

# **ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ**

**4 часа**

# Классификация сигналов

По степени полноты априорной информации

Детерминированные

Случайные

Квазидетерминированные

Периодические

Непериодические

По форме представления зависимости от времени

**Аналоговые (а)**  
(непрерывные  
сигналы непре-  
рывного времени)

**Дискретные**

непрерывные по  
уровню дискрет-  
ного времени (б)

дискретные по  
уровню непрерыв-  
ного времени (в)

дискретные по уров-  
ню дискретного вре-  
мени (цифровые) (г)

По виду передаваемых сообщений

Телефон-  
ные

Факси-  
мильные

Телеграф-  
ные

Передача  
данных

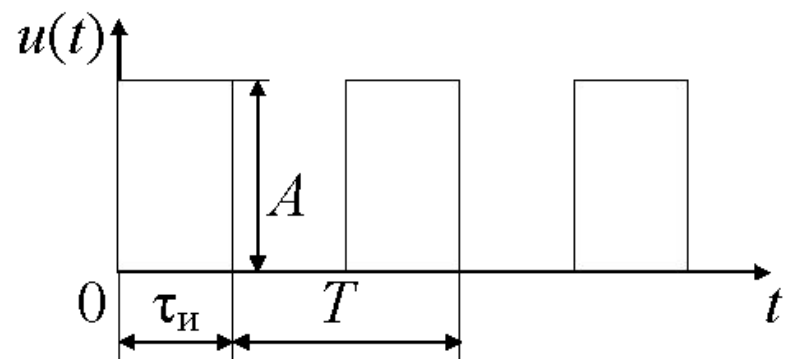
Звукового  
вещания

Телевизионного  
вещания

**Детерминированные сигналы** – заранее известные для любого момента времени, описываемые заданной функцией времени  $u(t)$ .

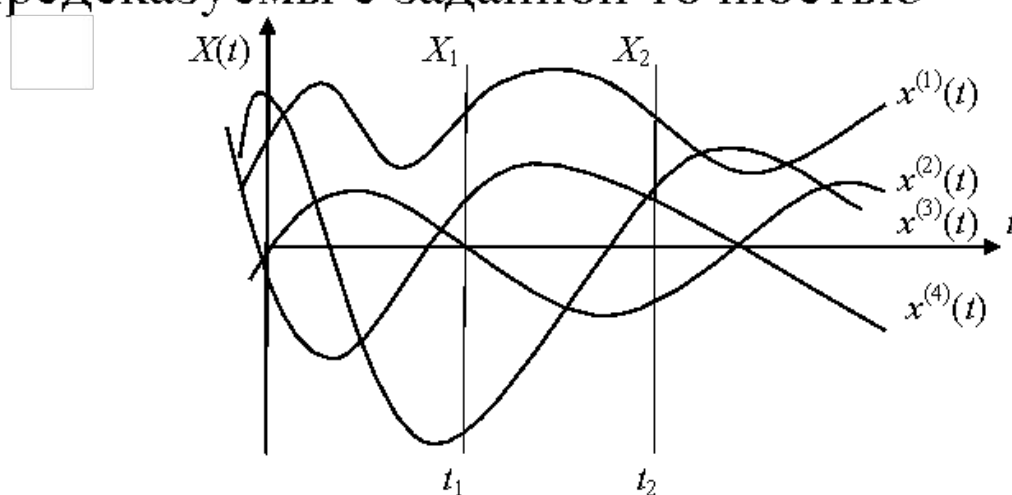
Аналоговые  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

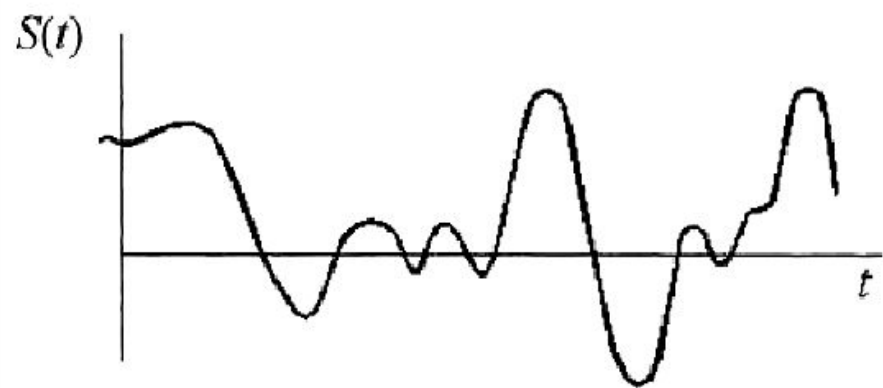
Периодическая импульсная последовательность



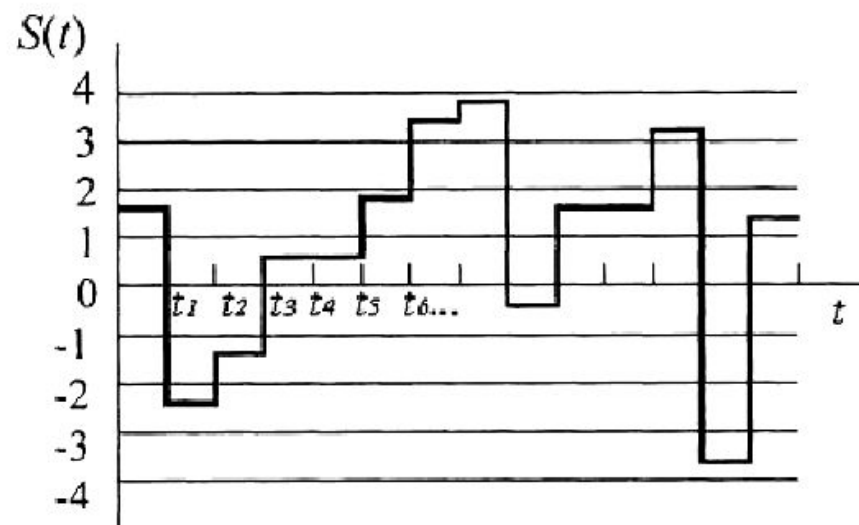
$$u(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, \tau_n + T]; \\ 0, & t \notin [0, \tau_n + T]; \end{cases}$$

**Случайные сигналы** – значения параметров в любой момент времени заранее непредсказуемы с заданной точностью

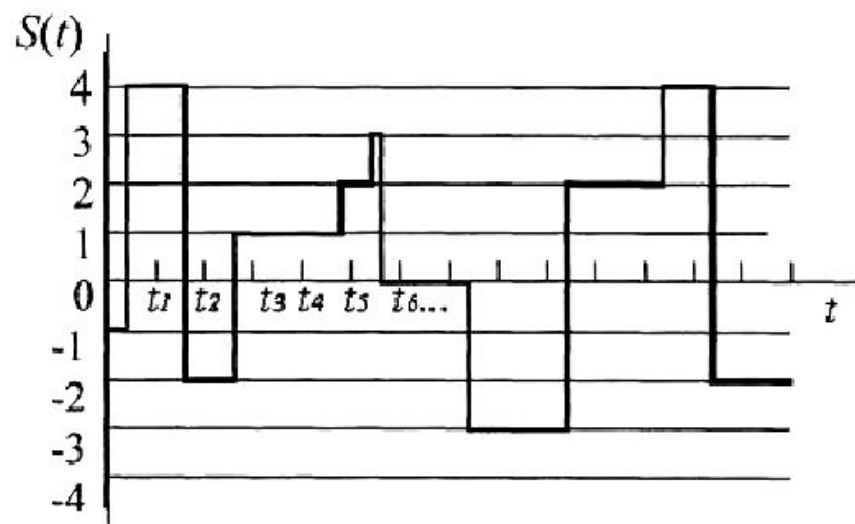




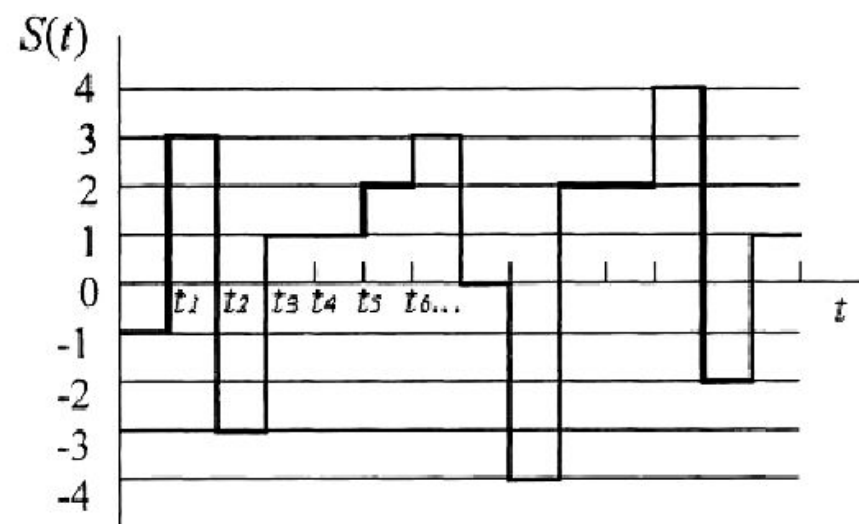
a)



b)



c)



d)

