

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Выполнила:
студентка заочного отделения группы 141 у
Журавлева В.

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел u_1, u_2, \dots, u_n , соединенных знаком сложения.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_n$$

- Числа u_1, u_2, \dots, u_n называются членами ряда.
- Член u_n называется общим или n – ным членом ряда.

Можно найти сумму некоторого числа членов ряда:

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

...

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Сумма n первых членов ряда называется n -ой частичной суммой ряда S_n .

Поскольку число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют числовую последовательность: $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$

- Числовой ряд сходится, если сходится последовательность его частичных сумм;
- Числовой ряд расходится, если расходится последовательность его частичных сумм;
- Числовой ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей его членов.

Если числовой ряд сходится, то предел S последовательности его частичных сумм носит название суммы ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

называется

геометрическим

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

Известно, что сумма её первых n членов .

Очевидно: это n -ая частичная сумма ряда

- Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

называется гармоническим.

- Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

гармоническим.

называется обобщенным

Если $p=1$, то данный ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если $p < 1$, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится. При $p > 1$ имеем геометрический ряд, в котором $|q| < 1$; он является сходящимся.

Итак, обобщенный гармонический ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$.

Радиус и область сходимости степенного ряда

- Радиусом сходимости степенного ряда называется такое число R , при котором ряд сходится, если $|x| < R$, и расходится, если $|x| > R$.
- Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех значений x , при которых данный ряд сходится. Согласно теореме Абеля, если степенной ряд сходится при значении $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и, притом абсолютно, при всех значениях $|x| < |x_0|$. И если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех значениях $|x| > |x_1|$.
- Отсюда: если ряд сходится при $|x| < |x_0| \neq 0$, то выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$$n \rightarrow \infty$$

- Следовательно существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости, а интервал $(-R, R)$ - интервал сходимости степенного ряда. На концах интервала сходимость ряда однозначно неопределена.

Т.е. при $x = -R$ и $x = R$, ряд может сходиться или расходиться.



$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Свойства степенных рядов

- Если на отрезке $[a,b]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости $(-R;R)$, функция $f(x)$ является непрерывной, то степенной ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \int_a^b c_2 x^2 dx + \dots + \int_a^b c_n x^n dx + \dots$$

в интервале сходимости степенной ряд можно также почленно дифференцировать.

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3 x^2 + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots$$

Ряд Маклорена

Ряд Маклорена – это частный случай ряда Тейлора в окрестности точки $x=0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n.$$

Условие разложения функции в ряд Маклорена: если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестностях точки x_0 любое число раз и в некоторой окрестности этой точки $\lim R_n(x)=0$.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Пример:

- Найти ряд Маклорена для функции $\cos^2 x$

Решение

- Воспользуемся тригонометрическим равенством $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

- Поскольку ряд Маклорена для $\cos x$ имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ то можно записать

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Отсюда следует:

$$1 + \cos 2x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}.$$

СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!
