Числовые ряды

Выполнила:
студентка заочного отделения группы 141 у
Журавлева В.

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел u1, u2, …un, соединенных знаком сложения.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_n$$

- Числа u1, u2, …un называются членами ряда.

- Член un называется общим или n – ным членом ряда.

Можно найти сумму некоторого числа членов ряда:

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$\ldots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Сумма n первых членов ряда называется n-ой частичной суммой ряда S_n.

Поскольку число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют числовую последовательность: $S_1, S_2, \ldots, \quad S_n \ldots$

- Числовой ряд сходится, если сходится последовательность его частичных сумм;
- Числовой ряд расходится, если расходится последовательность его частичных сумм;
- Числовой ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей его членов.

Если числовой ряд сходится, то предел S последовательности его частичных сумм носит название суммы ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^{n} = a + aq + aq^{2} + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

называется геометрическим

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

Известно, что сумма её первых n членов .

Очевидно: это n-ая частичная сумма ряда

- Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

называется гармоническим.

- Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

называется обобщенным гармоническим.

Если $p=1$, то данный ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если $p<1$, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится. При $p>1$ имеем геометрический ряд, в котором $|q|<1$; он является сходящимся.

Итак, обобщенный гармонический ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p<1$.

Радиус и область сходимости степенного ряда

- Радиусом сходимости степенного ряда называется такое число R, при котором ряд сходится , если $|x|<R$, и расходится, если $|x|>R$.
- Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех значений x, при которых данный ряд сходится. Согласно теореме Абеля, если степенной ряд сходится при значении x = x0 ≠ 0, то он сходится и, притом абсолютно, при всех значениях |x| < |x0|. И если степенной ряд расходится при x=x1, то он расходится при всех значениях |x| > |x1|.
- Отсюда: если ряд сходится при |x| < |x0| ≠ 0, то выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

- Следовательно существует такое число R≥0, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости, а интервал (-R,R) - интервал сходимости степенного ряда. На концах интервала сходимость ряда однозначно неопределена.

Т.е. при $x = -R$ и $x = R$, ряд может сходиться или расходиться.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Свойства степенных рядов

- Если на отрезке [a,b], целиком принадлежащем интервалу сходимости (-R;R), функция f(x) является непрерывной, то степенной ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1 x\,dx + \int_a^b c_2 x^2\,dx + \ldots + \int_a^b c_n x^n\,dx + \ldots}$$

в интервале сходимости степенной ряд можно также почленно дифференцировать.

$$\boxed{f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots}$$

Ряд Маклонера

Ряд Маклорена – это частный случай ряда Тейлора в окрестности точки x=0

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n.$$

Условие разложения функции в ряд Маклорена: если функция f(x) дифференцируема в окрестностях точки x0 любое число раз и в некоторой окрестности этой точки lim Rn(x)=0.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Пример:

- Найти ряд Маклорена для функции $\cos^2 x$

Решение

- Воспользуемся тригонометрическим равенством $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

- Поскольку ряд Маклорена для cos x имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ то можно записать

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Отсюда следует:

$$1+\cos 2x = 1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!