## Тип передаваемых сообщений

Тип сигнала	Полоса частот $F_c$ / скорость передачи	Динамический диапазон, $D_c$
Телефонный	0,3...3,4 кГц	35...40 дБ
Факсимильный		~ 25 дБ
Телеграфный	50...200 Бод	
Передача данных	600...48000 Бод	
Звуковое вещание	0,03...15 000 кГц	25...65 дБ
Телевещание	0...6 МГц	~ 40дБ

## Обобщённый ряд Фурье

Для использования частотного метода анализа применяют разложение сигналов в обобщённый ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(t), \quad (1)$$

где  $c_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|_2} \int_a^b x(t) \varphi_j(t) dt$   $\varphi_j(t)$  – бесконечная система действительных

попарно ортогональных на отрезке  $[a, b]$  функций:

$$\int_a^b \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = 0 \quad \text{при } n \neq m; \quad \int_a^b \varphi_n^2(t) dt \neq 0.$$

Обобщенный ряд Фурье при заданной системе функций  $\varphi_n(t)$  и при фиксированном числе слагаемых ряда обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума СКО) данной функции  $x(t)$ .

Если в качестве ортогональных используются функции вида:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \cos k\Omega t, \\ \sin k\Omega t, \\ e^{jk\Omega t}; \end{cases}$$

то ряд (1) называется рядом Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega_1 t + b_k \sin k\Omega_1 t), \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\Omega_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\Omega_1 t dt;$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_k e^{jk\Omega_1 t}, \quad \mathcal{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\Omega_1 t} dt;$$

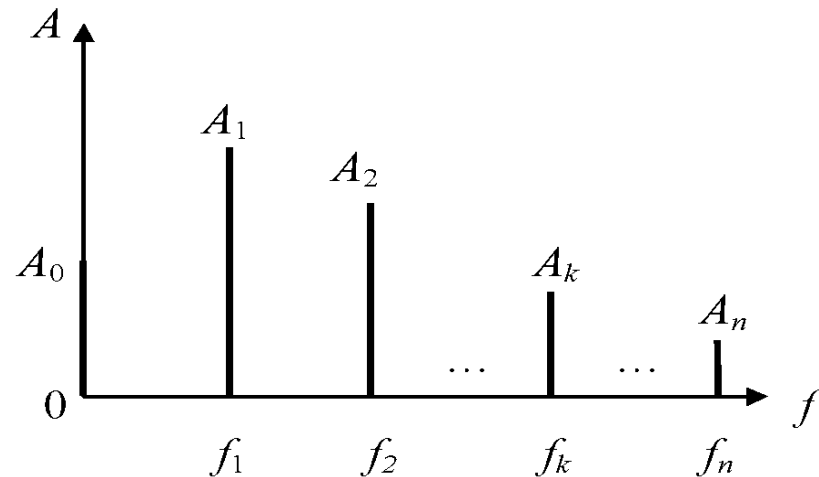
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_1 t - \varphi_k), \quad A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \arctg \frac{b_k}{a_k},$$

где  $\Omega_1 = 2\pi/T$  – частота первой гармоники,  $T$  – период функции  $x(t)$ .

Периодическую функцию  $x(t)$  можно представить суммой гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте  $f_1 = 1/T$  ( $\omega_1 = 2\pi/T$ ) с амплитудами  $A_k$  и начальными фазами  $\varphi_k$ .

Совокупность амплитуд  $A_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) образует **амплитудный спектр**, а совокупность фаз  $\varphi_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – **фазовый спектр функции**.

Спектр периодического сигнала – дискретный.



Амплитудный спектр периодического сигнала

Спектр непериодического сигнала – сплошной и определяется интегралом Фурье  $S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$  – **спектральная плотность сигнала**.



$$W_x(f) = S_x^2(f) - \text{спектральная плотность энергии}, \quad E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df;$$

$$G_x(f) = S_x^2(f)/T - \text{спектральная плотность мощности}; \quad P = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_x(f) df.$$

Эти характеристики являются чётными функциями частоты, следовательно:

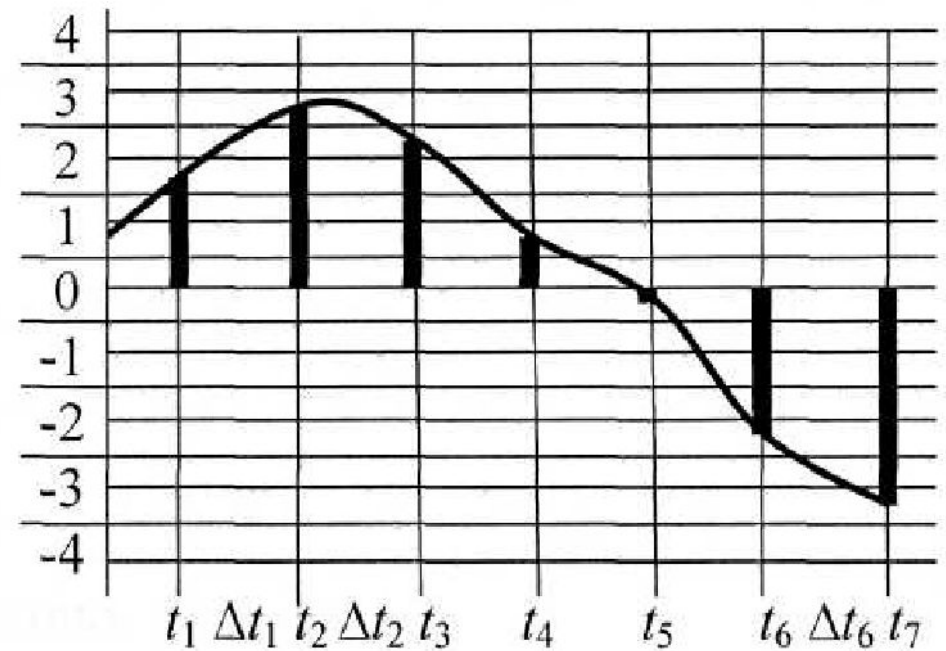
$$E = 2 \int_0^{\infty} W_x(f) df = \int_0^{\infty} W_{0,x}(f) df, \quad P = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) df = \int_0^{\infty} G_{0,x}(f) df,$$

где  $M^{0,x}(\lambda) = \mathcal{M}^x(\lambda)$  и  $G_{0,x}(f) = 2G_x(f)$  – СПЭ и СПМ, определённые на положительных частотах.

# Дискретизация и восстановление непрерывных сигналов.

## Теорема Котельникова.

*Дискретизация по времени* – взятия отсчётов первичного сигнала  $s(t)$  в определённые дискретные моменты  $t_k$ ; непрерывная функция  $s(t)$  заменяет совокупностью мгновенных значений (отсчётов)  $\{s(k)\}$  или  $\{s(t_k)\}$ .



