

# Числові послідовності

Границя послідовності.



# Означення границі

## ПОСЛІДОВНОСТІ

Число  $a \in \mathbb{R}$  називається границею посл.

$\{a_n | n \geq 1\}$ , якщо для довільного додатного  $\varepsilon$  знайдеться такий номер  $N$  з множини натуральних чисел, який залежить від  $\varepsilon$ , починаючи з якого виконується нерівність:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

$a \in \mathbb{R}$  – границя  $\{a_n | n \geq 1\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon.$

**Позн**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  а б  $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$

0



# Означення

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною**.

Послідовність, у якої не має границі називається **розбіжною**.



# Геометричний зміст

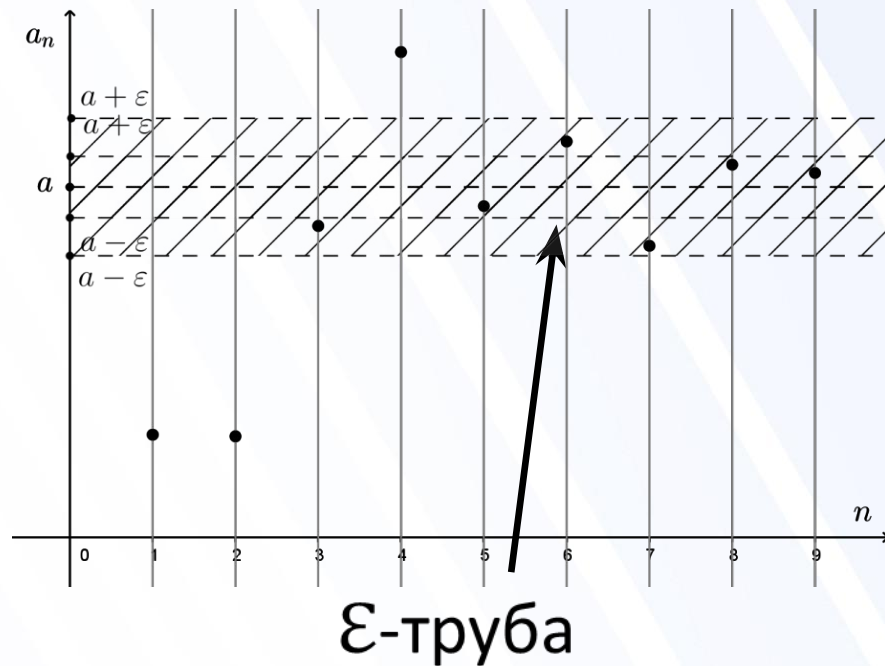
$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow$$
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$



# Геометричний зміст

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

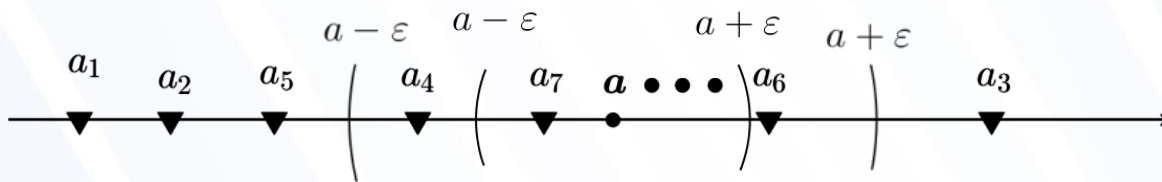
Тобто для кожного конкретного  $\varepsilon$  всі члени збіжної послідовності, починаючи з номера  $N(\varepsilon)$  будуть знаходитись у множині  $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ .



