ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

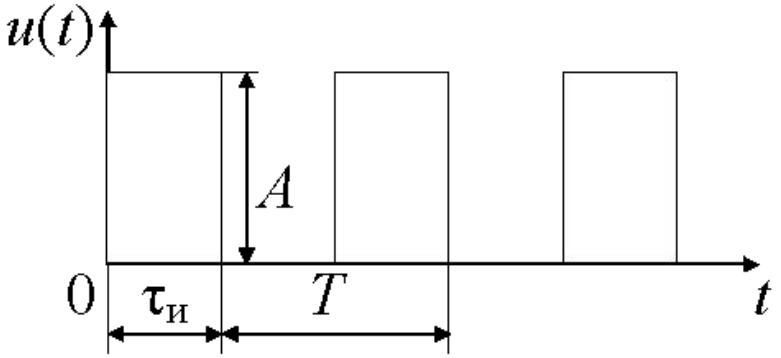
4 часа

Классификация сигналов

Детерминированные сигналы – заранее известные для любого момента времени, описываемые заданной функцией времени $u(t)$.

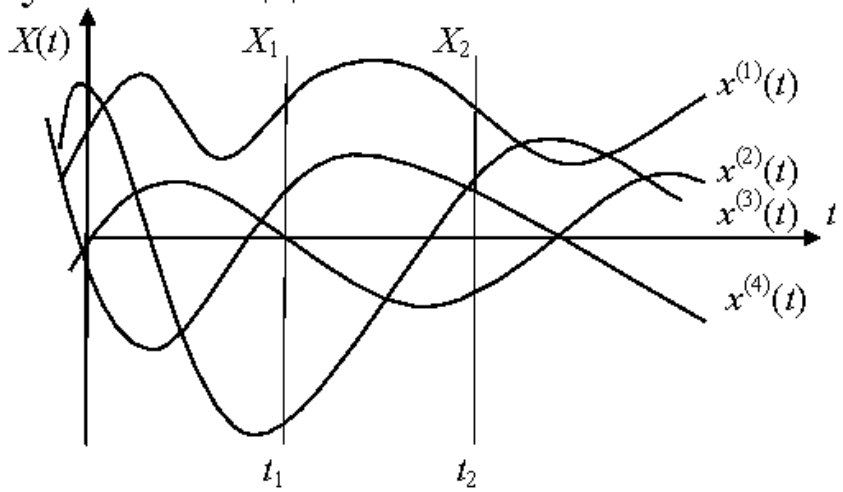
Аналоговые $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

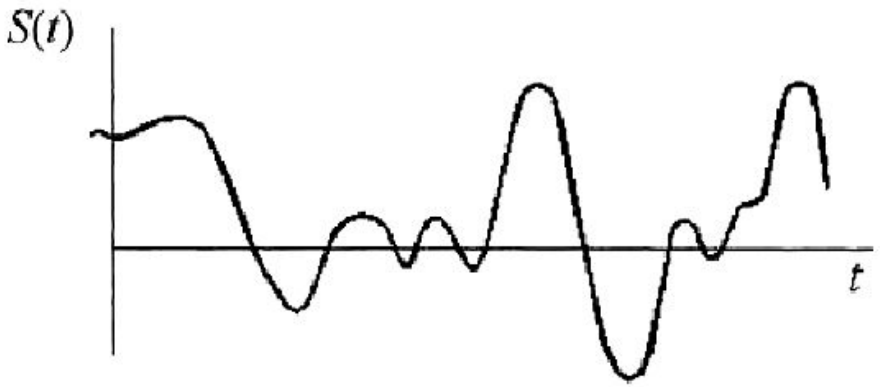
Периодическая импульсная последовательность



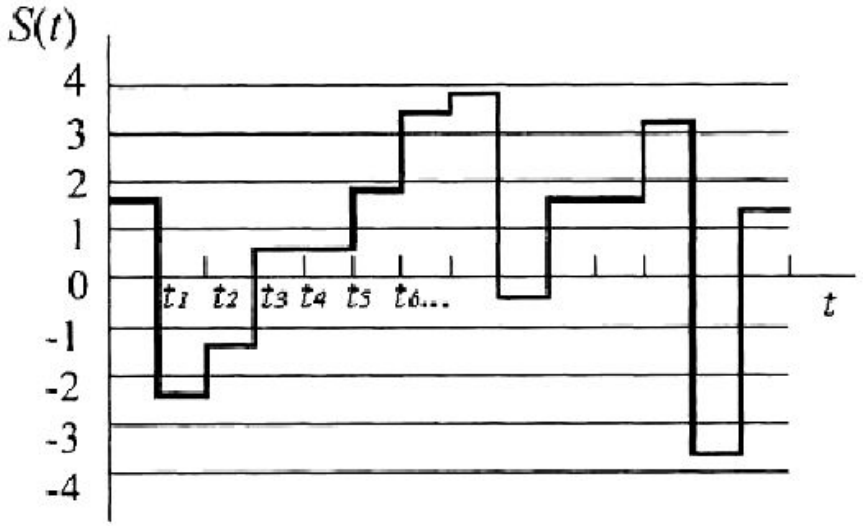
$$u(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, \tau_и + T]; \\ 0, & t \notin [0, \tau_и + T]; \end{cases}$$

Случайные сигналы – значения параметров в любой момент времени заранее непредсказуемы с заданной точностью

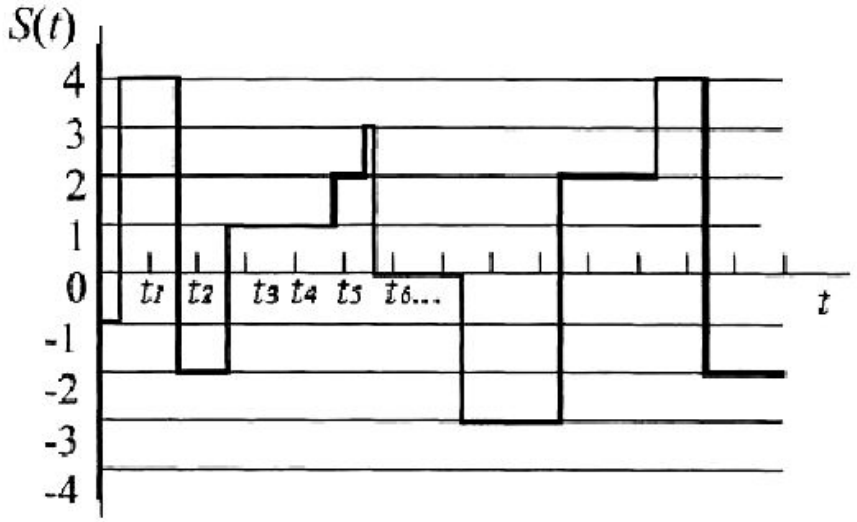



S(t)
t

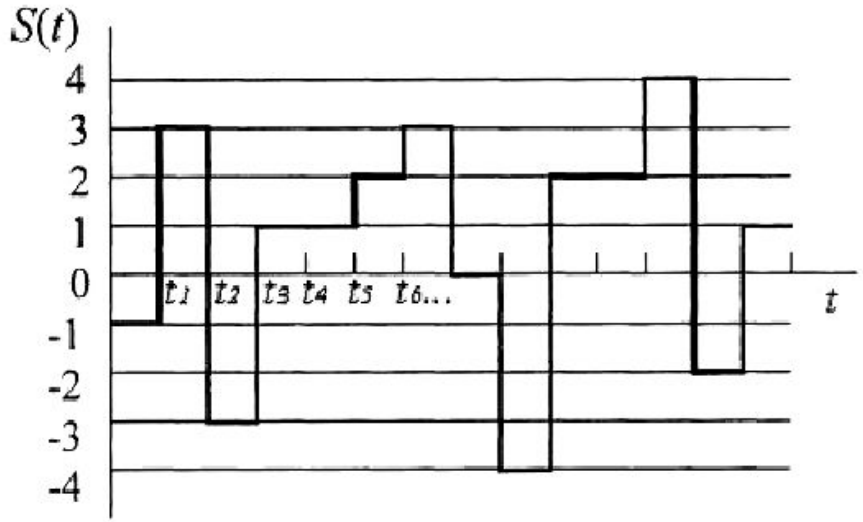
а)


S(t)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
t1 t2 t3 t4 t5 t6...
t

б)


S(t)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
t1 t2 t3 t4 t5 t6...
t

в)


S(t)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
t1 t2 t3 t4 t5 t6...
t

г)

Тип передаваемых сообщений

Тип сигнала	Полоса частот F_c/ скорость передачи	Динамический диапазон, D_c
Телефонный	0,3…3,4 кГц	35…40 дБ
Факсимильный		~ 25 дБ
Телеграфный	50…200 Бод	
Передача данных	600…48000 Бод	
Звуковое вещание	0,03…15 000 кГц	25…65 дБ
Телевещание	0…6 МГц	~ 40дБ

Обобщённый ряд Фурье

Для использования частотного метода анализа применяют разложение сигналов в обобщённый ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(t), \qquad (1)$$

где $c_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|^2} \int_a^b x(t)\varphi_j(t)dt$ $\varphi_j(t)$ – бесконечная система действительных попарно ортогональных на отрезке [a, b] функций:

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = 0 \text{ при } n \neq m; \quad \int_a^b \varphi_n^2(t)dt \neq 0.$$

Обобщенный ряд Фурье при заданной системе функций $\varphi_n(t)$ и при фиксированном числе слагаемых ряда обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума СКО) данной функции $x(t)$.