Значения, полученные при дискретизации

1,7 2,7 2,2 0,7 -0,2 -2,2 3,2

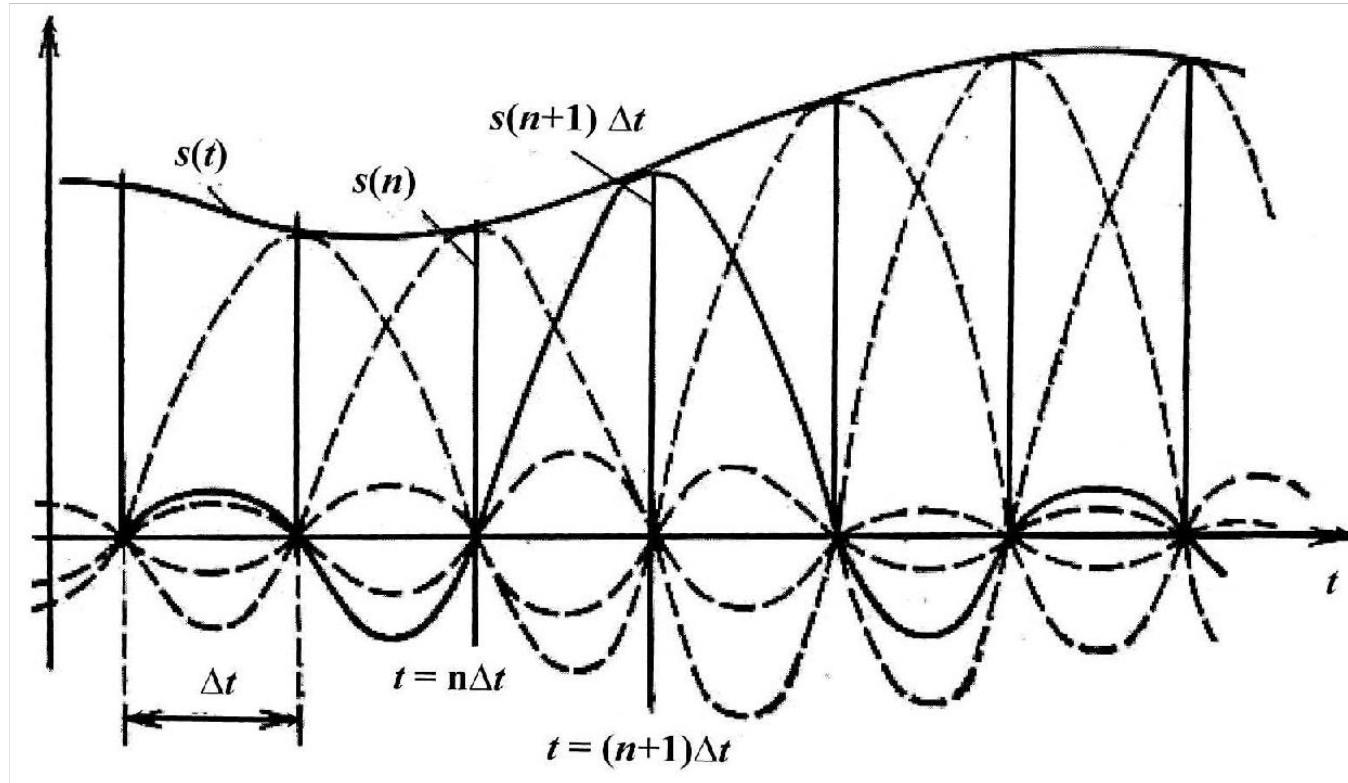
**Теорема Котельникова (отсчетов, Найквиста):** непрерывный сигнал  $s(t)$ , спектр которого ограничен сверху частотой  $F_B$ , полностью определяется отсчетами мгновенных значений  $s(k\Delta t)$  в точках, отстоящих друг от друга на интервалы  $\Delta t \leq 1/2F_B$ . Интервал  $\Delta t$  называется **интервалом Котельникова (Найквиста)**, а  $f_d = 1/\Delta t$  – **частотой дискретизации**.

Эта теорема позволяет представить непрерывную функцию  $s(t)$  в виде ряда Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)},$$

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} = \begin{cases} 1, & t = k\Delta t; \\ 0, & t = n\Delta t, \quad n \neq k; \end{cases} \quad \text{– базисная функция отсчетов.}$$

Ряд Котельникова точно определяет функцию  $s(t)$  в точках отсчета (коэффициентами ряда являются сами выборки из функции  $s(k\Delta t)$ ) и определяет функцию  $s(t)$  в любой момент  $t$ .



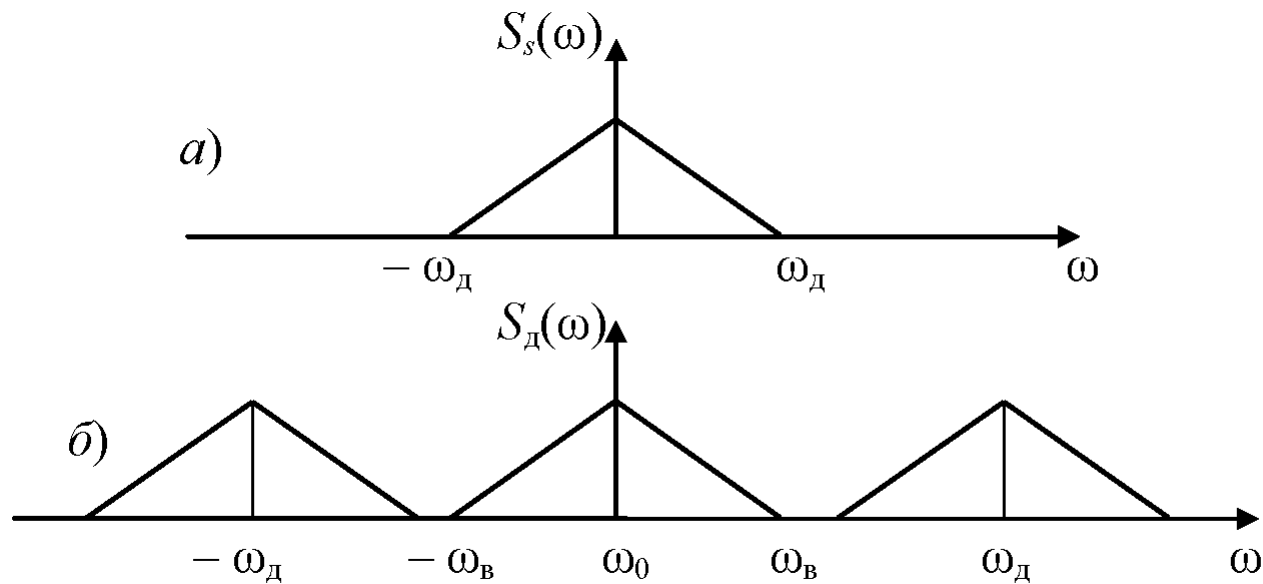
Представление сигнала рядом Котельникова

Теоретически отсчёты функции  $s(t)$  получаются в результате её перемножения на периодическую последовательность  $\delta$ -импульсов  $u_\delta(t)$  с периодом  $T = \Delta t$ , спектр которой является дискретным:

$$s_{\text{д}}(t) = s(t)u_\delta(t) = s(t) \left[ \dots + \frac{1}{\Delta t} e^{-j\omega_\delta t} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} e^{j\omega_\delta t} + \dots \right] - \text{дискретный сигнал,}$$

