

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

4 часа

Классификация сигналов

По степени полноты априорной информации

Детерминированные

Случайные

Квазидетерминированные

Периодические

Непериодические

По форме представления зависимости от времени

Аналоговые (а)
(непрерывные
сигналы непре-
рывного времени)

Дискретные

непрерывные по
уровню дискрет-
ного времени (б)

дискретные по
уровню непрерыв-
ного времени (в)

дискретные по уров-
ню дискретного вре-
мени (цифровые) (г)

По виду передаваемых сообщений

Телефон-
ные

Факси-
мильные

Телеграф-
ные

Передача
данных

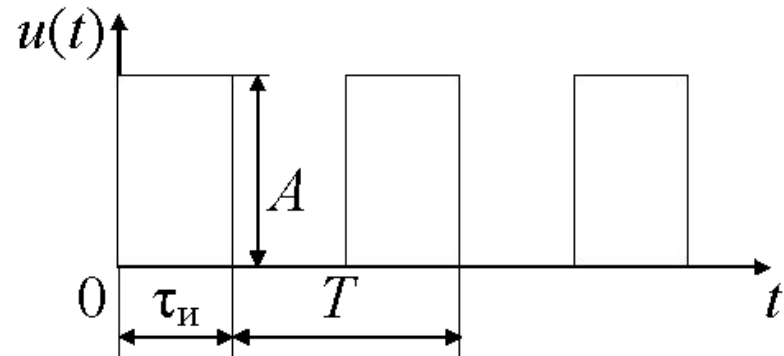
Звукового
вещания

Телевизионного
вещания

Детерминированные сигналы – заранее известные для любого момента времени, описываемые заданной функцией времени $u(t)$.

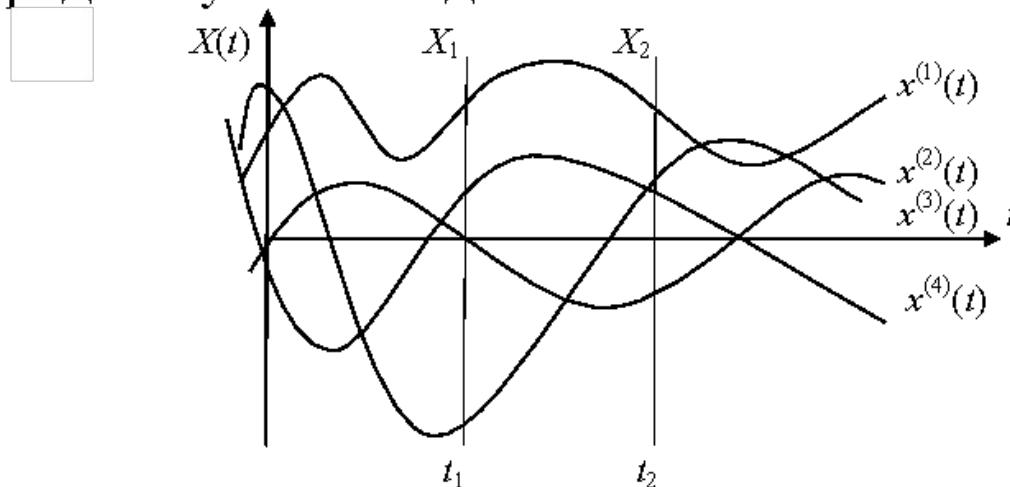
Аналоговые $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

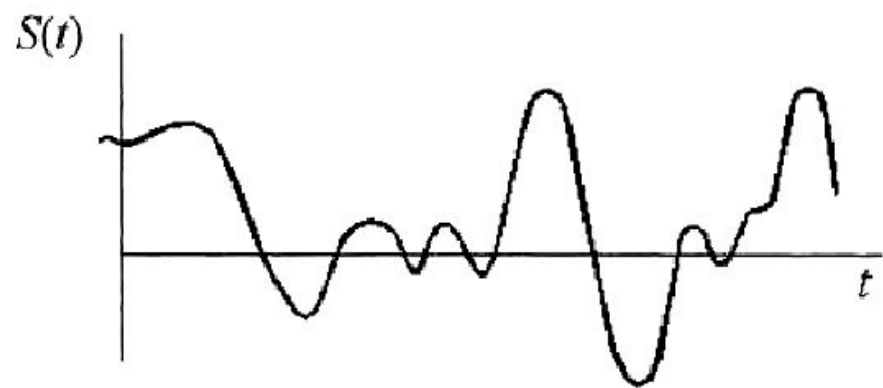
Периодическая импульсная последовательность



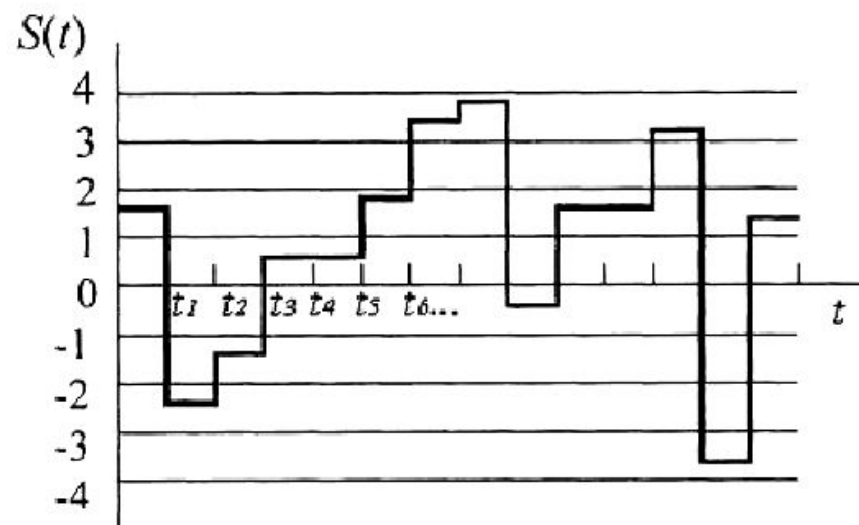
$$u(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, \tau_n + T]; \\ 0, & t \notin [0, \tau_n + T]; \end{cases}$$