Если в качестве ортогональных используются функции вида:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \cos k\Omega t, \\ \sin k\Omega t, \\ e^{jk\Omega t}; \end{cases}$$

то ряд (1) называется рядом Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\Omega_1 t + b_k \sin k\Omega_1 t\right),\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos k\Omega_1 t dt,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin k\Omega_1 t dt;$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\Omega_1 t}, \qquad \dot{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\Omega_1 t} dt;$$

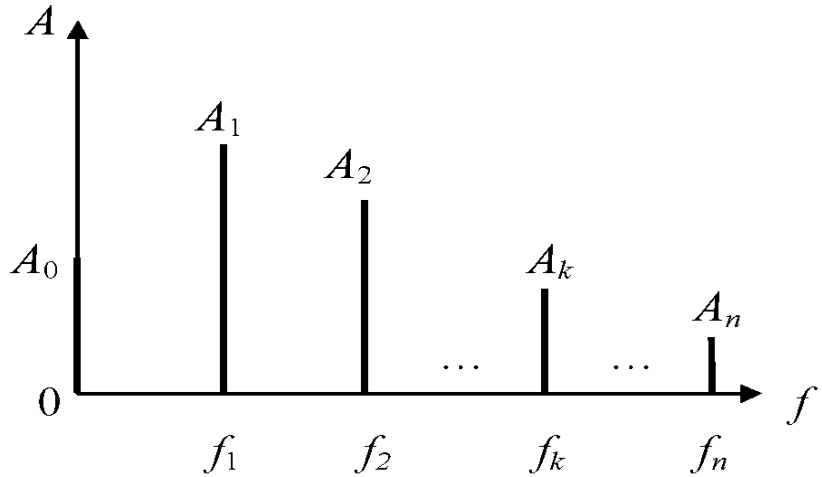
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(k\Omega_1 t - \varphi_k\right),\quad A_0 = \frac{a_0}{2},\quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},\qquad \operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k},$$

где $\Omega_1 = 2\pi/T$ – частота первой гармоники, T – период функции $\boldsymbol{x}(t)$.

Периодическую функцию $x(t)$ можно представить суммой гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $f_1 = 1/T$ $(\omega_1 = 2\pi/T)$ с амплитудами A_k и начальными фазами φ_k.

Совокупность амплитуд A_k (k = 0, 1, 2, ...) образует ***амплитудный спектр***, а совокупность фаз φ_k (k = 0, 1, 2, ...) – ***фазовый спектр функции***.

Спектр периодического сигнала – дискретный.



Амплитудный спектр периодического сигнала

Спектр непериодического сигнала – сплошной и определяется интегралом Фурье $S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ – ***спектральная плотность сигнала***.

$W_x(f) = S_x^2(f)$ – ***спектральная плотность энергии,*** $E = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(f)df$;

$G_x(f) = S_x^2(f)/T$ – ***спектральная плотность мощности***; $P = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_x(f)df$.

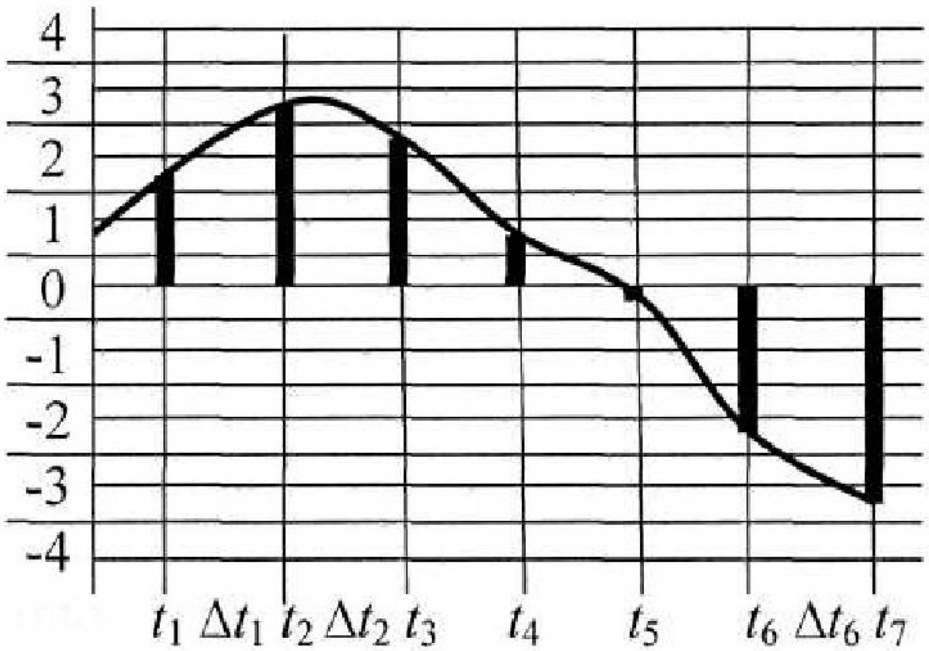
Эти характеристики являются чётными функциями частоты, следовательно:

$$E = 2\int\limits_0^{\infty} W_x(f)df = \int\limits_0^{\infty} W_{0,x}(f)df, \qquad P = 2\int\limits_0^{\infty} G_x(f)df = \int\limits_0^{\infty} G_{0,x}(f)df,$$

где $W_{0,x}(f) = 2W_x(f)$ и $G_{0,x}(f) = 2G_x(f)$ – СПЭ и СПМ, определённые на положительных частотах.

Дискретизация и восстановление непрерывных сигналов. Теорема Котельникова.

Дискретизация по времени – взятия отсчётов первичного сигнала $s(t)$ в определённые дискретные моменты t_k; непрерывная функция $s(t)$ заменяет совокупностью мгновенных значений (отсчётов) $\{s(k)\}$ или $\{s(t_k)\}$.