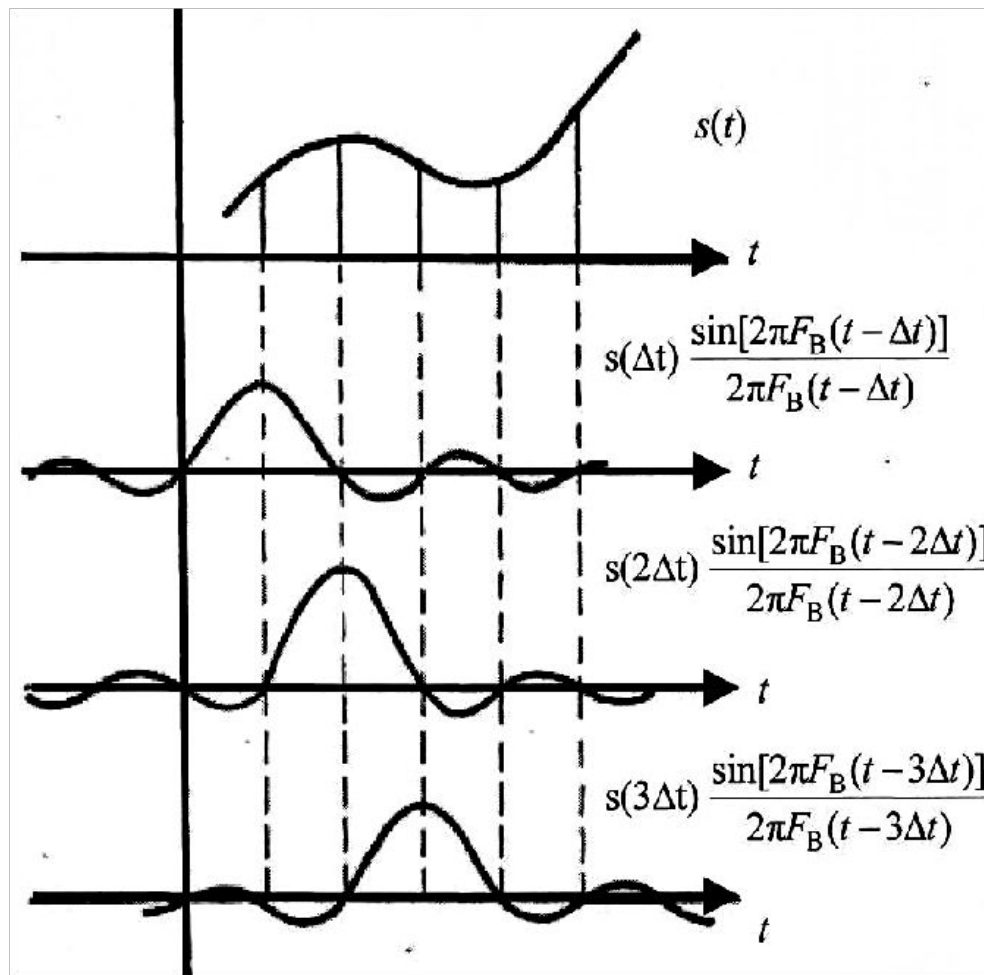
$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{д}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{д}}(t) e^{-j\omega t} dt = \square + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega + \omega_\delta)t} dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega - \omega_\delta)t} dt + \square = \\ &= \dots \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega + \omega_\delta) + \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega) + \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega - \omega_\delta) + \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega - 2\omega_\delta) + \dots, \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_{\text{д}}(\omega)$  – спектр дискретизированного сигнала  $s_{\text{д}}(t)$ ,  
 $\mathcal{S}_s(\omega)$  – спектр исходного сигнала  $s(t)$ .



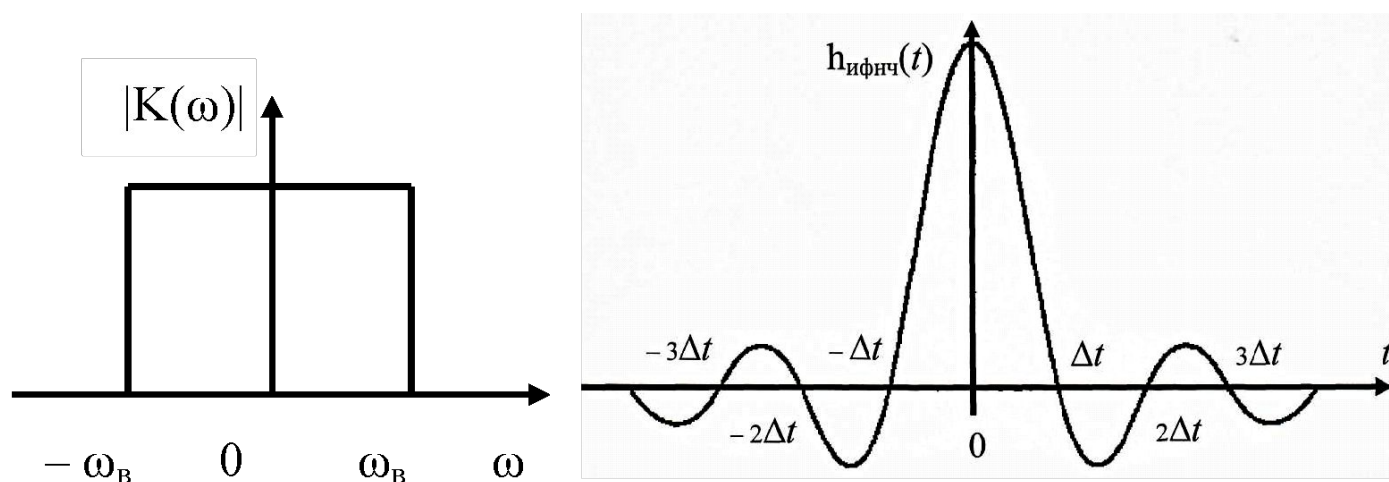
Спектр исходного (а) и дискретизированного сигнала (б)

Восстановление исходного сигнала по последовательности отсчетов осуществляется путем формирования для каждого отсчета  $s(k\Delta t)$  функции  $\varphi_k(t) = \sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)] / 2\pi F_B(t - \Delta t)$  с соответствующей амплитудой и последующим суммированием всех функций.



Восстановление исходного сигнала по последовательности отсчётов

Устройством, формирующим отклик вида  $(\sin x)/x$  при воздействии  $\delta$ -импульса, является идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ) с АЧХ и ИХ характеристиками, представленными на рис.



АЧХ (а) и ИХ (б) ИФНЧ



## *Погрешности дискретизации и восстановления непрерывного сигнала*

1. Теорема Котельникова точно справедлива только для сигналов с финитным (конечным) спектром, т. е. имеющих бесконечную длительность. Спектры реальных сигналов (конечной длительности) бесконечны. Погрешность дискретизации определяется энергией спектральных составляющих сигнала, лежащих за пределами частоты  $\omega_B$

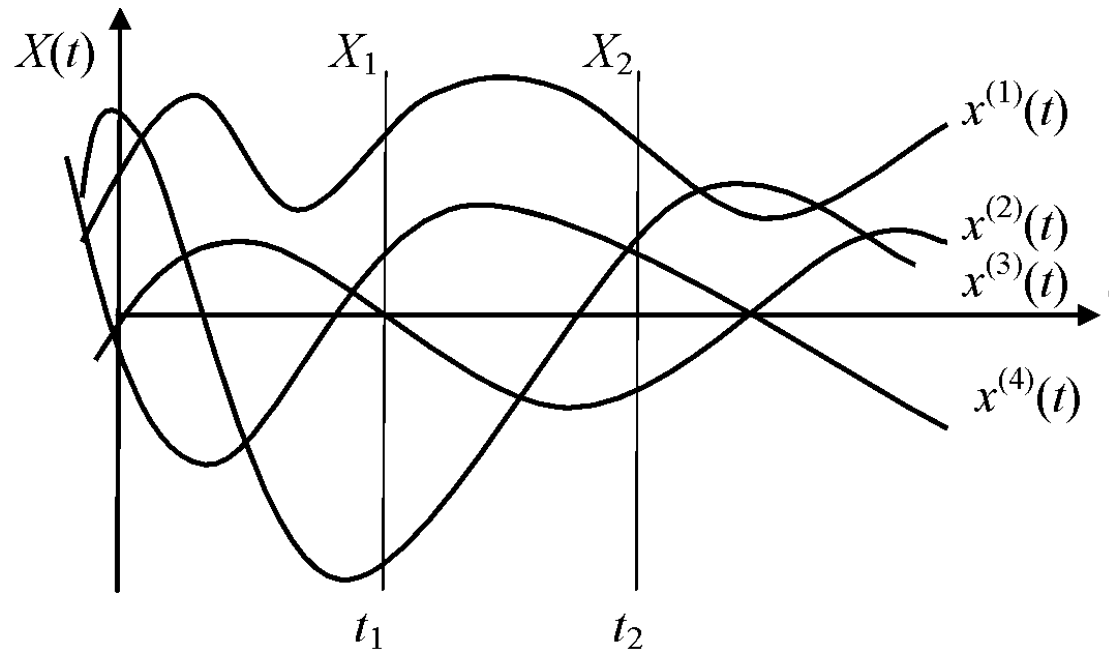
$$\overline{\Delta E_D^2} = \int_{\omega_B} |\mathcal{F}_s(\omega)|^2 d\omega.$$

2. Вторая причина возникновения погрешностей – неидеальность восстанавливающего ФНЧ:

$$h_{\text{ФНЧ}}(t) = e^{-\frac{t}{R_\phi C_\phi}} / R_\phi C_\phi.$$

**Вывод:** чем выше  $\omega_B$  и чем ближе характеристики восстанавливающего ФНЧ к идеальным, тем ближе восстановленный сигнал к исходному.