Случайные сигналы – значения параметров в любой момент времени заранее непредсказуемы с заданной точностью

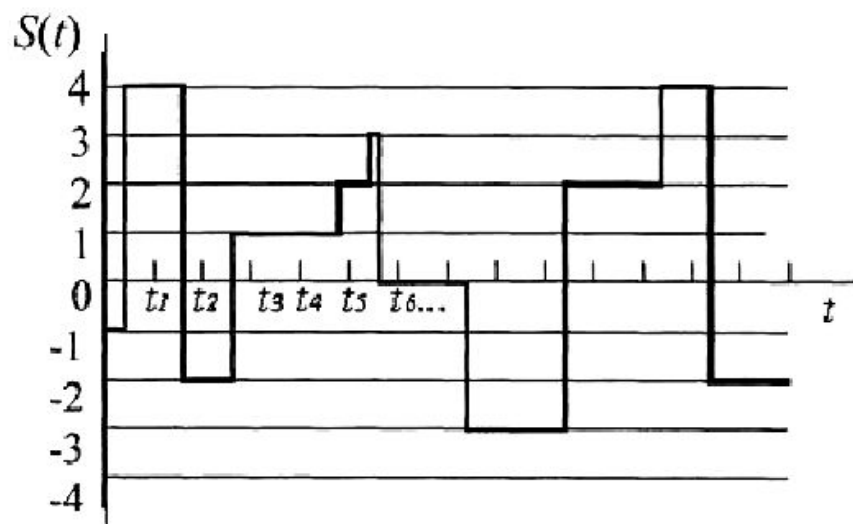




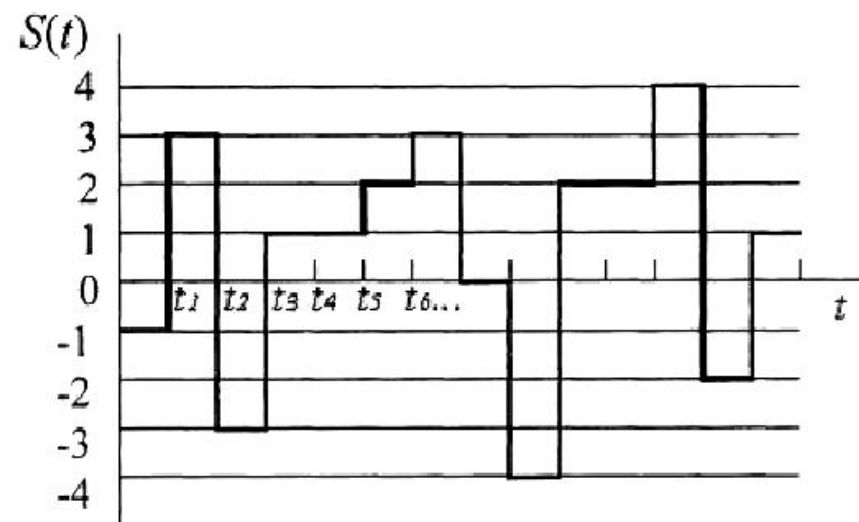
a)



b)



c)



d)

Тип передаваемых сообщений

Тип сигнала	Полоса частот F_c / скорость передачи	Динамический диапазон, D_c
Телефонный	0,3...3,4 кГц	35...40 дБ
Факсимильный		~ 25 дБ
Телеграфный	50...200 Бод	
Передача данных	600...48000 Бод	
Звуковое вещание	0,03...15 000 кГц	25...65 дБ
Телевещание	0...6 МГц	~ 40дБ

Обобщённый ряд Фурье

Для использования частотного метода анализа применяют разложение сигналов в обобщённый ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(t), \quad (1)$$

где $c_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|_2} \int_a^b x(t) \varphi_j(t) dt$ $\varphi_j(t)$ – бесконечная система действительных

попарно ортогональных на отрезке $[a, b]$ функций:

$$\int_a^b \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = 0 \quad \text{при } n \neq m; \quad \int_a^b \varphi_n^2(t) dt \neq 0.$$

Обобщенный ряд Фурье при заданной системе функций $\varphi_n(t)$ и при фиксированном числе слагаемых ряда обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума СКО) данной функции $x(t)$.

Если в качестве ортогональных используются функции вида:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \cos k\Omega t, \\ \sin k\Omega t, \\ e^{jk\Omega t}; \end{cases}$$

то ряд (1) называется рядом Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega_1 t + b_k \sin k\Omega_1 t), \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\Omega_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\Omega_1 t dt;$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_k e^{jk\Omega_1 t}, \quad \mathcal{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\Omega_1 t} dt;$$

