Численные методы безусловной оптимизации. Метод Ньютона

Историческая справка

- Метод Ньютона был описан Исааком Ньютоном в рукописи «Об анализе уравнениями бесконечных рядов», адресованной в 1669 году Барроу, и в работе «Метод флюксий и бесконечные ряды» или «Аналитическая геометрия» в собраниях трудов Ньютона, которая была написана в 1671 году.
- Впервые метод был опубликован в трактате «Алгебра» Джона Валлиса в 1685 году

Пример решения метода Ньютона

Дано:

$$F(x) = x^3+0,2x^2+0,5x+1,5 \qquad (1)$$

Интервал: -1;1
Точность: $\varepsilon < 0,001$;
Количество интервалов разбиения: n=1
Решение:

$$F(x) = x^3+0,2x^2+0,5x+1,5=0. \qquad (2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5. \qquad (3)$$

$$f''(x) = 6x - 0,4. \qquad (4)$$

Т.к. F(-1)*F(1)<0, то корень лежит в пределах [-1;1].

Вычислим значения в a=-1
Тогда f(-1)=-0.2; f'(-1)=-6.4.

поскольку f(a)*f''(a)>0, то x_0=a=-1

Таблица 1

N	X	F(x)	dF(x)	h=f(x)/f'(x)
1	-1	-0.2	3.9	-0.05128
2	-0.9487	-0.00828	3.5797	-0.00231
3	-0.9464	-1.6E-5	3.5656	0

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}, \qquad (5)$$

$$x_{i+1} = -0{,}9464 - \frac{-1.6\text{E}-5}{3{,}5656} = -0{,}94640472 \qquad (6)$$

Ответ: x=-0,94640472, F(x)= -1.6E-5

Достоинства и недостатки

Достоинства	Недостатки
если минимизируемая функция является квадратичной, то метод позволит найти минимум за один шаг	необходимость достаточно точного начального приближения.
если минимизируемая функция относится к классу поверхностей вращения (т.е. обладает симметрией), то метод также обеспечивает сходимость за один шаг	медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени при решении сложных нелинейных уравнений
если функция несимметрична, то метод не обеспечивает сходимость за конечное число шагов	необходимость вычисления производных на каждом шаге