# Случайные процессы и их основные характеристики



**Случайная функция** — функция, значения параметров которой в любой момент времени заранее непредсказуемы с заданной точностью.

**Реализация случайной функции** — вид случайной функции в конкретном испытании  $x^{(i)}(t)$ .

**Случайная величина** — значение случайной функции в конкретный момент времени  $X_k = \{x^{(i)}(t_k)\}$ .

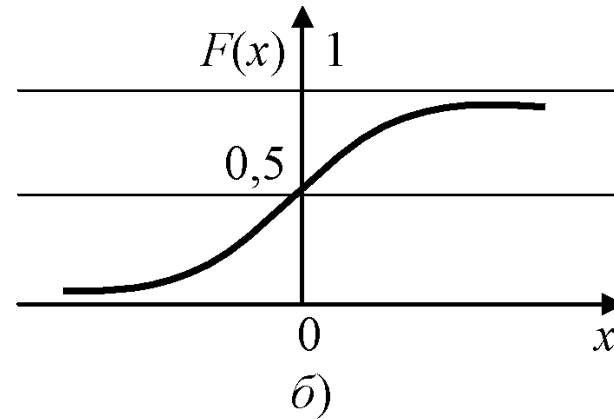
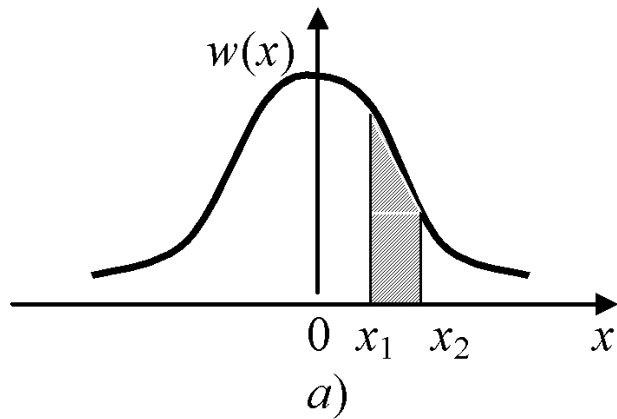
**Случайный процесс** – совокупность случайных функций  $\{x^{(i)}(t)\}$ .

Для непрерывных СП  $X(t)$  распределение вероятностей в заданном сечении  $t_1$  характеризуется одномерной **плотностью вероятностей**:

$$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x \leq X \leq x + \Delta x)}{|\Delta x|} \geq 0$$

или **интегральной функцией распределения** (ИФР)  $F(x)$ :

$$F(x) = p(X < x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx.$$



Типовые графики одномерных ПВ (а) и ИФР (б)

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} - n\text{-мерная ПВ}$$

## Основные свойства ИФР и ПВ случайной величины

Название и обозначение	Функция распределения	Плотность вероятности
Определение	$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$	$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x \leq X \leq x + \Delta x)}{ \Delta x }$
Физическая размерность	безразмерная $x$	размерность $\frac{1}{X}$
Взаимосвязь	$F(x) = \int_{-\infty}^x w(y) dy$	$F(x) = p(X \leq x)$
Особенности функции	$F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$ (неубывающая)	$w(x) \geq 0$ (неотрицательная)
Расчёт вероятности	$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	$p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx$
Свойство нормировки	$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$

## Основные числовые характеристики

**Математическое ожидание**  $m_1(t) = M[X(t)] = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x,t)dx$

– усреднённое по множеству реализаций значение случайного процесса; физический смысл – среднее значение случайного процесса; размерность СП.

**Дисперсия**  $\sigma^2(t) = D[X(t)] = M\left[X^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(t)]^2 w(x,t)dx$

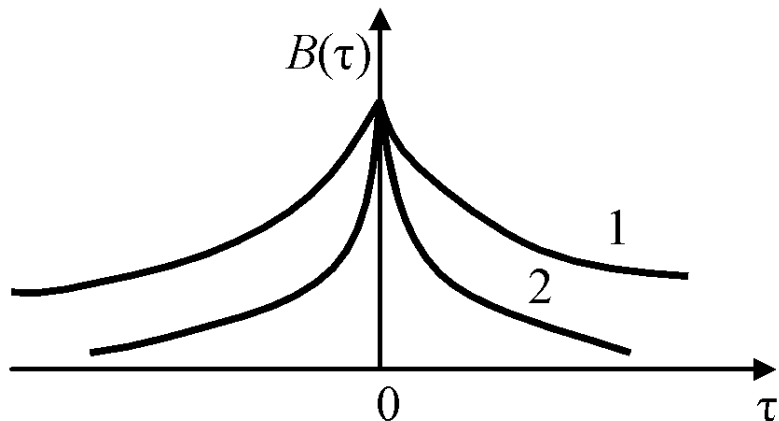
– стандартное или среднеквадратическое отклонение значений СП от математического ожидания, характеризует разброс СВ относительно МОЖ; физический смысл – мощность переменной составляющей СП;

**Функция корреляции** – характеризует статистическую связь между значениями СП в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , разделённые интервалом  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$B_x(t_1, t_2) = M\left[X_1 \cdot X_2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1(t_1)][x_2 - m_1(t_2)]w(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1 dx_2.$$

## *Ковариационная функция*

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$



Функция корреляции СП с медленно (1) и быстро (2) убывающими связями

**Функция взаимной корреляции** – характеризует статистическую связь между значениями двух СП в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , разделёнными интервалом  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{1x})(y - m_{1y}) w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx dy.$$

# Стационарные, эргодические случайные процессы

## Случайные процессы

### Стационарные

### Нестационарные

#### *В узком смысле*

$$\begin{aligned}
 & w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\
 & = w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 - \tau, t_2 - \tau, \dots, t_n - \tau); \\
 & w(x, t) = w(x, t - \tau); \\
 & w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, x_2; t_1 - \tau, t_2 - \tau) = w(x_1, \\
 & x_2; \tau), \tau = t_2 - t_1
 \end{aligned}$$

#### *В широком смысле*

$$\begin{aligned}
 & w(x, t) = w(x, t - \tau); \\
 & w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, x_2; t_1 - \tau, t_2 - \tau) = w(x_1, \\
 & x_2; \tau), \tau = t_2 - t_1; \\
 & m(t) = m, \sigma^2(t) = \sigma^2, \\
 & B(t_1, t_2) = B(\tau), B(\tau) = B(-\tau)
 \end{aligned}$$

## Эргодические

Достаточное условие эргодичности стационарного в широком смысле СП

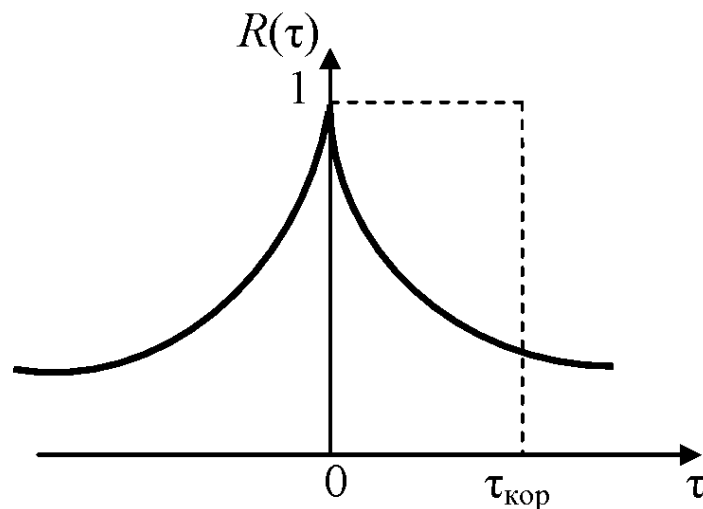
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(\tau) d\tau = 0,$$

$$m_1 = \bar{x}(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad \sigma^2 = [x(t) - \bar{x}(t)]^2 = \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - m_1(t)]^2 dt, \quad B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{\sim}(t) x_{\sim}(t - \tau) dt,$$

$x_{\sim}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$  – переменная часть СП,