Значения, полученные при дискретизации 1,7 2,7 2,2 0,7 -0,2 -2,2 3,2

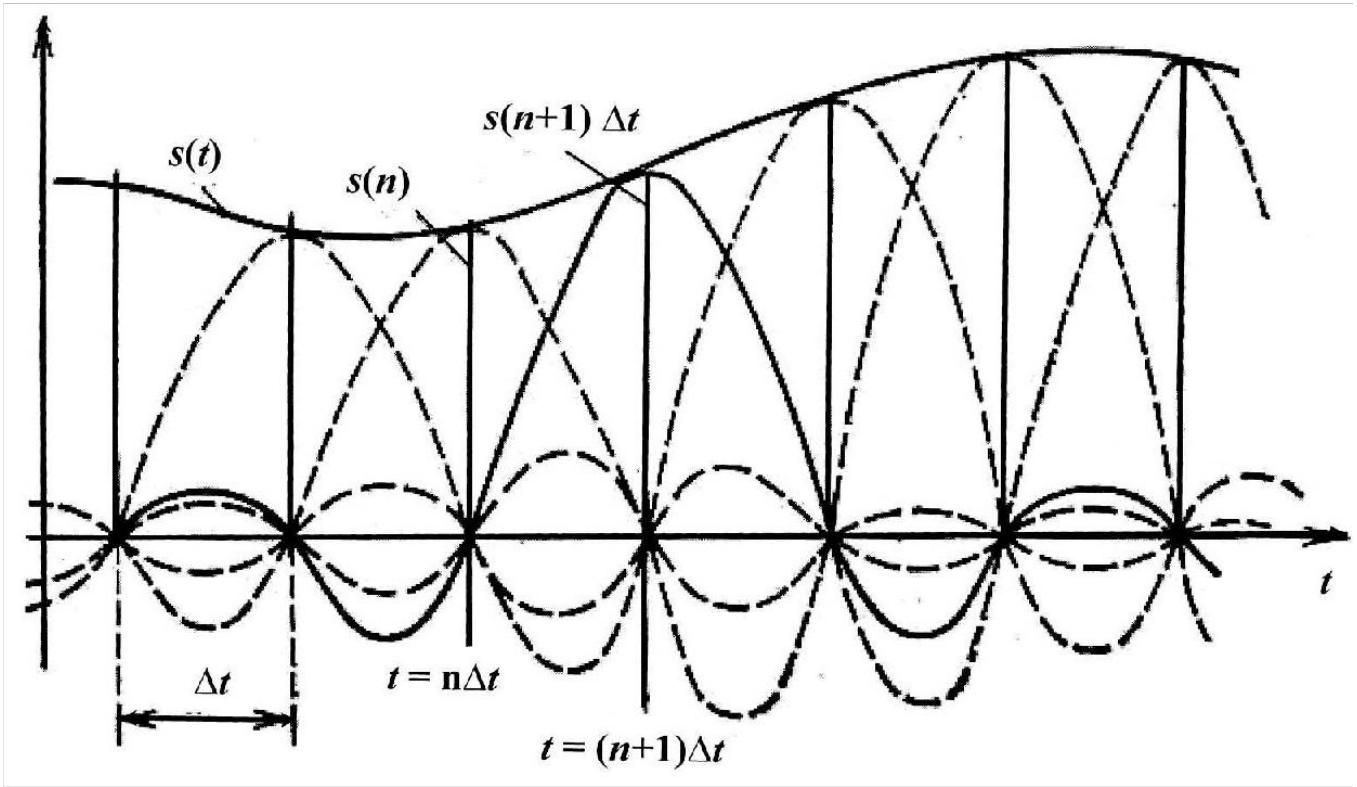
Теорема Котельникова (*отсчетов, Найквиста*): непрерывный сигнал $s(t)$, спектр которого ограничен сверху частотой $F_{в}$, полностью определяется отсчетами мгновенных значений $s(k\Delta t)$ в точках, отстоящих друг от друга на интервалы $\Delta t \leq 1/2F_{в}$. Интервал Δt называется ***интервалом Котельникова (Найквиста)***, а $f_{д} = 1/\Delta t$ – ***частотой дискретизации***.

Эта теорема позволяет представить непрерывную функцию $s(t)$ в виде ряда Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t)\frac{\sin\left[2\pi F_{в}(t-k\Delta t)\right]}{2\pi F_{в}(t-k\Delta t)},$$

$$\varphi_{k}(t) = \frac{\sin\left[2\pi F_{в}(t-k\Delta t)\right]}{2\pi F_{в}(t-k\Delta t)} = \begin{cases} 1, & t = k\Delta t; \\ 0, & t = n\Delta t, \quad n \neq k; \end{cases}$$ – базисная функция отсчётов.

Ряд Котельникова точно определяет функцию $s(t)$ в точках отсчета (коэффициентами ряда являются сами выборки из функции $s(k\Delta t)$) и определяет функцию $s(t)$ в любой момент t.



Представление сигнала рядом Котельникова

Теоретически отсчёты функции $s(t)$ получаются в результате её перемножения на периодическую последовательность δ-импульсов $u_\delta(t)$ с периодом $T = \Delta t$, спектр которой является дискретным:

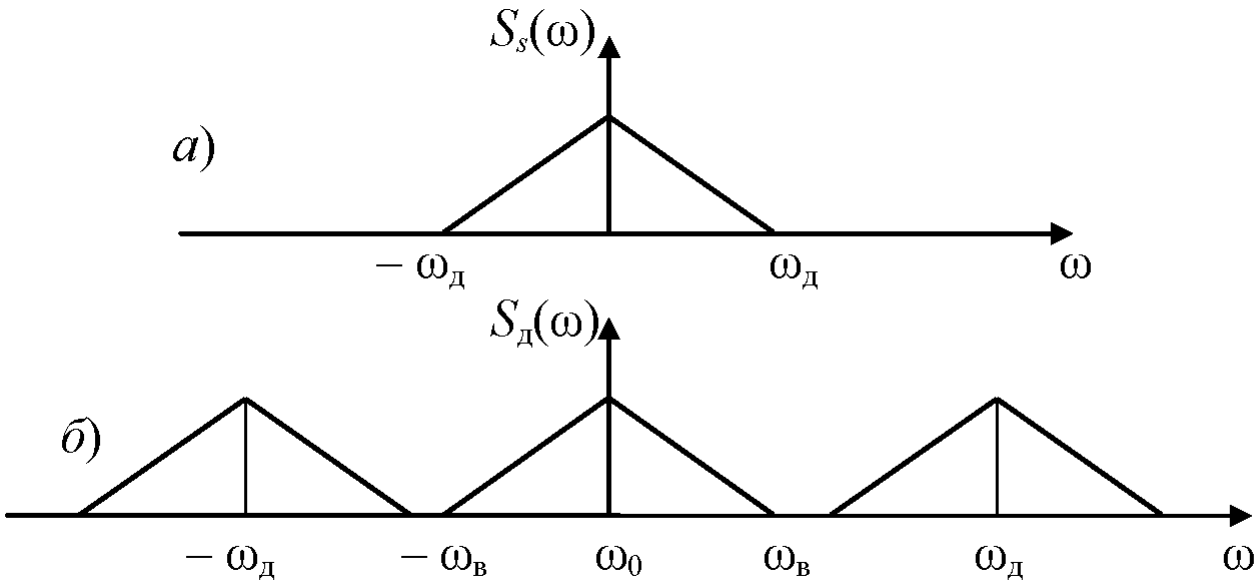
$$s_д(t) = s(t)u_\delta(t) = s(t)\left[\ldots + \frac{1}{\Delta t}e^{-j\omega_\partial t} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}e^{j\omega_\partial t} + \ldots\right]$$ – дискретный сигнал,

$$\dot{S}_д(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_д(t)e^{-j\omega t}dt = \square + \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j(\omega+\omega_д)t}dt + \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt + \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j(\omega-\omega_д)t}dt + \square =$$

$$= \ldots\frac{1}{\Delta t}\dot{S}_s(\omega+\omega_д) + \frac{1}{\Delta t}\dot{S}_s(\omega) + \frac{1}{\Delta t}\dot{S}_s(\omega-\omega_д) + \frac{1}{\Delta t}\dot{S}_s(\omega-2\omega_д) + \ldots,$$

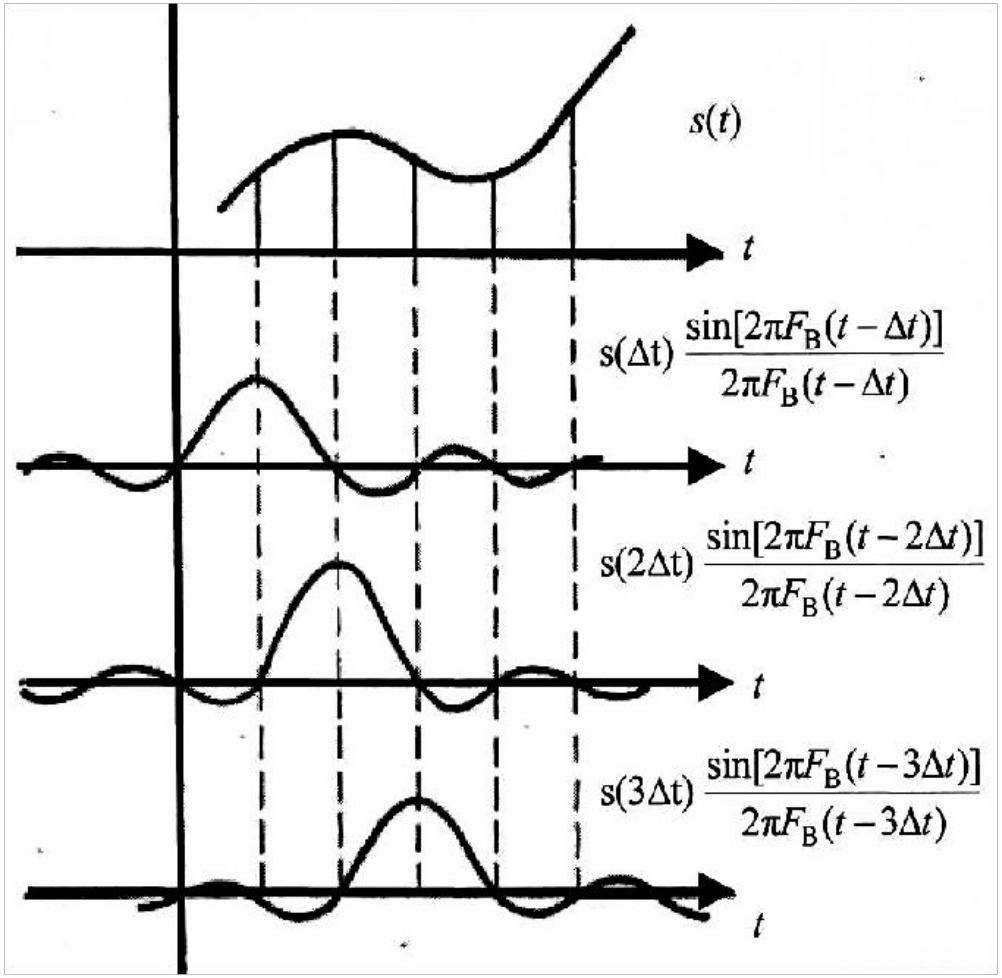
$\dot{S}_д(\omega)$ – спектр дискретизированного сигнала $s_д(t)$,

$S_s(\omega)$ – спектр исходного сигнала $s(t)$.



