-1; 2); $f(\mathbf{x}^{(3)}) = (-1+2)^2+(2-1)^2=2$.

Шаг неудачный, поэтому возвращаемся к точке $\mathbf{x}^{(5)}$ и повторяем исследующий поиск.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(5)} = (0; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(5)}) = 1$.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_1:

$\mathbf{x}^{(5)1} = (1; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(5)1}) = (1+1)^2+(1-1)^2=4$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(5)2} = (-1; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(5)2}) = (-1+1)^2+(1-1)^2=0$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$\mathbf{x}^{(5)3} = (-1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(5)3}) = (-1+2)^2+(2-1)^2=2$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(5)4} = (-1; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(5)4}) = (-1+0)^2+(0-1)^2=2$ - шаг неудачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(6)}$ с координатами (-1; 1); $f(\mathbf{x}^{(6)}) = 0$.

Последующие неудачные шаги объясняются случайным попаданием в точку минимума.

Поскольку пошаговый поиск по образцу не приносит положительных результатов, а также неудачными оказываются шаги по всем направлениям, проверяем условие окончания алгоритма $\Delta x_i=1> \varepsilon=0,2$, уменьшаем приращения в два раза:

$$\Delta x_1=0,5 \; ; \quad \Delta x_2=0,5$$

и переходим к следующей итерации итерации.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(6)} = (-1;\ 1)$; $f(\mathbf{x}^{(6)}) = 0$.

Исследующий поиск в окрестности базисной точки не приносит улучшения функции, поэтому уменьшаем шаг до 0,25 и далее до 0,125, что также не приводит к положительным результатам. Проверяем условие окончания поиска $\Delta x_i = 0{,}125 < \varepsilon = 0{,}2$ и заканчиваем вычисления.

Таким образом, за точку минимума принимаем значение

$\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(6)} = (-1;\ 1)$.

Траектория поиска приведена на рис.5.

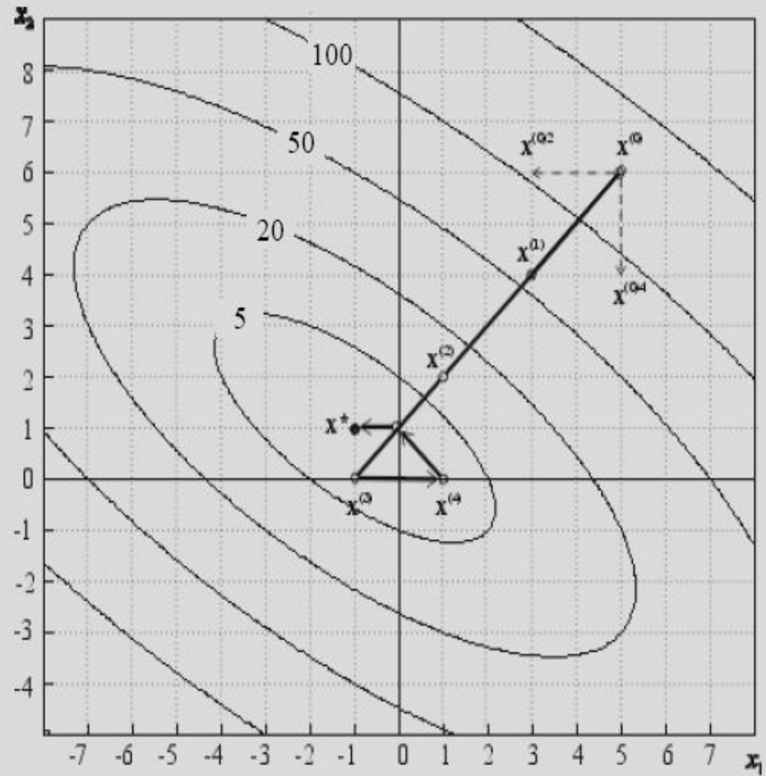
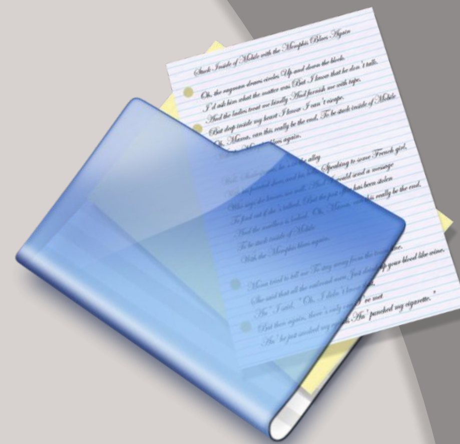


Рис. 5



Заключение

Достоинством метода прямого поиска является простота его программирования на компьютере. Он не требует знания целевой функции в явном виде, а также легко учитывает ограничения на отдельные переменные, а также сложные ограничения на область поиска.

Недостаток метода прямого поиска состоит в том, что в случае сильно вытянутых, изогнутых или обладающих острыми углами линий уровня целевой функции он может оказаться неспособным обеспечить продвижение к точке минимума.

Литература

1. Е.А. Кочегурова «Теория и методы оптимизаии», 49-55 с., 2012

2. Б.Банди «Методы оптимизации” 17-19 с., 1991

3. Р.Хук , Т.А.Дживс “ Прямой поиск решения для числовых и статических проблем» , 212-219 с., 1961 .