## Свойства функции корреляции стационарного эргодического СП

1.  $B(\tau) = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} x_{\sim}(t)x_{\sim}(t-\tau)dt;$
2.  $B_x(t_1, t_2) = B_x(\tau).$
3. ФК действительная и чётная  $B_x(\tau) = B_x(-\tau).$
4.  $B_x(\tau = 0) = B_x(0) = \sigma_x^2 = P_{\sim}$  – мощность переменной составляющей СП.
5.  $B_x(\tau) \leq B_x(0).$
6. Для статистически независимых сечений  $B_x(t_1, t_2) = 0.$
7. Коэффициент корреляции  $R(x) = \frac{B_x(\tau)}{B_x(0)}$ ;  $R_x(0) = 1, -1 \leq R_x(\tau) \leq 1.$





8. Интервал корреляции  $\tau_{\text{кор}}$  – минимальное расстояние между двумя сечениями, при котором значения СП можно считать некоррелированными, определяется методом равновеликого прямоугольника:

$$\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau.$$

9. Взаимная ФК двух процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  равна:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = M \left[ X(t_1) \cdot Y(t_2) \right] = \overline{X(t_1) Y(t_2)} = \overline{X(t_2) Y(t_2)} = B_{yx}(t_1, t_2).$$

10. ФК суммы независимых СП  $Z(t) = X(t) + Y(t)$  равна:

$$B_z(t_1, t_2) = B_x(t_1, t_2) + B_y(t_1, t_2).$$

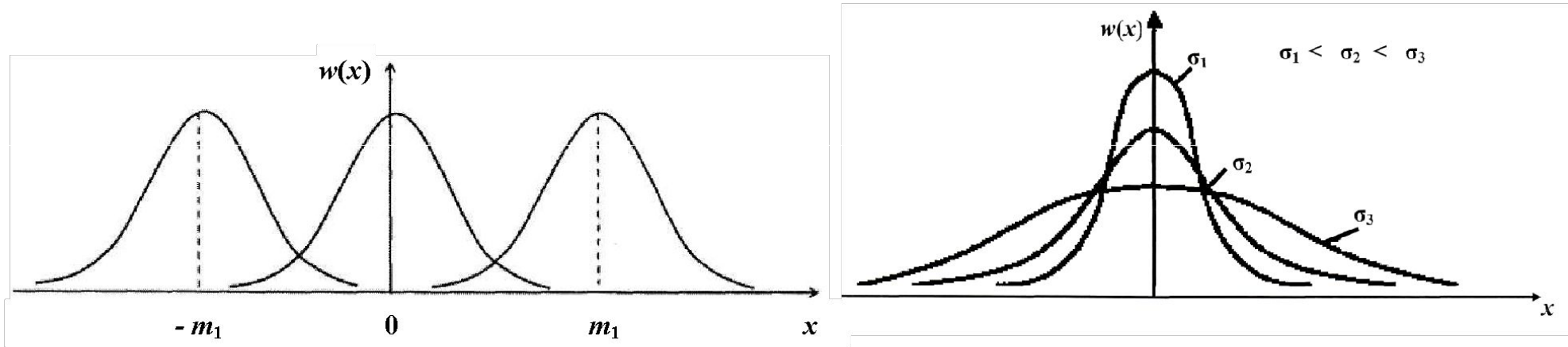
## Нормальные (гауссовские) случайные процессы

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_x^2}\right].$$

Это распределение полностью определяется двумя параметрами:  $m_1$  и  $\sigma_x^2$ .

Свойства нормального СП:

- 1) ПВ положительная  $w(x) \geq 0$ ;
- 2) ПВ симметрична относительно  $x = m_1$ ;
- 3)  $w_{\max} = w(m_1) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ ;
- 4)  $\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$ ;
- 5) При изменении  $m_1$  кривая без изменения формы смещается вдоль оси  $x$ ;
- 6) Чем больше дисперсия  $\sigma_x^2$ , тем меньше величина максимума ПВ и тем она шире.



7) ИФР, соответствующая нормальному закону, имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx = \left| \begin{array}{l} y = (x-m_1)/\sigma \\ dy = dx/\sigma \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_1}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m_1}{\sigma}\right)$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – **интеграл вероятности**, неэлементарная табули-

рованная функция, вероятность того, что нормированное случайное отклонение не превзойдет величину  $z$ .

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F\left(\frac{x_2 - m_1}{\sigma_x}\right) - F\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_x}\right); \quad p(m_1 - 3\sigma < x < m_1 + 3\sigma) \cong 0,997.$$

## Аналитический (комплексный) сигнал

Представление сложного (негармонического) сигнала  $s(t)$  в виде действительной или мнимой части комплексного сигнала  $\underline{z}(t) = s(t) + j\tilde{s}(t)$ ,  $\tilde{s}(t)$  – функция, связанная с исходной соотношениями:

$$\tilde{s}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad - \text{преобразования Гильберта},$$

является обобщением символического метода.

Экспоненциальная форма записи сигнала

$$\underline{z}(t) = A(t)[\cos\psi(t) + j\sin\psi(t)]$$

$A(t)\cos\psi(t) = s(t)$ ,  $A(t)\sin\psi(t) = \tilde{s}(t)$ ,  $A(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}$  – огибающая сигнала,

$\psi(t) = \arctg[\tilde{s}(t)/s(t)]$  – полная мгновенная фаза,  $\varphi(t) = \psi(t) - \omega_0 t$  – мгновенная начальная фаза,  $\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \arctg \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)} \right] = \frac{s(t)\tilde{s}'(t) - \tilde{s}(t)s'(t)}{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}$  – мгновенная частота.

Квазигармоническая форма записи сигнала

$$\underline{x}(t) = A_0 [\cos \psi(t) + j \sin \psi(t)] = \operatorname{Re} \{ \underline{A}(t) e^{j\omega_0 t} \},$$

$\underline{A}(t) = A(t) e^{j\varphi t}$  – комплексная огибающая сигнала.

## Узкополосные сигналы

**Видеосигналы** – спектр сосредоточен в области низких частот от 0 до  $F_B$ .

**Радиосигналы** – спектр сосредоточен вблизи несущей частоты  $f_0 \neq 0$ ,

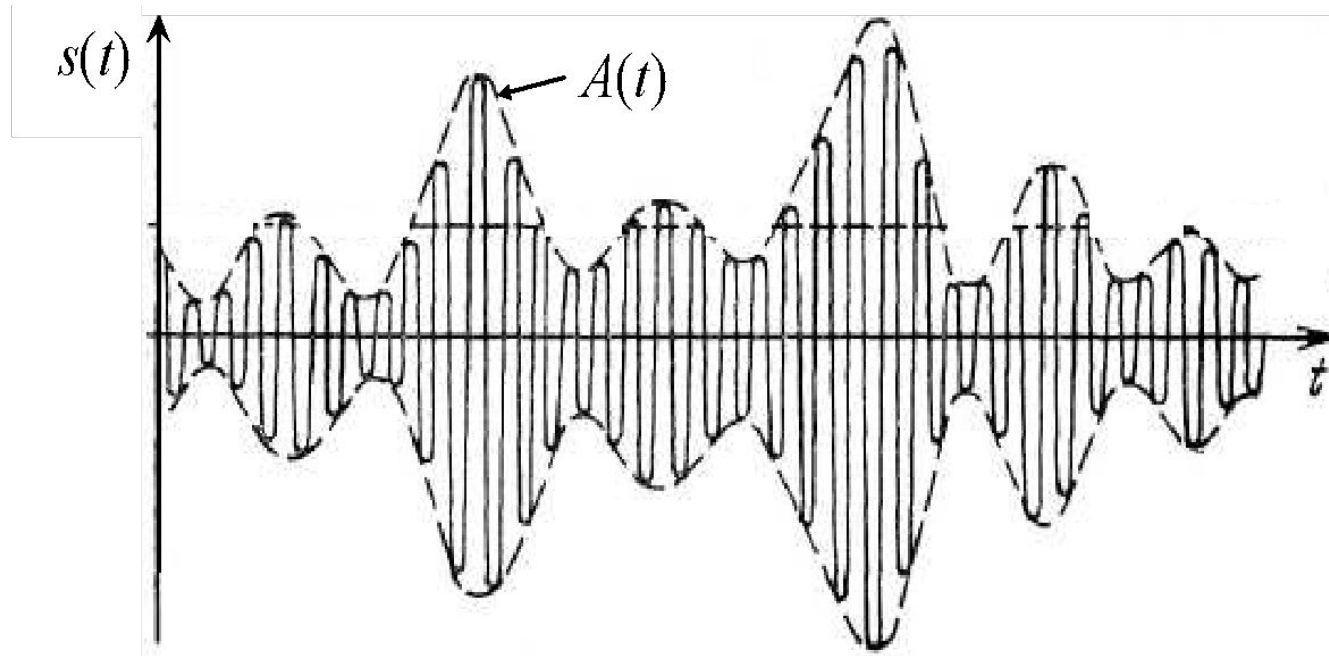
$\Delta f / f_0 \ll 1$  – узкополосный сигнал,  $\Delta f$  – ширина спектра сигнала:

$$s(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_0], \quad (1)$$

$A(t)$  и  $\psi$  – огибающая и фаза радиосигнала,  $\varphi_0$  – начальная фаза,  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – несущая частота,

$$A(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}, \quad \psi(t) = \operatorname{arctg}[\tilde{s}(t)/s(t)].$$

$A(t)$  – огибающая в виде линии, касательной к точке максимума исходной функции и, в случае гармонического сигнала, соединяющей два соседних максимума кратчайшим путём.