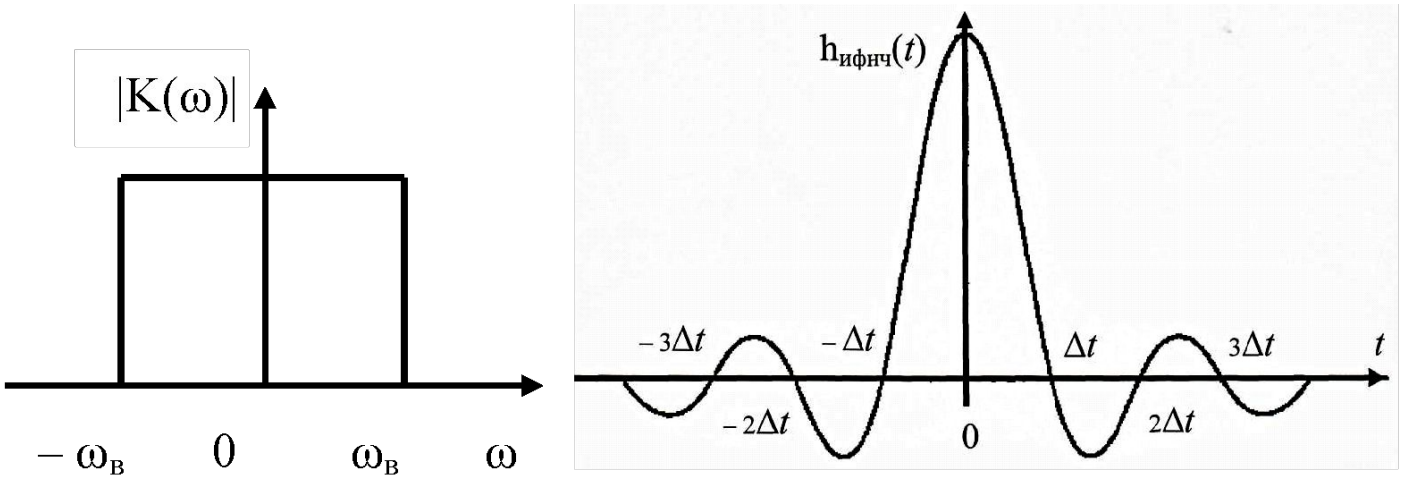
Спектр исходного (а) и дискретизированного сигнала (б)

Восстановление исходного сигнала по последовательности отсчетов осуществляется путем формирования для каждого отсчета $s(k\Delta t)$ функции $\varphi_k(t) = \sin\left[2\pi F_в (t - k\Delta t)\right] / 2\pi F_в (t - \Delta t)$ с соответствующей амплитудой и последующим суммированием всех функций.



Восстановление исходного сигнала по последовательности отсчётов

Устройством, формирующим отклик вида (sin x)/x при воздействии δ-импульса, является идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ) с АЧХ и ИХ характеристиками, представленными на рис.



АЧХ (*а*) и ИХ (*б*) ИФНЧ

Погрешности дискретизации и восстановления непрерывного сигнала

1. Теорема Котельникова точно справедлива только для сигналов с финитным (конечным) спектром, т. е. имеющих бесконечную длительность. Спектры реальных сигналов (конечной длительности) бесконечны. Погрешность дискретизации определяется энергией спектральных составляющих сигнала, лежащих за пределами частоты $\omega_в$

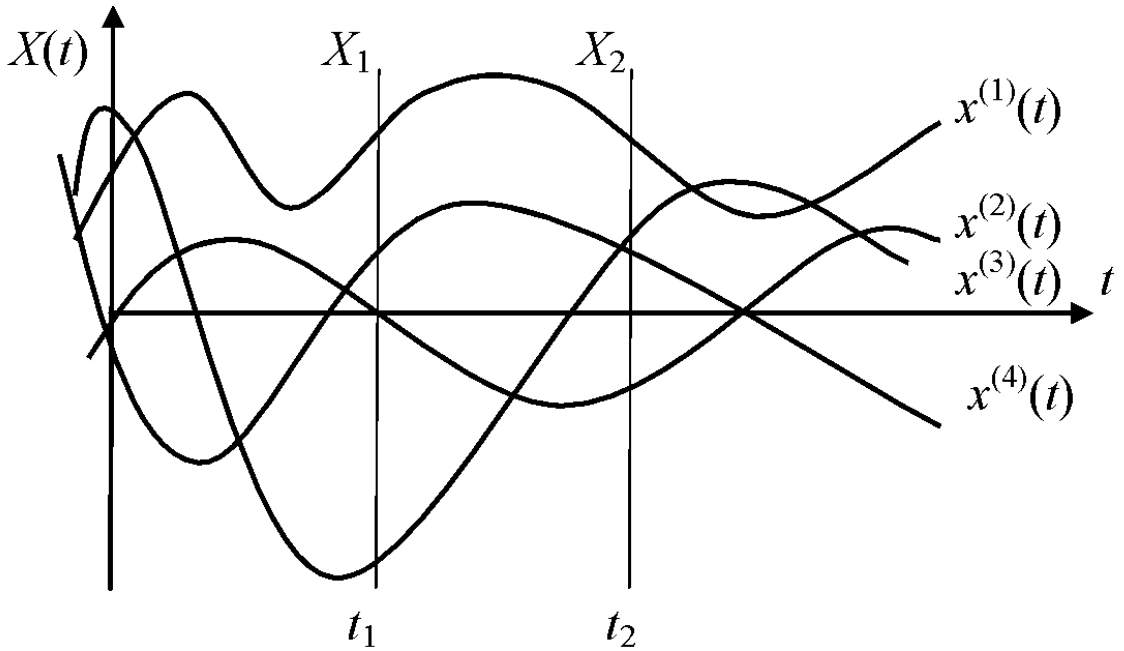
$$\overline{\Delta E_д^2} = \int_{\omega_в}^{\infty} \left| \dot{S}_s(\omega) \right|^2 d\omega.$$

2. Вторая причина возникновения погрешностей – неидеальность восстанавливающего ФНЧ:

$$h_{фнч}(t) = e^{-\frac{t}{R_ф C_ф}} \Big/ R_ф C_ф .$$

<u>Вывод</u>: чем выше $\omega_в$ и чем ближе характеристики восстанавливающего ФНЧ к идеальным, тем ближе восстановленный сигнал к исходному.

Случайные процессы и их основные характеристики



Случайная функция – функция, значения параметров которой в любой момент времени заранее непредсказуемы с заданной точностью.

Реализация случайной функции – вид случайной функции в конкретном испытании $x^{(i)}(t)$.

Случайная величина – значение случайной функции в конкретный момент времени $X_k = \{x^{(i)}(t_k)\}$.