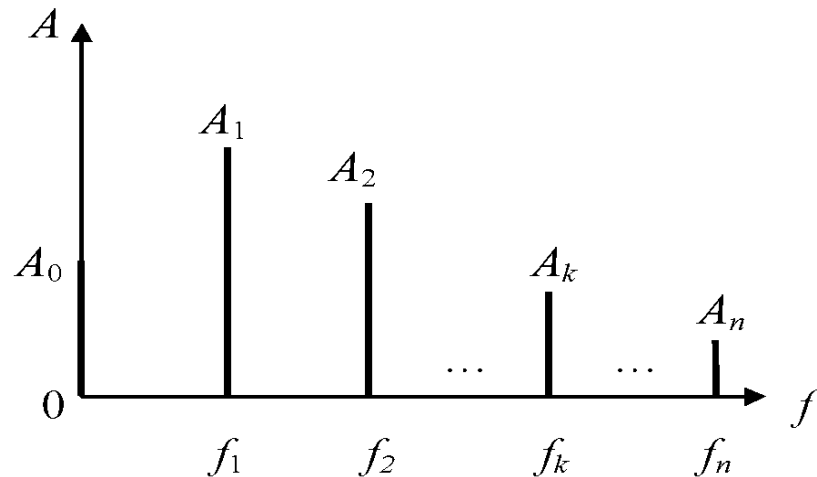
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_1 t - \varphi_k), \quad A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \arctg \frac{b_k}{a_k},$$

где $\Omega_1 = 2\pi/T$ – частота первой гармоники, T – период функции $x(t)$.

Периодическую функцию $x(t)$ можно представить суммой гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $f_1 = 1/T$ ($\omega_1 = 2\pi/T$) с амплитудами A_k и начальными фазами φ_k .

Совокупность амплитуд A_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) образует **амплитудный спектр**, а совокупность фаз φ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) – **фазовый спектр функции**.

Спектр периодического сигнала – дискретный.



Амплитудный спектр периодического сигнала

Спектр непериодического сигнала – сплошной и определяется интегралом Фурье $S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ – **спектральная плотность сигнала**.

$$W_x(f) = S_x^2(f) - \text{спектральная плотность энергии}, \quad E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df;$$

$$G_x(f) = S_x^2(f)/T - \text{спектральная плотность мощности}; \quad P = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G_x(f) df.$$

Эти характеристики являются чётными функциями частоты, следовательно:

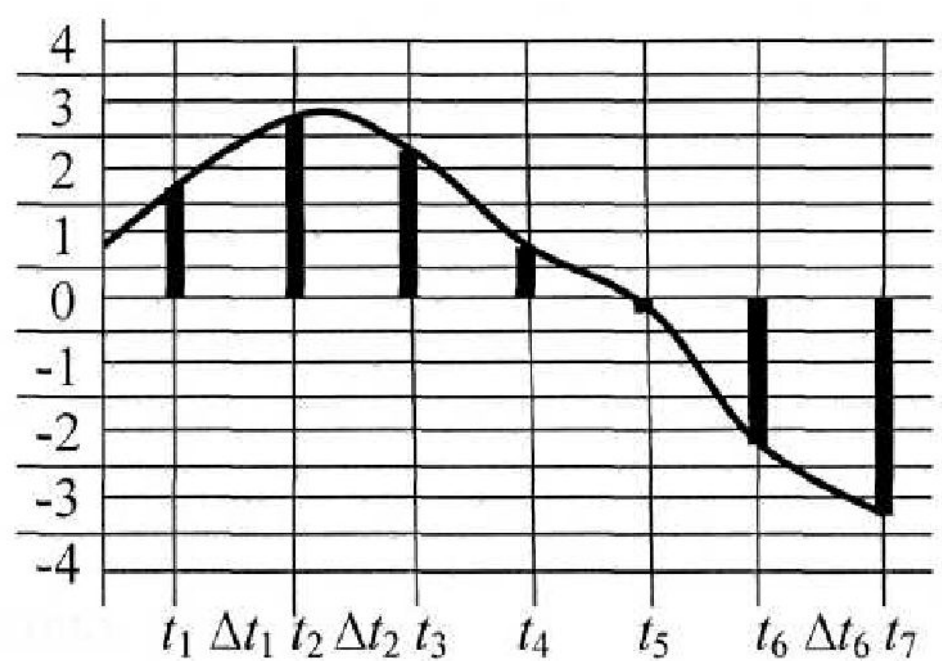
$$E = 2 \int_0^{\infty} W_x(f) df = \int_0^{\infty} W_{0,x}(f) df, \quad P = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) df = \int_0^{\infty} G_{0,x}(f) df,$$

где $W_{0,x}(f) = 2W_x(f)$ и $G_{0,x}(f) = 2G_x(f)$ – СПЭ и СПМ, определённые на положительных частотах.

Дискретизация и восстановление непрерывных сигналов.

Теорема Котельникова.

Дискретизация по времени – взятия отсчётов первичного сигнала $s(t)$ в определённые дискретные моменты t_k ; непрерывная функция $s(t)$ заменяет совокупностью мгновенных значений (отсчётов) $\{s(k)\}$ или $\{s(t_k)\}$.