# Геометричний зміст

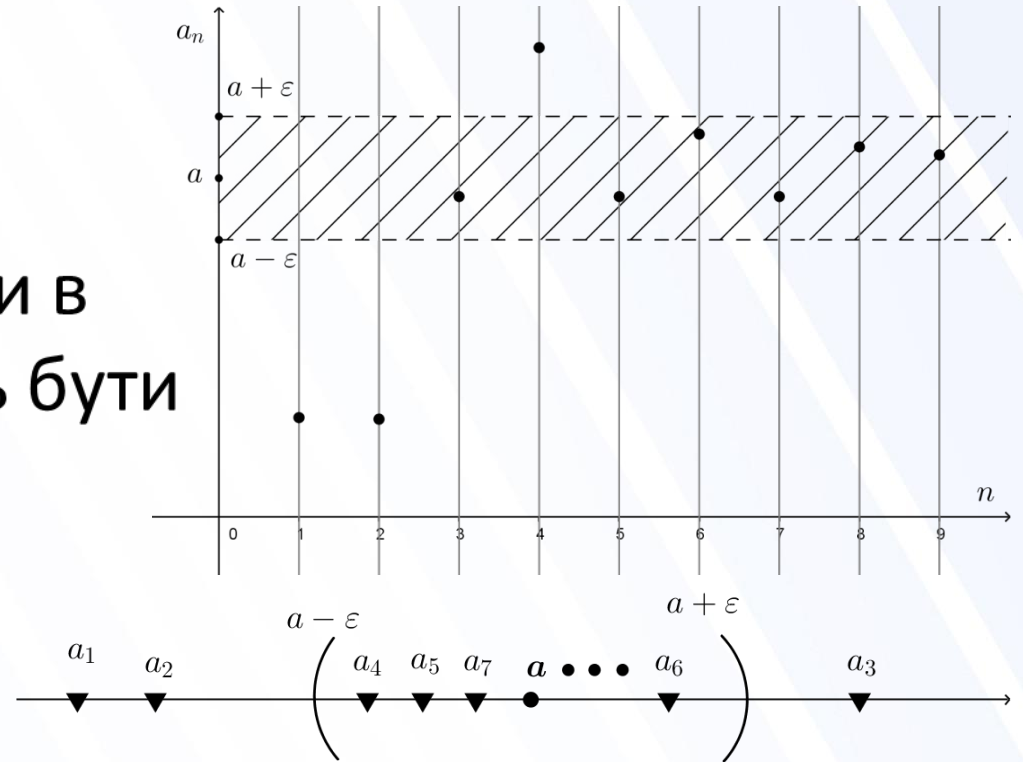
$a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ .  $\varepsilon$ -околом т.  $a$  називається інтервал  
 $(a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$

Тобто, для кожного  $\varepsilon > 0$ , починаючи з деякого номера, всі члени збіжної послідовності попадають у  $\varepsilon$ -окіл її границі.



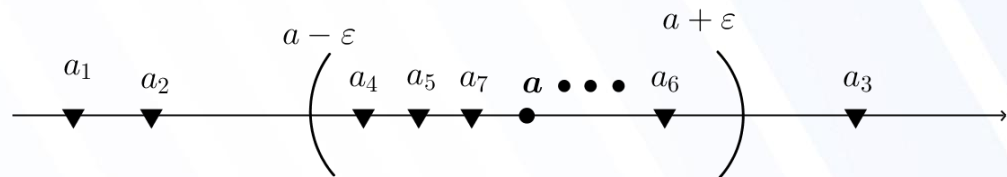
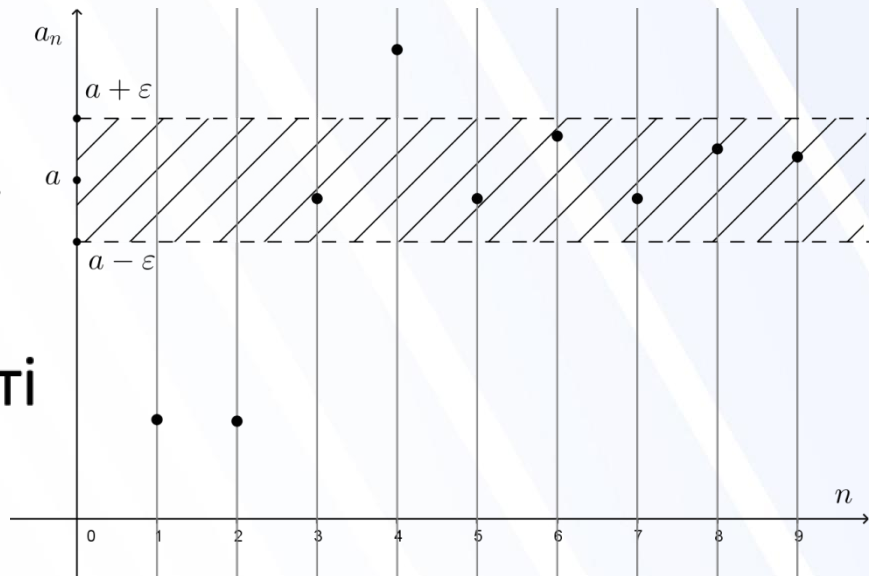
# Зауваження 1