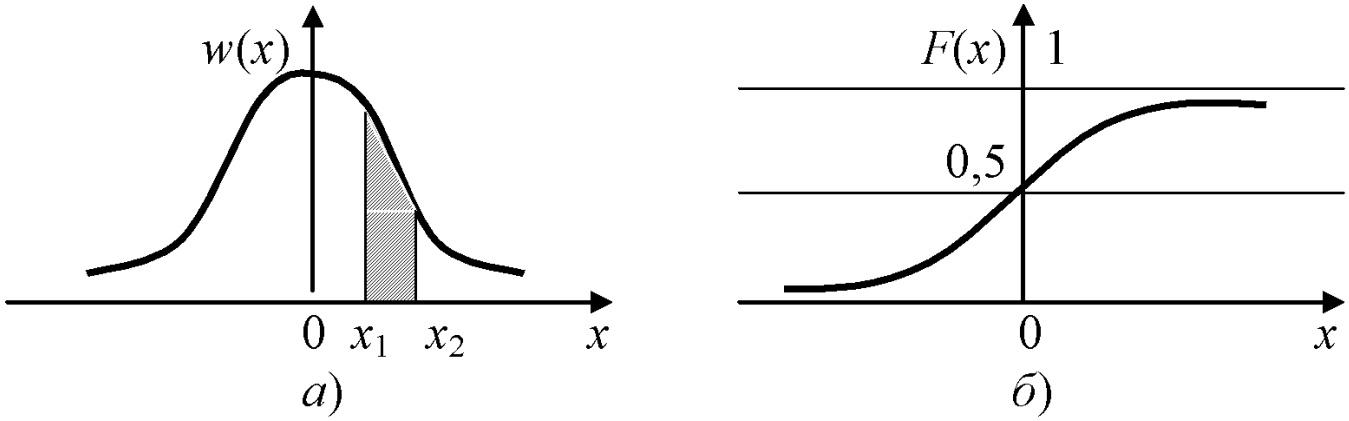
Случайный процесс – совокупность случайных функций $\{x^{(i)}(t)\}$.

Для непрерывных СП $X(t)$ распределение вероятностей в заданном сечении t_1 характеризуется одномерной ***плотностью вероятностей***:

$$w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x \le X \le x + \Delta x)}{|\Delta x|} \ge 0$$

или ***интегральной функцией распределения*** (ИФР) $F(x)$:

$$F(x) = p(X < x) = \int_{-\infty}^{x} w(x)dx.$$



Типовые графики одномерных ПВ (*а*) и ИФР (*б*)

$$w(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}$$ – n-мерная ПВ

Основные свойства ИФР и ПВ случайной величины

Название и обозначение	**Функция распределения $F(x)$**	**Плотность вероятности $w(x)$**
Определение	$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$	$w(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{p(x \le X \le x + \Delta x)}{\lvert \Delta x \rvert}$
Физическая размерность	**безразмерная**	**размерность** $\frac{1}{X}$
Взаимосвязь	$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} w(y)dy$	$F(x) = p(X \le x)$
Особенности функции	$F(x_2) \ge F(x_1)$ **при** $x_2 > x_1$ **(неубывающая)**	$w(x) \ge 0$ **(неотрицательная)**
Расчёт вероятности	$p(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	$p(x_1 \le X \le x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} w(x)dx$
Свойство нормировки	$F(-\infty) = 0, \qquad F(\infty) = 1$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$

Основные числовые характеристики

Математическое ожидание $m_1(t) = M\left[X(t)\right] = \overline{X(t)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x w(x,t)dx$

– усреднённое по множеству реализаций значение случайного процесса; физический смысл – среднее значение случайного процесса; размерность СП.

Дисперсия $\sigma^2(t) = D\left[X(t)\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2(t)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_1(t)\right]^2 w(x,t)dx$

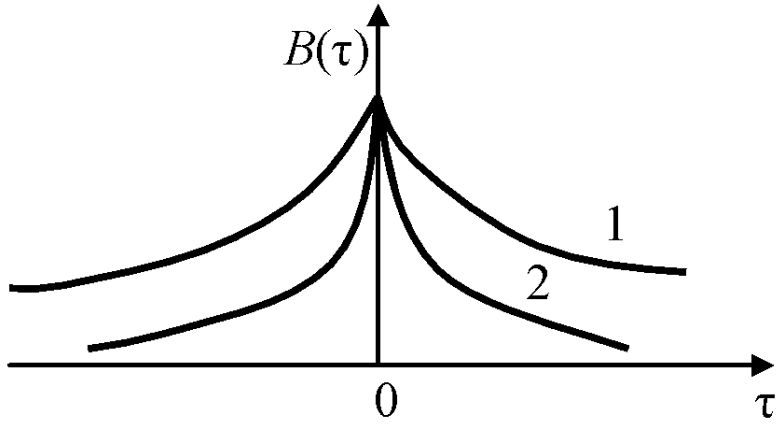
– стандартное или среднеквадратическое отклонение значений СП от математического ожидания, характеризует разброс СВ относительно МОЖ; физический смысл – мощность переменной составляющей СП;

Функция корреляции – характеризует статистическую связь между значениями СП в моменты времени t_1 и t_2, разделённые интервалом $\tau = t_2 - t_1$:

$$B_x(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}_1 \cdot \overset{\circ}{X}_2\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - m_1(t_1)\right]\left[x_2 - m_1(t_2)\right] w(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2.$$

Ковариационная функция

$$K_x(t_1,t_2) = M\left[X(t_1)\cdot X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2.$$



Функция корреляции СП с медленно (1) и быстро (2) убывающими связями

Функция взаимной корреляции – характеризует статистическую связь между значениями двух СП в моменты времени t_1 и t_2, разделёнными интервалом $\tau = t_2 - t_1$:

$$B_{xy}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{1x})(y-m_{1y})w_2(x_1,y_2;t_1,t_2)dxdy.$$

Стационарные, эргодические случайные процессы

Случайные процессы

Стационарные | **Нестационарные**

В узком смысле

$w(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) =$

$= w(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 - \tau, t_2 - \tau, \ldots, t_n - \tau);$

$w(x, t) = w(x, t - \tau);$

$w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, x_2; t_1 - \tau, t_2 - \tau) = = w(x_1, x_2; \tau), \tau = t_2 - t_1$

В широком смысле

$w(x, t) = w(x, t - \tau);$

$w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, x_2; t_1 - \tau, t_2 - \tau) = = w(x_1, x_2; \tau), \tau = t_2 - t_1;$

$m(t) = m, \sigma^2(t) = \sigma^2,$

$B(t_1, t_2) = B(\tau), B(\tau) = B(-\tau)$

Эргодические

Достаточное условие эргодичности стационарного в широком смысле СП

$$\lim_{T \to \infty} = \int_0^T B(\tau) d\tau = 0,$$

$$m_1 = \widetilde{x}(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \ \sigma^2 = [\widetilde{x(t) - \widetilde{x}(t)}]^2 = \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - m_1(t)]^2 dt, B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{\sim}(t) x_{\sim}(t - \tau) dt,$$

$x_{\sim}(t) = x(t) - \widetilde{x}(t)$ – переменная часть СП,

Свойства функции корреляции стационарного эргодического СП

1. $B(\tau) = (1/T)\int_{-T/2}^{T/2} x_{\sim}(t)x_{\sim}(t-\tau)dt;$

2. $B_x(t_1,t_2) = B_x(\tau).$

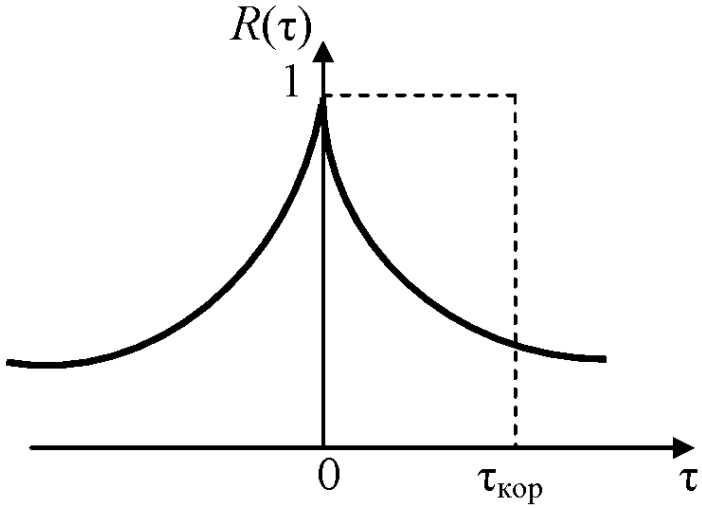
3. ФК действительная и чётная $B_x(\tau) = B_x(-\tau)$.

4. $B_x(\tau = 0) = B_x(0) = \sigma_x^{\ 2} = P_{\sim}$ – мощность переменной составляющей СП.