Значения, полученные при дискретизации

1,7 2,7 2,2 0,7 -0,2 -2,2 3,2

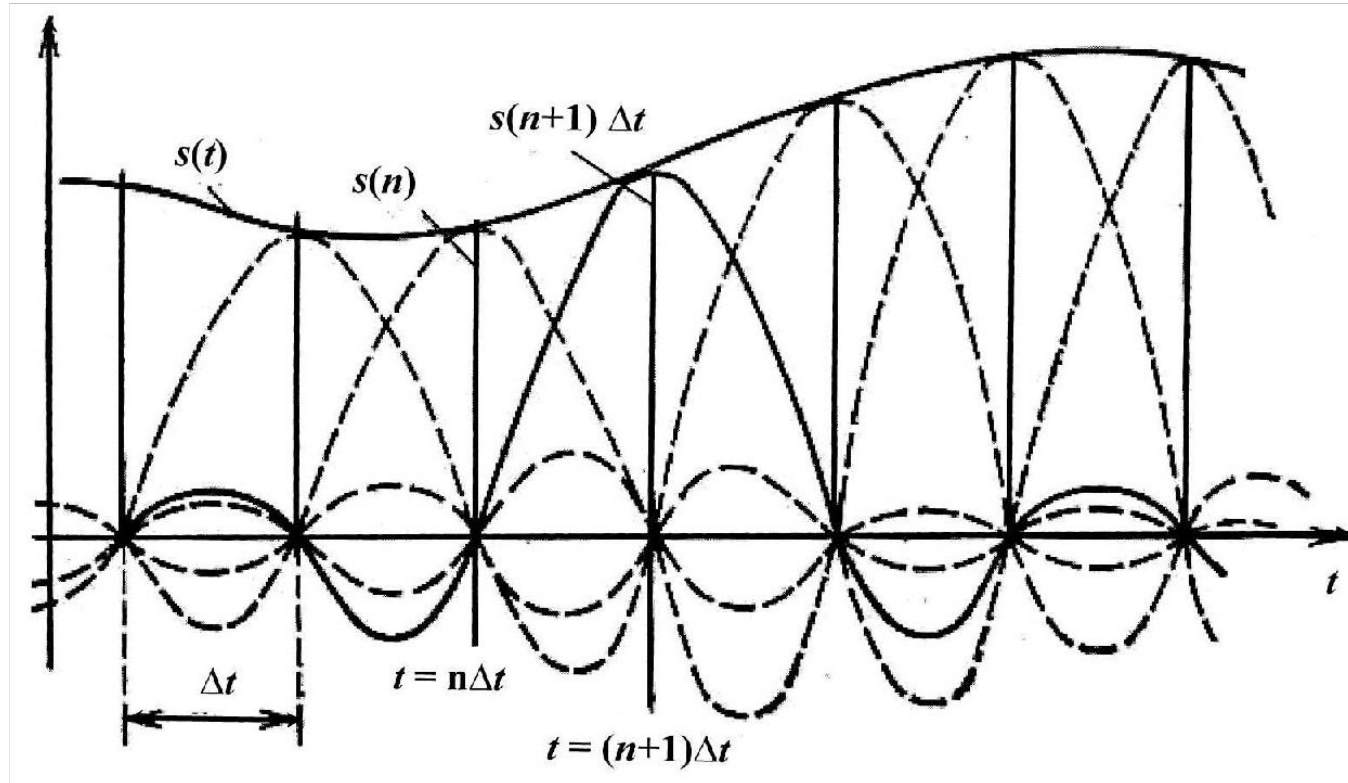
Теорема Котельникова (отсчетов, Найквиста): непрерывный сигнал $s(t)$, спектр которого ограничен сверху частотой F_B , полностью определяется отсчетами мгновенных значений $s(k\Delta t)$ в точках, отстоящих друг от друга на интервалы $\Delta t \leq 1/2F_B$. Интервал Δt называется **интервалом Котельникова (Найквиста)**, а $f_d = 1/\Delta t$ – **частотой дискретизации**.

Эта теорема позволяет представить непрерывную функцию $s(t)$ в виде ряда Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)},$$

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} = \begin{cases} 1, & t = k\Delta t; \\ 0, & t = n\Delta t, \quad n \neq k; \end{cases} \quad \text{– базисная функция отсчетов.}$$

Ряд Котельникова точно определяет функцию $s(t)$ в точках отсчета (коэффициентами ряда являются сами выборки из функции $s(k\Delta t)$) и определяет функцию $s(t)$ в любой момент t .



Представление сигнала рядом Котельникова

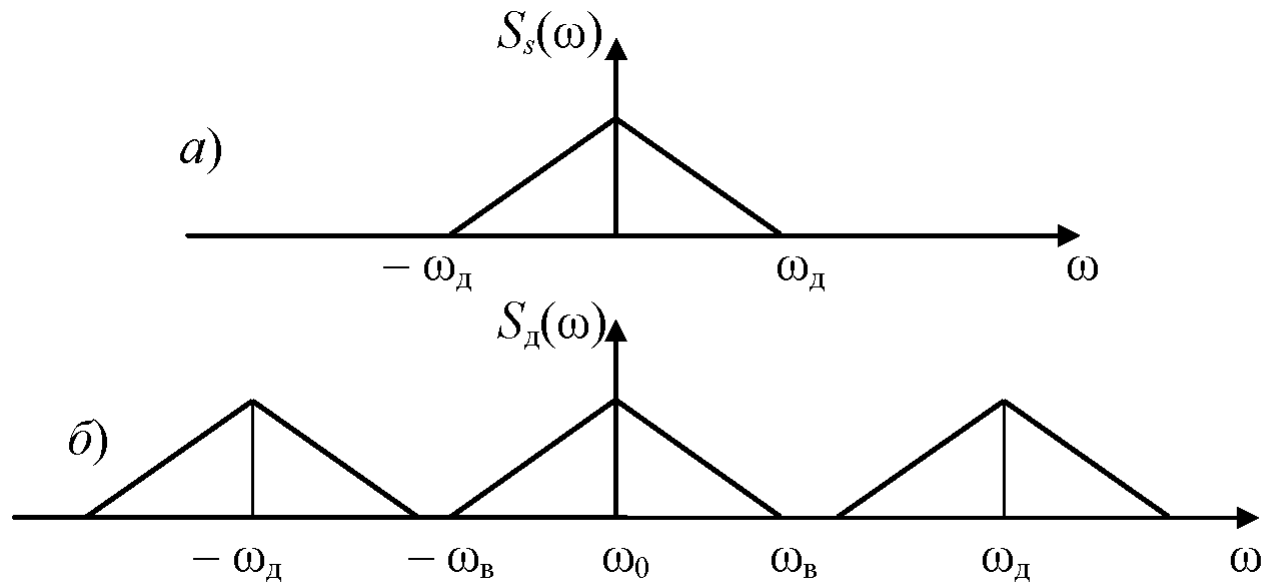
Теоретически отсчёты функции $s(t)$ получаются в результате её перемножения на периодическую последовательность δ -импульсов $u_\delta(t)$ с периодом $T = \Delta t$, спектр которой является дискретным:

$$s_{\text{д}}(t) = s(t)u_\delta(t) = s(t) \left[\dots + \frac{1}{\Delta t} e^{-j\omega_\delta t} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} e^{j\omega_\delta t} + \dots \right] - \text{дискретный сигнал,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{д}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{д}}(t) e^{-j\omega t} dt = \square + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega + \omega_\delta)t} dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega - \omega_\delta)t} dt + \square = \\ &= \dots \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega + \omega_\delta) + \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega) + \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega - \omega_\delta) + \frac{1}{\Delta t} \mathcal{S}_s(\omega - 2\omega_\delta) + \dots, \end{aligned}$$

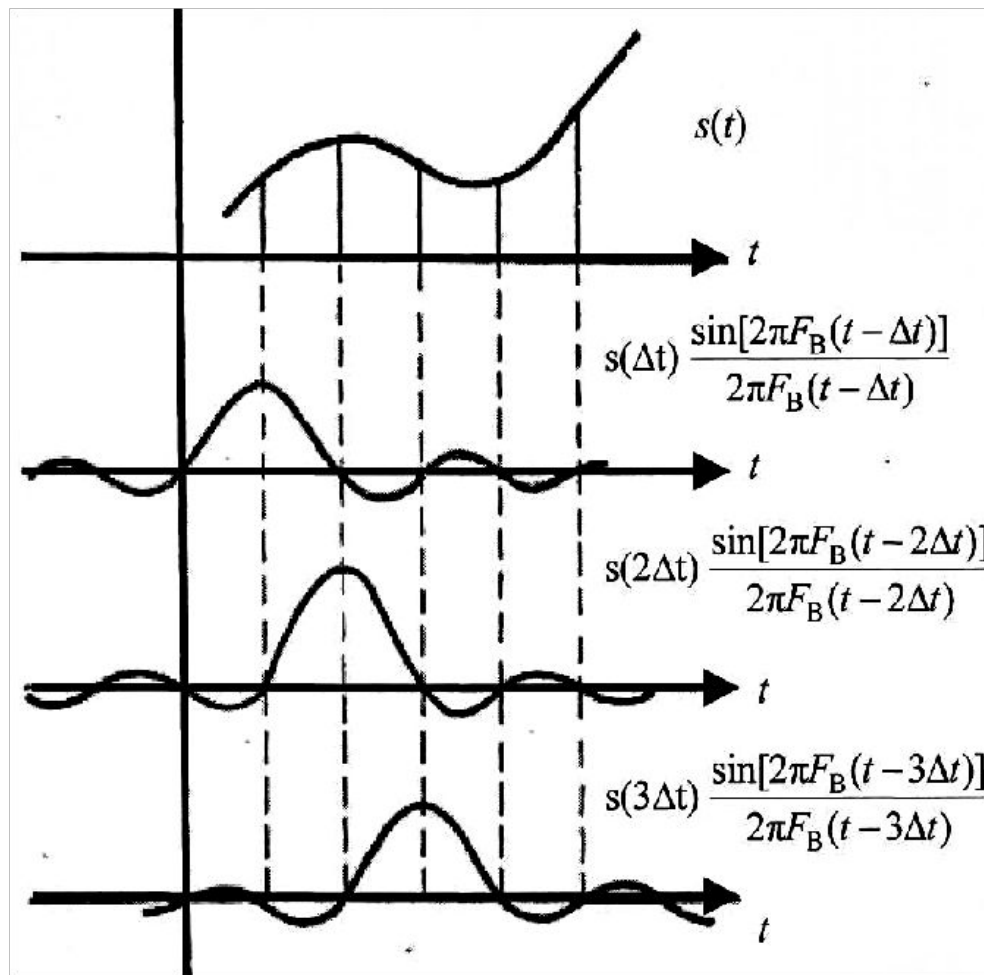
$\mathcal{S}_{\text{д}}(\omega)$ – спектр дискретизированного сигнала $s_{\text{д}}(t)$,

$\mathcal{S}_s(\omega)$ – спектр исходного сигнала $s(t)$.