До  $N(\varepsilon)$  члени  
послідовності можуть  
попадати і не попадати в  
 $\varepsilon$ -окіл. Після всі мають бути  
в  $\varepsilon$ -околі.



# Зауваження 2

Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  
то для  $\forall \varepsilon > 0$  зовні  $\varepsilon$ -околу  
знаходиться лише скінченна  
кількість членів послідовності  
(може і жодного).





Знайти границю послідовності  $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1$ .

$$a_1 = 2, a_2 = 2,5, a_3 = 2\frac{2}{3}, a_4 = 2\frac{3}{4}, \dots, a_{100} = 2,99, \dots,$$

**Гіпотез**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

**а:**

Доведемо за  
означенням

Тобто для  $\forall \varepsilon > 0$  треба знайти  $N$ , починаючи з якого

$$|a_n - 3| < \varepsilon.$$



Знайти границю послідовності  $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1$ .

Розглянемо частковий випадок  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ :

$$|a_n - 3| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{3n-1}{n} - 3 \right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{n} \right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100.$$

Отже для  $n \geq 101$ :  $|a_n - 3| < 0,01$  і  $N = 101$ .



Знайти границю послідовності  $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1$ .

Тепер в загальному випадку  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$|a_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3n-1}{n} - 3 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$  – найперше натуральне число,

що перевищує  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3.$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1: \forall n \geq N: |a_n - 3| < \varepsilon$$



Довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 0$ .

Нехай  $\varepsilon > 0$ :

Знайдемо  $N(\varepsilon)$ , починаючи з якого  $|a_n - 0| < \varepsilon$ .

$$\left| \frac{3}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = \left\lceil \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} \right\rceil + 1: \forall n \geq N: |a_n - 0| < \varepsilon$$

Том  
у  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 0$ .



# Теорема про єдиність границі послідовності

Збіжна послідовність має лише одну  
границю.



# Теорема про єдиність границі послідовності

Доведення: Метод від

Нехай супротивного

$$a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \text{ і } a_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty, a, b \in \mathbb{R} \text{ і } a \neq b$$

Тоді за

означенням  $\forall \varepsilon > 0: \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0: \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$



# Теорема про єдиність границі послідовності

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$$

Розглянемо  $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$ ,  $N_3 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ бо } N_3 \geq N_1(\varepsilon)$$

$$\forall n \geq N_3(\varepsilon) \quad |a_n - b| < \varepsilon, \text{ бо } N_3 \geq N_2(\varepsilon)$$



# Теорема про єдиність границі

послідовності

$$\varepsilon = \frac{|a - b|}{3}$$

$$\forall n \geq N_3(\varepsilon)$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_3: |a - b| &= |a - a_n + a_n - b| \leq \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3} |a - b| \end{aligned}$$

Маємо  $|a - b| < \frac{2}{3} |a - b| \Rightarrow$  протиріччя  $\Rightarrow a = b.$





# Властивості збіжних послідовностей.



# Теорема 1

Збіжна послідовність – обмежена.