5. $B_x(\tau) \le B_x(0).$

6. Для статистически независимых сечений $B_x(t_1,t_2) = 0.$

7. Коэффициент корреляции $R(x) = \dfrac{B_x(\tau)}{B_x(0)};\ R_x(0) = 1,\ -1 \le R_x(\tau) \le 1.$



8. Интервал корреляции $\tau_{кор.}$ – минимальное расстояние между двумя сечениями, при котором значения СП можно считать некоррелированными, определяется методом равновеликого прямоугольника:

$$\tau_{кор} = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau.$$

9. Взаимная ФК двух процессов $X(t)$ и $Y(t)$ равна:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2)\right] = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)} = \overline{\overset{\circ}{X}(t_2)\overset{\circ}{Y}(t_2)} = B_{yx}(t_1, t_2).$$

10. ФК суммы независимых СП $Z(t) = X(t) + Y(t)$ равна:

$$B_z(t_1, t_2) = B_x(t_1, t_2) + B_y(t_1, t_2).$$

Нормальные (гауссовские) случайные процессы

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_x^2} \right].$$

Это распределение полностью определяется двумя параметрами: m_1 и σ_x^2.

Свойства нормального СП:

1) ПВ положительная $w(x) \geq 0$;

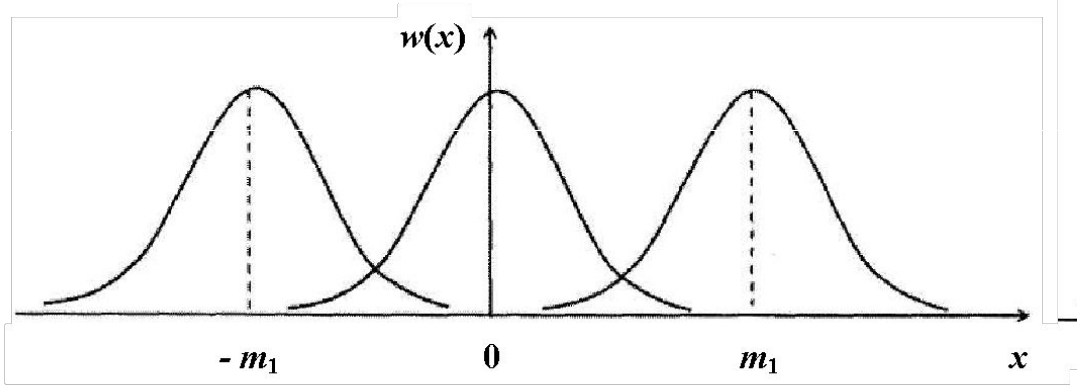
2) ПВ симметрична относительно $x = m_1$;

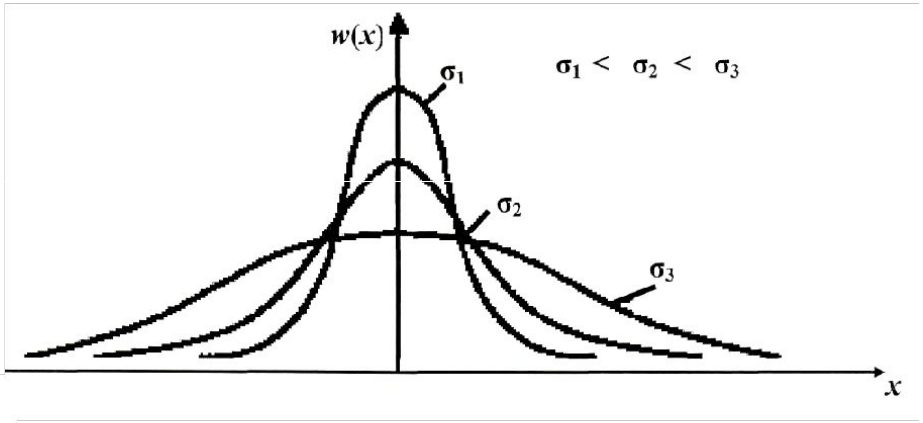
3) $w_{\max} = w(m_1) = 1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$;

5) При изменении m_1 кривая без изменения формы смещается вдоль оси x;

6) Чем больше дисперсия σ_x^2, тем меньше величина максимума ПВ и тем она шире.





7) ИФР, соответствующая нормальному закону, имеет вид:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} w(x)dx=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_x^2}\right]dx=\left|\begin{matrix} y=(x-m_1)/\sigma \\ dy=dx/\sigma \end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m_1}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}=\Phi\left(\frac{x\text{-}m_1}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – ***интеграл вероятности***, неэлементарная табулированная функция, вероятность того, что нормированное случайное отклонение не превзойдет величину z.

$$p(x_1\le X\le x_2)=F\left(\frac{x_2-m_1}{\sigma_x}\right)-F\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_x}\right);\qquad p(m_1-3\sigma<x<m_1+3\sigma)\cong 0{,}997.$$

Аналитический (комплексный) сигнал

Представление сложного (негармонического) сигнала $s(t)$ в виде действительной или мнимой части комплексного сигнала $\dot{s}(t) = s(t) + j\tilde{s}(t)$, $\tilde{s}(t)$ – функция, связанная с исходной соотношениями:

$$\tilde{s}(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad s(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{s}(t)}{\tau - t}d\tau$$ – ***преобразования Гильберта***,

является обобщением символического метода.

Экспоненциальная форма записи сигнала

$$\dot{s}(t) = A(t)\left[\cos\psi(t) + j\sin\psi(t)\right]$$

$A(t)\cos\psi(t) = s(t)$, $A(t)\sin\psi(t) = \tilde{s}(t)$, $A(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}$ – огибающая сигнала, $\psi(t) = \mathrm{arctg}[\tilde{s}(t)/s(t)]$ – полная мгновенная фаза, $\varphi(t) = \psi(t) - \omega_0 t$ – мгновенная начальная фаза, $\omega(\mathrm{t}) = \dfrac{d\psi(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{arctg}\dfrac{\tilde{s}(t)}{s(t)}\right] = \dfrac{s(t)\tilde{s}'(t) - \tilde{s}(t)s'(t)}{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}$ – мгновенная частота.

Квазигармоническая форма записи сигнала

$$z(t) = A_0\left[\cos\psi(t) + j\sin\psi(t)\right] = \mathrm{Re}\left\{\dot{A}(t)e^{j\omega_0 t}\right\},$$

$\dot{A}(t) = A(t)e^{j\varphi t}$ – комплексная огибающая сигнала.

<u>Узкополосные сигналы</u>

Видеосигналы – спектр сосредоточен в области низких частот от 0 до $F_в$.

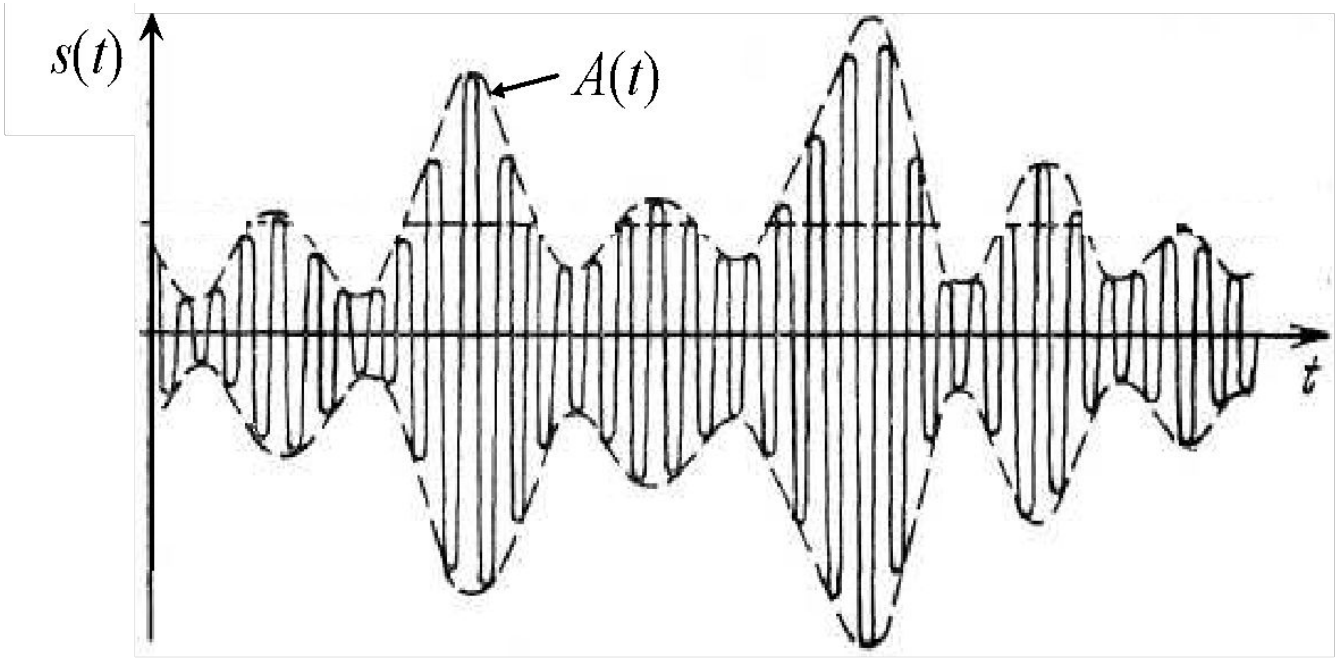
Радиосигналы – спектр сосредоточен вблизи несущей частоты $f_0 \neq 0$, $\Delta f / f_0 << 1$ – узкополосный сигнал, Δf – ширина спектра сигнала:

$$s(t) = A(t)\cos\psi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi_0], \qquad (1)$$