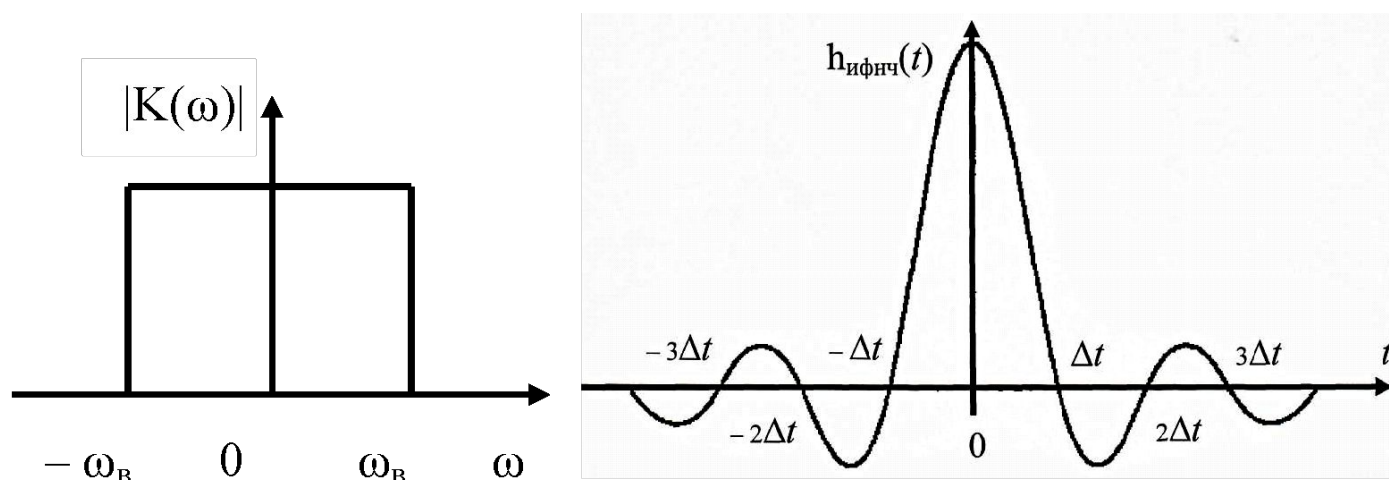
Спектр исходного (а) и дискретизированного сигнала (б)

Восстановление исходного сигнала по последовательности отсчетов осуществляется путем формирования для каждого отсчета $s(k\Delta t)$ функции $\varphi_k(t) = \sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)] / 2\pi F_B(t - \Delta t)$ с соответствующей амплитудой и последующим суммированием всех функций.



Восстановление исходного сигнала по последовательности отсчётов

Устройством, формирующим отклик вида $(\sin x)/x$ при воздействии δ -импульса, является идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ) с АЧХ и ИХ характеристиками, представленными на рис.



АЧХ (а) и ИХ (б) ИФНЧ

Погрешности дискретизации и восстановления непрерывного сигнала

1. Теорема Котельникова точно справедлива только для сигналов с финитным (конечным) спектром, т. е. имеющих бесконечную длительность. Спектры реальных сигналов (конечной длительности) бесконечны. Погрешность дискретизации определяется энергией спектральных составляющих сигнала, лежащих за пределами частоты ω_B

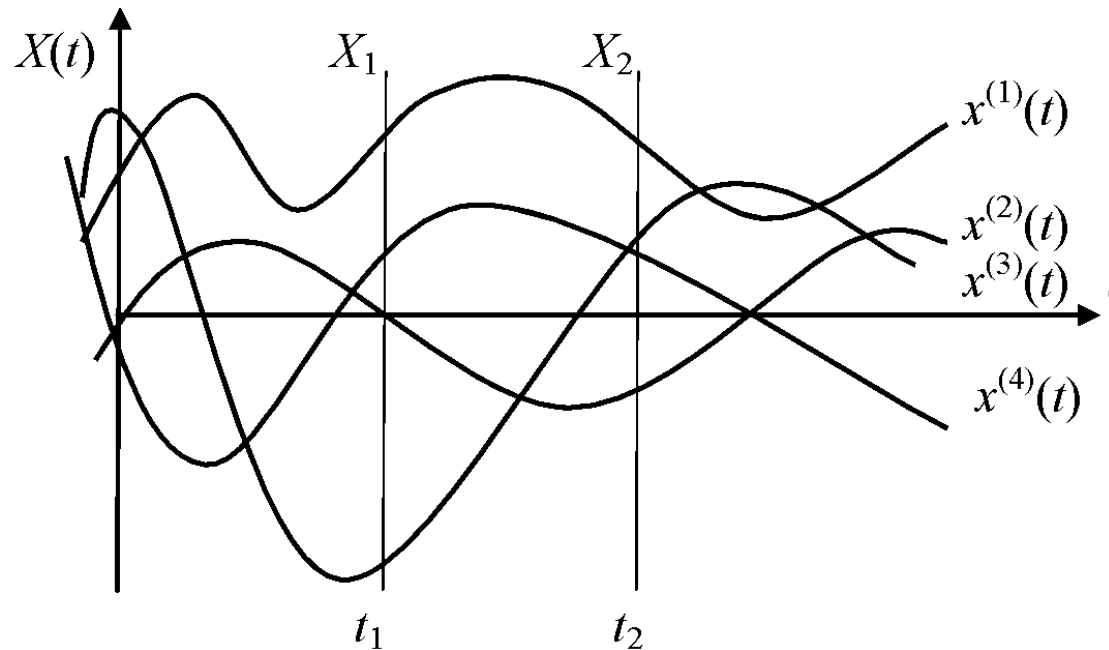
$$\overline{\Delta E_D^2} = \int_{\omega_B} |\mathcal{F}_s(\omega)|^2 d\omega.$$

2. Вторая причина возникновения погрешностей – неидеальность восстанавливающего ФНЧ:

$$h_{\text{ФНЧ}}(t) = e^{-\frac{t}{R_\phi C_\phi}} / R_\phi C_\phi.$$

Вывод: чем выше ω_B и чем ближе характеристики восстанавливающего ФНЧ к идеальным, тем ближе восстановленный сигнал к исходному.

Случайные процессы и их основные характеристики



Случайная функция – функция, значения параметров которой в любой момент времени заранее непредсказуемы с заданной точностью.

Реализация случайной функции – вид случайной функции в конкретном испытании $x^{(i)}(t)$.