## Характеристики огибающей и начальной фазы узкополосного случайного сигнала

ВЧ сигнал  $s(t)$  (1), с учётом  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$  при  $\varphi_0 = 0$  можно представить в виде суммы двух квадратурных составляющих:

$$s(t) = A(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_0t - A(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_0t = A_c(t)\cos\omega_0t - A_s(t)\sin\omega_0t,$$

$$A_c(t) = A(t)\cos\varphi(t), \quad A_s(t) = A(t)\sin\varphi(t) \quad - \text{амплитуды соответственно}$$

косинусной и синусной составляющих колебания,

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \varphi(t) = -\operatorname{arctg}(A_s/A_c) \quad (2)$$

Для отыскания ПВ  $w_A(A)$  и  $w_\varphi(\varphi)$  требуется знание соответствующих ПВ  $w(A_c)$  и  $w(A_s)$ , а также  $w(A_c, A_s)$ .

$$w(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad w(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

Взаимная ФК между СП  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  при  $\tau = 0$   $B_{A_1 A_2}(0) = 0$ .

Следовательно,  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  в один и тот же момент времени являются независимыми величинами. Поэтому совместная  $w(A_c, A_s)$  и двумерная ПВ  $w(A, \varphi)$  определяются выражениями:

$$w(A_c, A_s) = w(A_c)w(A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A_c^2 - A_s^2}{2\sigma_s^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right);$$

$$w(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

Плотность вероятности начальной фазы

$$w_\varphi(\varphi) = \int_0^\infty w(A, \varphi) dA = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi}, \quad \begin{array}{l} -\pi < \varphi \leq \pi, \\ x = A/\sigma_s. \end{array}$$

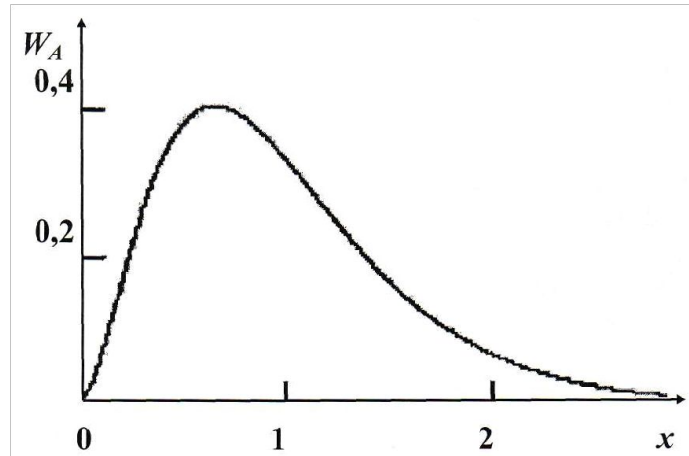
Начальная фаза узкополосного СП распределена равномерно на отрезке  $[0, 2\pi]$ .



Интегрируя по переменной  $\varphi$  получаем одномерную ПВ:

$$w_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} w(A, \varphi) d\varphi = \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad 0 < A < \infty.$$

Распределение огибающей называется *распределением Рэлея*.



Максимум значения функция  $w_A(A)$  достигает при  $A = \sigma_s$  ( $x = 1$ ) (наивероятнейшее значение огибающей).

Среднее значение (математическое ожидание) огибающей

$$M[A] = \int_0^{\infty} A w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_0^{\infty} A^2 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_s.$$

Дисперсия огибающей  $M[A^2] = \int_0^{\infty} A^2 w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_0^{\infty} A^2 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = 2\sigma_s^2,$

т. е. средняя мощность огибающей равна удвоенной дисперсии исходного физического сигнала.

Вероятность того, что огибающая  $A(t)$  превысит уровень  $C$

$$P(A > C) = \int_C^{\infty} w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_C^{\infty} A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

При  $C = \sigma_s^2$  вероятность превышения этого уровня составляет всего лишь примерно 1%. Поэтому можно считать, что ширина дорожки, фактически наблюдаемой на экране осциллографа, не превышает  $(5-6)\sigma_s$ .

Функция корреляции огибающей узкополосного нормального процесса

$$B_A(\tau) \approx \frac{\pi\sigma_s^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} R_0^2(\tau) \right]$$

$R_s(\tau) = B_s(\tau) / \sigma_s^2 = R_0(\tau) \cos \omega_0 \tau,$   $R_0(\tau)$  – коэффициент корреляции.

Представим  $w(A, \varphi)$  в виде произведения

$$w(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) = \left[\frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)\right] \left(\frac{1}{2\pi}\right) = w_A(A)w_\varphi(\varphi),$$

$A(t)$  и  $\varphi(t)$  независимые СВ при их отсчёте в один и тот же момент  $t$ .

Вероятность того, что огибающая  $A(t)$  превысит  $C$

$$p(A > C) = \int_C^\infty w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_C^\infty A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

При  $C = \sigma_s^2$  вероятность  $p(A > C) \approx 1\%$ , поэтому можно считать, что ширина дорожки, фактически наблюдаемой на экране осциллографа, не превышает (5-6)  $\sigma_s$ .

Функция корреляции фазы  $\varphi(t)$

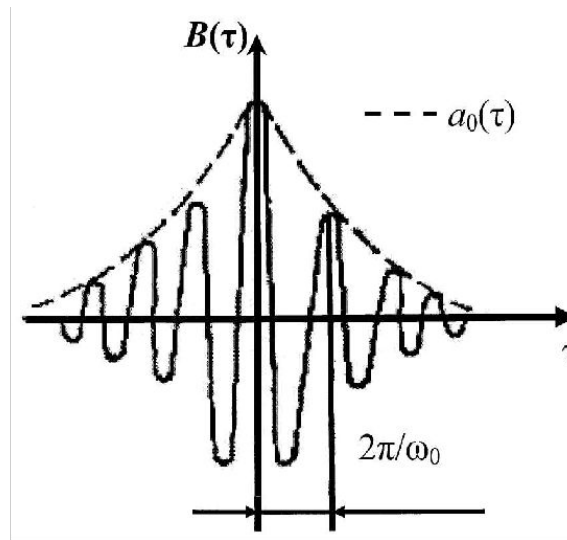
$$B_\varphi(\tau) = \frac{\pi}{2} R_0(\tau) + \frac{1}{4} R_0^2(\tau) + \frac{\pi}{12} R_0^3(\tau) + \dots$$

При  $\tau = 0$  ряд сходится к  $\pi^3/3$ , т.е. дисперсия фазы  $\sigma_\varphi^2 = \pi^3/3$ .

Функция корреляции узкополосного СП равна

$B(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau$ ,  $\rho(\tau) = a_0(\tau) / \sigma_x^2$  – нормированная огибающая,  $a_0(\tau)$  – огибающая, медленно изменяющаяся по сравнению с  $\cos \omega_0 t$ .

Интервал корреляции узкополосного СП  $\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} \frac{a_0(\tau) d\tau}{B(0)}$ .



ФК узкополосного СП

Вид ФК свидетельствует о том, что отдельные реализации узкополосного СП представляют собой квазигармонические колебания, у которых огибающая  $A(t)$  и фаза  $\varphi(t)$  являются СФ, медленно изменяющимися во времени.