$A(t)$ и ψ – огибающая и фаза радиосигнала, φ_0 – начальная фаза, $\omega_0 = 2\pi f_0$ – несущая частота,

$$A(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}, \quad \psi(t) = \mathrm{arctg}[\tilde{s}(t)/s(t)].$$

$A(t)$ – огибающая в виде линии, касательной к точке максимума исходной функции и, в случае гармонического сигнала, соединяющей два соседних максимума кратчайшим путём.


s(t)
A(t)
t

Характеристики огибающей и начальной фазы узкополосного случайного сигнала

ВЧ сигнал $s(t)$ (1), с учётом $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ при $\varphi_0=0$ можно представить в в виде суммы двух квадратурных составляющих:

$$s(t)=A(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_0 t-A(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_0 t=A_c(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t,$$

$A_c(t)=A(t)\cos\varphi(t),\quad A_s(t)=A(t)\sin\varphi(t)$ – амплитуды соответственно косинусной и синусной составляющих колебания,

$$A(t)=\sqrt{A_c^2(t)+A_s^2(t)},\qquad \varphi(t)=-\operatorname{arctg}\left(A_s/A_c\right) \tag{2}$$

Для отыскания ПВ $w_A(A)$ и $w_\varphi(\varphi)$ требуется знание соответствующих ПВ $w(A_c)$ и $w(A_s)$, а также $w(A_c,A_s)$.

$$w(A_c)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma_s^2}\right),\qquad w(A_s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

Взаимная ФК между СП $A_c(t)$ и $A_s(t)$ при $\tau = 0$ $B_{A_1 A_2}(0) = 0$.

Следовательно, $A_c(t)$ и $A_s(t)$ в один и тот же момент времени являются независимыми величинами. Поэтому совместная $w(A_c, A_s)$ и двумерная ПВ $w(A, \varphi)$ определяются выражениями:

$$w(A_c, A_s) = w(A_c)w(A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2}\exp\left(\frac{-A_c^2 - A_s^2}{2\sigma_s^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right);$$

$$w(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

Плотность вероятности начальной фазы

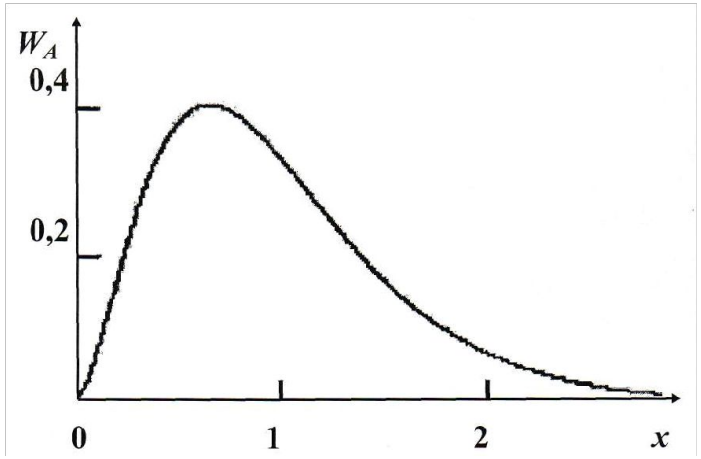
$$w_\varphi(\varphi) = \int_0^\infty w(A, \varphi)dA = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{A}{\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)dA = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}, \quad \begin{array}{l} -\pi < \varphi \le \pi, \\ x = A/\sigma_s. \end{array}$$

Начальная фаза узкополосного СП распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$.

Интегрируя по переменной φ получаем одномерную ПВ:

$$w_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} w(A,\varphi)d\varphi = \frac{A}{\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\ 0 < A < \infty.$$

Распределение огибающей называется ***распределением Рэлея***.



Максимум значения функция $w_A(A)$ достигает при $A = \sigma_s$ ($x = 1$) (наивероятнейшее значение огибающей).

Среднее значение (математическое ожидание) огибающей

$$M[A] = \int_0^{\infty} A w_A(A)dA = \frac{1}{\sigma_s^2}\int_0^{\infty} A^2 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_s.$$

Дисперсия огибающей $M[A^2]=\int\limits_0^\infty A^2 w_A(A)dA=\frac{1}{\sigma_s^2}\int\limits_0^\infty A^2\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)dA=2\sigma_s^2$,

т. е. средняя мощность огибающей равна удвоенной дисперсии исходного физического сигнала.

Вероятность того, что огибающая $A(t)$ превысит уровень C

$$P(A>C)=\int\limits_C^\infty w_A(A)dA=\frac{1}{\sigma_s^2}\int\limits_C^\infty A\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)dA=\exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

При $C=\sigma_s^2$ вероятность превышения этого уровня составляет всего лишь примерно 1%. Поэтому можно считать, что ширина дорожки, фактически наблюдаемой на экране осциллографа, не превышает (5-6)σ_s .

Функция корреляции огибающей узкополосного нормального процесса

$$B_A(\tau)\approx\frac{\pi\sigma_s^2}{2}\left[1+\frac{1}{4}R_0{}^2(\tau)\right]$$

$R_s(\tau)=B_s(\tau)/\sigma_s^2=R_0(\tau)\cos\omega_0\tau$, $R_0(\tau)$ – коэффициент корреляции.

Представим $w(A,\varphi)$ в виде произведения

$$w(A,\varphi)=\frac{A}{2\pi\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)=\left[\frac{A}{\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)\right]\left(\frac{1}{2\pi}\right)=w_A(A)w_\varphi(\varphi),$$

$A(t)$ и $\varphi(t)$ независимые СВ при их отсчёте в один и тот же момент t.

Вероятность того, что огибающая $A(t)$ превысит C

$$p(A>C)=\int_C^\infty w_A(A)dA=\frac{1}{\sigma_s^2}\int_C^\infty A\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)dA=\exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

При $C=\sigma_s^2$ вероятность $p(\mathrm{A}>\mathrm{C})\approx 1\%$, поэтому можно считать, что ширина дорожки, фактически наблюдаемой на экране осциллографа, не превышает (5-6) σ_s .

Функция корреляции фазы $\varphi(t)$

$$B_\varphi(\tau)=\frac{\pi}{2}R_0(\tau)+\frac{1}{4}R_0^2(\tau)+\frac{\pi}{12}R_0^3(\tau)+\ldots$$

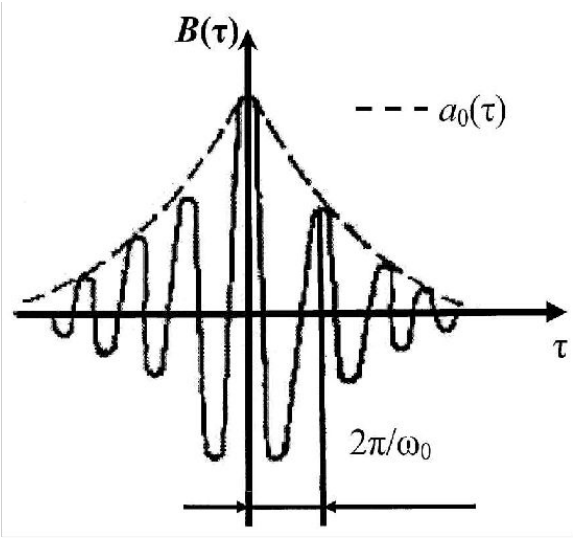
При $\tau=0$ ряд сходится к $\pi^3/3$, т.е. дисперсия фазы $\sigma_\varphi^2=\pi^3/3$.

Функция корреляции узкополосного СП равна

$B(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau$, $\rho(\tau) = a_0(\tau) / \sigma_x^2$ – нормированная огибающая,

$a_0(\tau)$ – огибающая, медленно изменяющаяся по сравнению с $\cos\omega_0 t$.