Случайная величина – значение случайной функции в конкретный момент времени $X_k = \{x^{(i)}(t_k)\}$.

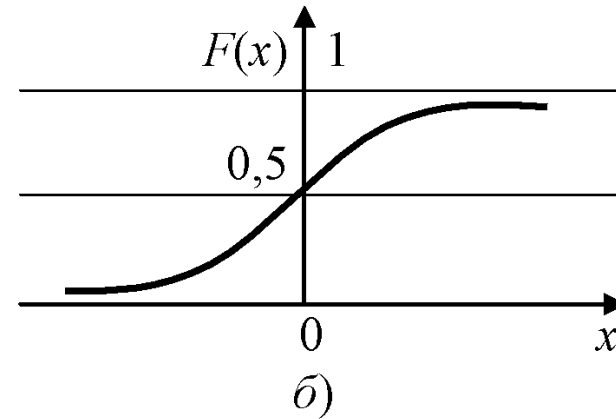
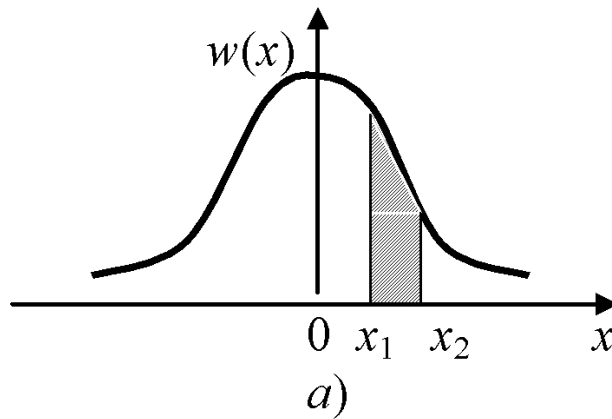
Случайный процесс – совокупность случайных функций $\{x^{(i)}(t)\}$.

Для непрерывных СП $X(t)$ распределение вероятностей в заданном сечении t_1 характеризуется одномерной **плотностью вероятностей**:

$$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x \leq X \leq x + \Delta x)}{|\Delta x|} \geq 0$$

или **интегральной функцией распределения** (ИФР) $F(x)$:

$$F(x) = p(X < x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx.$$



Типовые графики одномерных ПВ (а) и ИФР (б)

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} - n\text{-мерная ПВ}$$

Основные свойства ИФР и ПВ случайной величины

Название и обозначение	Функция распределения	Плотность вероятности
Определение	$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$	$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x \leq X \leq x + \Delta x)}{ \Delta x }$
Физическая размерность	безразмерная	размерность $\frac{1}{X}$
Взаимосвязь	$F(x) = \int_{-\infty}^x w(y) dy$	$F(x) = p(X \leq x)$
Особенности функции	$F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$ (неубывающая)	$w(x) \geq 0$ (неотрицательная)
Расчёт вероятности	$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	$p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx$
Свойство нормировки	$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$

Основные числовые характеристики

Математическое ожидание $m_1(t) = M[X(t)] = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x,t)dx$

– усреднённое по множеству реализаций значение случайного процесса; физический смысл – среднее значение случайного процесса; размерность СП.

Дисперсия $\sigma^2(t) = D[X(t)] = M\left[X^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_1(t)]^2 w(x,t)dx$

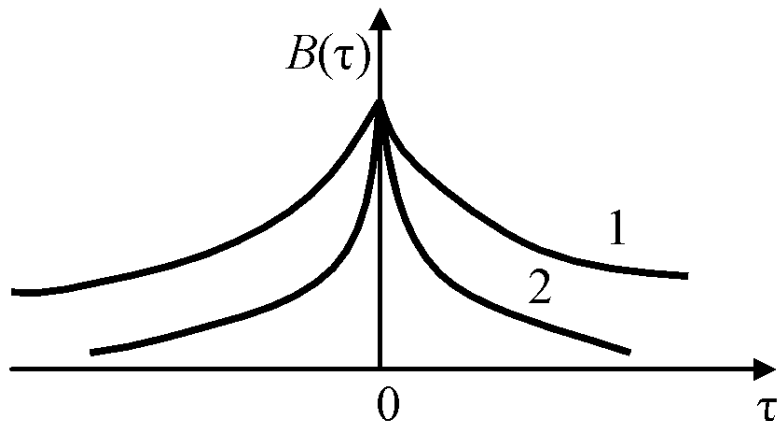
– стандартное или среднеквадратическое отклонение значений СП от математического ожидания, характеризует разброс СВ относительно МОЖ; физический смысл – мощность переменной составляющей СП;

Функция корреляции – характеризует статистическую связь между значениями СП в моменты времени t_1 и t_2 , разделённые интервалом $\tau = t_2 - t_1$:

$$B_x(t_1, t_2) = M\left[X_1 \cdot X_2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1(t_1)][x_2 - m_1(t_2)]w(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1 dx_2.$$

Ковариационная функция

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$



Функция корреляции СП с медленно (1) и быстро (2) убывающими связями

Функция взаимной корреляции — характеризует статистическую связь между значениями двух СП в моменты времени t_1 и t_2 , разделёнными интервалом $\tau = t_2 - t_1$:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{1x})(y - m_{1y}) w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx dy.$$

Стационарные, эргодические случайные процессы

Случайные процессы

Стационарные

Нестационарные

В узком смысле

$$\begin{aligned}
 &w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\
 &= w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 - \tau, t_2 - \tau, \dots, t_n - \tau); \\
 &w(x, t) = w(x, t - \tau); \\
 &w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, x_2; t_1 - \tau, t_2 - \tau) = w(x_1, \\
 &x_2; \tau), \tau = t_2 - t_1
 \end{aligned}$$