## Пространства сигналов. Геометрическая трактовка процесса передачи сообщений в ТКС

Вся совокупность встречающихся сигналов  $L$  разбита на ряд множеств, объединённых каким-либо одним общим и единственным свойством  $P$ :  $L_P = \{s; P\}$  – множество всех сигналов  $s$ , для которых справедливо свойство  $P$ . Определив  $P$ , определяем множество сигналов.

Множество гармонических сигналов  $L = \{s; s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), -\infty < t < \infty\}$  содержит гармонические сигналы с произвольными значениями амплитуд  $A$ , частот  $\omega$  и фаз  $\varphi$ .

Множества сигналов могут образовываться из других, ранее определённых множеств, логическими операциями объединения (индекс  $\cup$ ) и пересечения (индекс  $\cap$ ):

$$L = S_1 \cup S_2 = \{s; s \in S_1 \text{ или } s \in S_2\},$$

$$L = S_1 \cap S_2 = \{s; s \in S_1 \text{ и } s \in S_2\}.$$

Для сигналов одного и того же множества (элементов) указываются признак или признаки, отличающие их друг от друга. Наиболее подходящим признаком, отличающим два элемента множества  $x$  и  $y$ , является расстояние  $d(x, y)$  между ними в некоторой системе координат.

Множество с определённым расстоянием называется *пространством*.

Если установлено правило для вычисления  $d(x, y)$ , то пространство называется *метрическим*, а само правило – *метрикой*.

Расстояние обладает следующими аксиоматическими признаками:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \quad \text{при } x = y;$$

$$d(x, y) = d(y, x);$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) - \text{неравенство треугольника,}$$

$x, y$  и  $z$  – элементы пространства.

Так как сигналы  $x$  и  $y$  представляют собой функции, то  $d(x, y)$  – это функционал.

В метрическом пространстве сигналы можно представить в виде векторов, соединяющих начало координат с элементом (точкой) пространства. Каждому элементу  $x, y, z, \dots$  соответствует набор вещественных или комплексных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  и т. д., являющихся проекцией вектора на координатные оси. Различные взаимосвязи между элементами пространства могут быть определены с помощью операций векторной алгебры. Эти операции линейны, следовательно векторное пространство ~~линейное~~. Множество сигналов  $L$  образует **линейное пространство** сигналов, если для него справедливы следующие аксиомы:

1) существует нулевой элемент  $\emptyset$ , что для всех  $x(t) \in L$  выполняется равенство  $x(t) + \emptyset = x(t)$ ;

2) для  $x(t) \in L$  и  $y(t) \in L$  существует  $s(t) = x(t) + y(t)$ ,  $s(t) \in L$ . При этом операция суммирования должна быть:

– коммутативна:  $x(t) + y(t) = y(t) + x(t)$ ;

– ассоциативна:  $x(t) + [y(t) + z(t)] = [x(t) + y(t)] + z(t)$ ;

– однородна:  $x(t) + [-x(t)] = \emptyset$ .

3) существует множество скалярных элементов  $\alpha$ , для которых  $y(t) = \alpha x(t)$  – новый сигнал,  $x(t) \in L$ ,  $y(t) \in L$ . Операция умножения должна быть:

- ассоциативна:  $\alpha[\beta \cdot x(t)] = \alpha \beta \cdot x(t)$ ;
- дистрибутивна:  $\alpha[x(t) + y(t)] = \alpha x(t) + \alpha y(t)$ ,
- пропорциональна:  $\begin{matrix} (\alpha + \beta)x(t) = \alpha x(t) + \beta x(t); \\ 1 \cdot x(t) = x(t), \quad 0 \cdot x(t) = \underline{0}; \end{matrix}$

0. В зависимости от значений скаляров  $\alpha, \beta, \lambda$ , линейные пространства могут быть вещественными или комплексными.

В векторном пространстве длина вектора называется его **нормой**  $\|x\|$ , а само пространство – **нормированным**. **Свойства нормы:**

$$\begin{aligned} &\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \text{ только при } x(t) = 0; \\ &\|kx\| = |k| \cdot \|x\|, \text{ где } k \text{ любое число;} \\ &\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ при } x(t) \in L \text{ и } y(t) \in L. \end{aligned}$$

Квадрат нормы носит название **энергии сигнала**:  $E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$ .

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$



Степень связи (сходства) по форме и положению сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$  в пространстве сигналов отражается их скалярным произведением:

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi, \quad (3)$$

$\varphi$  – угол между двумя векторами.

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{(\|x\| \cdot \|y\|)}.$$

При  $\varphi = 0$  ( $\cos \varphi = 1$ ) сигналы совпадают по направлению и расстояние между ними минимальное. При  $\varphi = \pi/2$  ( $\cos \pi/2 = 0$ ) сигналы перпендикулярны друг другу, т. е. ортогональны, и проекции сигналов друг на друга равны нулю. При  $\varphi = \pi$  ( $\cos \pi = -1$ ) сигналы противоположны по направлению и расстояние между ними максимально.

Фактор расстояния между сигналами играет существенную роль при их различении в демодуляторах и селекции в многоканальных системах.

Линейное пространство дискретных и цифровых сигналов со скалярным произведением (3) называется **евклидовым пространством**. Совокупность  $n$  линейно независимых векторов образует  **$n$ -мерное евклидово пространство  $R_n$** . Любой вектор  $\underline{x}$ , относящийся к  $R_n$ , определяется совокупностью его координат  $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Пространство  $R_n$  можно определить как множество точек, представленных концами векторов, норма которых равна

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}.$$

Расстояние между двумя векторами как норма разности векторов

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  пространство  $R_n$  переходит в бесконечномерное **пространство Гильберта**  $L_2$ , в частности, пространство всех непрерывных комплексных функций аргумента  $t$ , заданных на интервале  $(-T/2; T/2)$ , в котором скалярное произведение и квадрат нормы определяются выражениями:

$$(x, y) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y^*(t) dt, \quad \|x\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

Если элементы этого пространства  $L_2(T)$  – вещественные сигналы  $s(t)$ , определённые на интервале  $(-T/2; T/2)$ , то выполняется условие

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt \leq \infty.$$

При  $T \rightarrow \infty$  получаем пространство  $L_2(\infty)$ . Если для сигналов этого пространства последнее условие не выполняется, но выполняется условие

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt < \infty,$$

то вводится скалярное произведение с размерностью мощности

$$(u, i)_P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) i^*(t) dt \quad \text{и} \quad \|s\|_P^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt.$$

Квадрат расстояния между двумя векторами в вещественном пространстве  $L_2(T)$  определяется соотношениями:

$$d^2(x, y) = \|x - y\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t) - y(t)]^2 dt.$$

Пространство  $L_2$  представляет собой естественное обобщение пространства  $R_n$ , получаемое путём перехода от дискретизированной функции к функции непрерывного аргумента.

Пространство  $L_2$  имеет особое значение, т. к. оно позволяет применить общие геометрические представления к сообщениям, сигналам и помехам, определённым как функции непрерывного аргумента.

**Пространство Хэмминга.** Функция  $x(t)$ , принимающая на каждом интервале  $i\Delta t$  одно из  $m$  возможных значений  $x_i^{(k)}$  ( $k = \overline{0, m-1}$ ) на отрезке длиной  $T$  полностью определена  $n = T/\Delta t$  значениями  $x_i^{(k)}$  или совокупностью коэффициентов  $\{x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}\}$  ( $k, l, v \in \overline{0, m-1}$ ), называемый  **$n$ -набором**. При  $m=2$  коэффициенты  $x_i^{(k)}$  принимают значения 0 или 1,  $n$ -набор представляет собой просто кодовую комбинацию  $n$ -значного двоичного кода, отображающую символ передаваемого сообщения.

Двоичные  $n$ -наборы отображаются векторами (точками) в **пространстве Хэмминга**  $2_n$ .

Скалярное произведение в этом пространстве задаётся функцией:

$$(\overset{\square}{x}, \overset{\square}{y}) = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k \right]^2.$$

Норма двоичного вектора (*вес кодовой комбинации*  $w$ ) определяется количеством содержащихся в нём единиц

$$\|\overset{\square}{x}\| = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Расстояние в пространстве Хэмминга между двоичными векторами определяется по числу позиций в кодовой комбинации, в которых векторы имеют различные символы

$$d(\overset{\square}{x}, \overset{\square}{y}) = \|\overset{\square}{x} - \overset{\square}{y}\| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k - y_k| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k \oplus y_k|.$$