Интервал корреляции узкополосного СП $\tau_{кор} = \int_0^\infty \frac{a_0(\tau) d\tau}{B(0)}$.



ФК узкополосного СП

Вид ФК свидетельствует о том, что отдельные реализации узкополосного СП представляют собой квазигармонические колебания, у которых огибающая $A(t)$ и фаза $\varphi(t)$ являются СФ, медленно изменяющимися во времени.

Пространства сигналов. Геометрическая трактовка процесса передачи сообщений в ТКС

Вся совокупность встречающихся сигналов L разбита на ряд множеств, объединённых каким-либо одним общим и единственным свойством P: $L_P = \{s;\ P\}$ – множество всех сигналов s, для которых справедливо свойство P. Определив P,определяем множество сигналов.

Множество гармонических сигналов $L = \{s;\ s(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi),\ -\infty < t < \infty\}$ содержит гармонические сигналы с произвольными значениями амплитуд A, частот ω и фаз φ.

Множества сигналов могут образовываться из других, ранее определённых множеств, логическими операциями объединения (индекс $\cup$) и пересечения (индекс $\cap$):

$$L = S_1 \cup S_2 = \{s;\ s \in S_1 \text{ или } s \in S_2\},$$

$$L = S_1 \cap S_2 = \{s;\ s \in S_1 \text{ и } s \in S_2\}.$$

Для сигналов одного и того же множества (элементов) указываются признак или признаки, отличающие их друг от друга. Наиболее подходящим признаком, отличающим два элемента множества x и y, является расстояние $d(x, y)$ между ними в некоторой системе координат.

Множество с определённым расстоянием называется ***пространством***.

Если установлено правило для вычисления $d(x, y)$, то пространство называется ***метрическим***, а само правило – ***метрикой***.

Расстояние обладает следующими аксиоматическими признаками:

$$d(x, y) \geq 0, \; d(x,y) = 0 \quad \text{при } x = y;$$

$$d(x, y) = d(y, x);$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ – неравенство треугольника,}$$

x, y и z – элементы пространства.

Так как сигналы x и y представляют собой функции, то $d(x, y)$ – это функционал.

В метрическом пространстве сигналы можно представит в виде векторов, соединяющих начало координат с элементом (точкой) пространства. Каждо-му элементу x, y, z, … соответствует набор вещественных или комплексных чисел α_1, α_2, α_3, …, β_1, β_2, β_3, …, λ_1, λ_2, λ_3, … и т. д., являющихся проекцией
вектора на координатные оси. Различные взаимосвязи между элементами пространства могут быть определены с помощью операций векторной алгебры. Эти операции линейны, следовательно векторное пространство ***линейное.***

Множество сигналов L образует ***линейное пространство*** сигналов, если для него справедливы следующие аксиомы:

1) существует нулевой элемент Ø, что для всех $x(t) \in L$ выполняется равенство $x(t) + Ø = x(t)$;

2) для $x(t) \in L$ и $y(t) \in L$ существует $s(t) = x(t) + y(t)$, $s(t) \in L$. При этом операция суммирования должна быть:

– коммутативна: $x(t) + y(t) = y(t) + x(t)$;

– ассоциативна: $x(t) + [y(t) + z(t)] = [x(t) + y(t)] + z(t)$;

– однородна: $x(t) + [-x(t)] = Ø$.

3) существует множество скалярных элементов a, для которых $y(t) = \alpha x(t)$ – новый сигнал, $x(t) \in L$, $y(t) \in L$. Операция умножения должна быть:

– ассоциативна: $\alpha[\beta \cdot x(t)] = \alpha\, \beta \cdot x(t)$;

– дистрибутивна: $\alpha[(x(t) + y(t)] = \alpha x(t) + \alpha\, y(t)$,

$(\alpha + \beta)x(t) = \alpha\, x(t) + \beta\, x(t)$;

– пропорциональна: $1 \cdot x(t) = x(t)$, $0 \cdot x(t) = 0$.

В зависимости от значений скаляров α, β, λ, линейные пространства могут быть вещественными или комплексными.

В векторном пространстве длина вектора называется его ***нормой*** $\|x\|$**,** а само пространство – ***нормированным. Свойства нормы:***

$\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ только при $x(t) = 0$;

$\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$, где k любое число;

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ при $x(t) \in L$ и $y(t) \in L$.

Квадрат нормы носит название ***энергии сигнала***: $E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$.

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Степень связи (сходства) по форме и положению сигналов $x(t)$ и $y(t)$ в пространстве сигналов отражается их скалярным произведением:

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi, \qquad (3)$$

φ – угол между двумя векторами.

$$\cos\varphi = {(x, y)} \big/ {(\|x\| \cdot \|y\|)}.$$

При $\varphi = 0$ ($\cos\varphi = 1$) сигналы совпадают по направлению и расстояние между ними минимальное. При $\varphi = \pi/2$ ($\cos \pi/2 = 0$) сигналы перпендикулярны друг другу, т. е. ортогональны, и проекции сигналов друг на друга равны нулю. При $\varphi = \pi$ ($\cos \pi = -1$) сигналы противоположны по направлению и расстояние между ними максимально.

Фактор расстояния между сигналами играет существенную роль при их различении в демодуляторах и селекции в многоканальных системах.

Линейное пространство дискретных и цифровых сигналов со скалярным произведением (3) называется ***евклидовым пространством***. Совокупность n линейно независимых векторов образует ***n-мерное евклидово пространство R_n***. Любой вектор $\vec{x}$, относящийся к R_n, определяется совокупностью его координат $\vec{x} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1})$. Пространство R_n можно определить как множество точек, представленных концами векторов, норма которых равна

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}.$$

Расстояние между двумя векторами как норма разности векторов

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2}.$$

При $n \to \infty$ пространство R_n переходит в бесконечномерное ***пространство Гильберта*** $\boldsymbol{L_2}$, в частности, пространство всех непрерывных комплексных функций аргумента t, заданных на интервале $(-T/2;T/2)$, в котором скалярное произведение и квадрат нормы определяются выражениями:

$$(\vec{x},\vec{y}) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \vec{x}(t)\, y^*(t)dt, \qquad \|\vec{x}\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \vec{x}(t)\, x^*(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

Если элементы этого пространства $L_2(T)$ – вещественные сигналы $s(t)$, определённые на интервале $(-T/2;T/2)$, то выполняется условие

$$E_s = \|\vec{s}\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)dt \le \infty.$$

При $T \to \infty$ получаем пространство $L_2(\infty)$. Если для сигналов этого пространства последнее условие не выполняется, но выполняется условие

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)dt < \infty,$$

то вводится скалярное произведение с размерностью мощности

$$(u,i)_P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, i^*(t)dt \qquad \text{и} \qquad \|s\|_P^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2\, dt.$$

Квадрат расстояния между двумя векторами в вещественном пространстве $L_2(T)$ определяется соотношениями:

$$d^2(x,y) = \|x - y\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t) - y(t)]^2 dt.$$

Пространство L_2 представляет собой естественное обобщение пространства R_n, получаемое путём перехода от дискретизированной функции к функции непрерывного аргумента.

Пространство L_2 имеет особое значение, т. к. оно позволяет применить общие геометрические представления к сообщениям, сигналам и помехам, определённым как функции непрерывного аргумента.

Пространство Хэмминга. Функция $x(t)$, принимающая на каждом интервале $i\Delta t$ одно из m возможных значений $x_i^{(k)} (k = \overline{0, m-1})$ на отрезке длительностью T полностью определена значениями $x_i^{(k)}$ или совокуп-ностью коэффициентов $\left\{ \begin{array}{l} n = T/\Delta t \\ \{x_0^{(k)}, x_1^{(l)}, ..., x_{n-1}^{v}\} (k, l, v \in \overline{0, m-1}) \end{array} \right.$, называемый ***n-на- бором***. При $m(x_i^{(k)}) = 2$ коэффициенты принимают значения 0 или 1, n-набор представляет собой просто кодовую комбинацию n-значного двоичного кода, отображающую символ передаваемого сообщения.

Двоичные n-наборы отображаются векторами (точками) в ***пространстве Хэмминга*** 2_n.

Скалярное произведение в этом пространстве задаётся функцией:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k \right]^2.$$

Норма двоичного вектора (***вес кодовой комбинации*** w) определяется количеством содержащихся в нём единиц

$$\|\vec{x}\| = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Расстояние в пространстве Хэмминга между двоичными векторами определяется по числу позиций в кодовой комбинации, в которых векторы имеют различные символы

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k - y_k| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k \oplus y_k|.$$