В широком смысле

$$\begin{aligned}
 &w(x, t) = w(x, t - \tau); \\
 &w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, x_2; t_1 - \tau, t_2 - \tau) = w(x_1, \\
 &x_2; \tau), \tau = t_2 - t_1; \\
 &m(t) = m, \sigma^2(t) = \sigma^2, \\
 &B(t_1, t_2) = B(\tau), B(\tau) = B(-\tau)
 \end{aligned}$$

Эргодические

Достаточное условие эргодичности стационарного в широком смысле СП

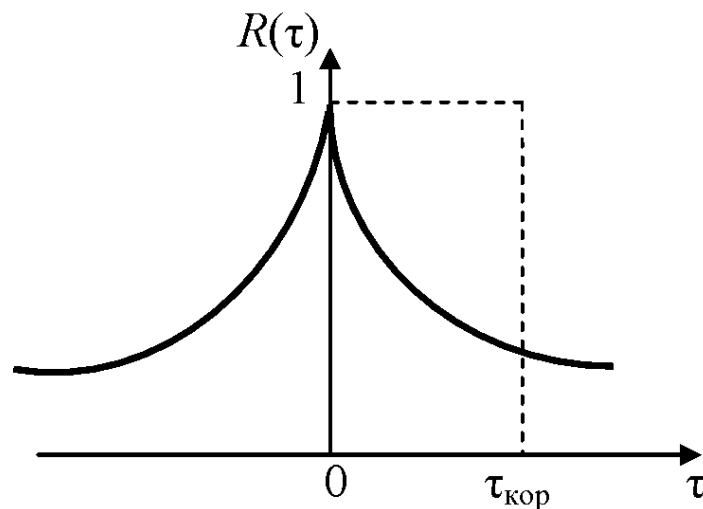
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(\tau) d\tau = 0,$$

$$m_1 = \bar{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad \sigma^2 = [x(t) - \bar{x}(t)]^2 = \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - m_1(t)]^2 dt, \quad B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{\sim}(t) x_{\sim}(t - \tau) dt,$$

$x_{\sim}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ – переменная часть СП,

Свойства функции корреляции стационарного эргодического СП

1. $B(\tau) = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} x_{\sim}(t)x_{\sim}(t-\tau)dt;$
2. $B_x(t_1, t_2) = B_x(\tau).$
3. ФК действительная и чётная $B_x(\tau) = B_x(-\tau).$
4. $B_x(\tau = 0) = B_x(0) = \sigma_x^2 = P_{\sim}$ – мощность переменной составляющей СП.
5. $B_x(\tau) \leq B_x(0).$
6. Для статистически независимых сечений $B_x(t_1, t_2) = 0.$
7. Коэффициент корреляции $R(x) = \frac{B_x(\tau)}{B_x(0)};$ $R_x(0) = 1,$ $-1 \leq R_x(\tau) \leq 1.$



8. Интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}$ – минимальное расстояние между двумя сечениями, при котором значения СП можно считать некоррелированными, определяется методом равновеликого прямоугольника:

$$\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau.$$

9. Взаимная ФК двух процессов $X(t)$ и $Y(t)$ равна:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = M \left[X(t_1) \cdot Y(t_2) \right] = \overline{X(t_1) Y(t_2)} = \overline{X(t_2) Y(t_2)} = B_{yx}(t_1, t_2).$$

10. ФК суммы независимых СП $Z(t) = X(t) + Y(t)$ равна:

$$B_z(t_1, t_2) = B_x(t_1, t_2) + B_y(t_1, t_2).$$

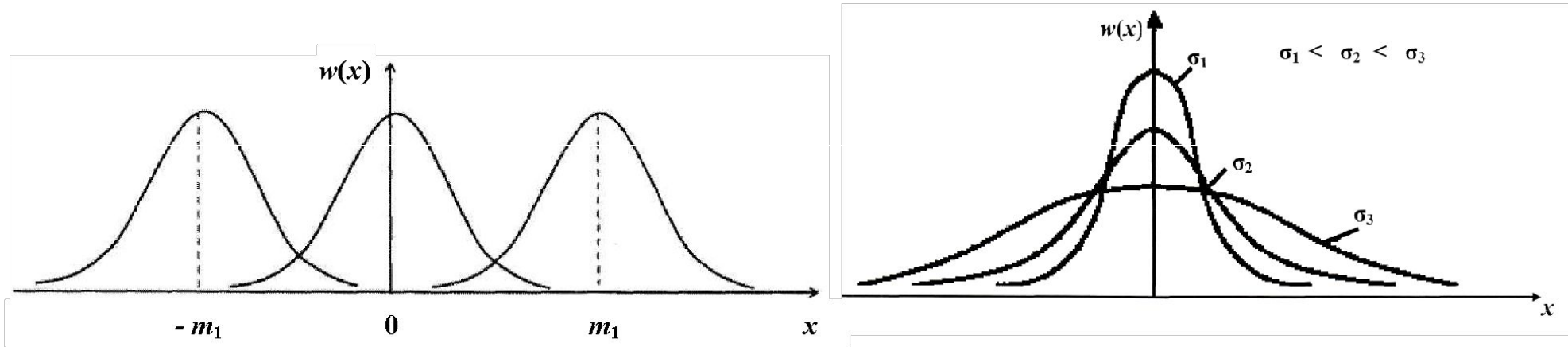
Нормальные (гауссовские) случайные процессы

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_x^2}\right].$$

Это распределение полностью определяется двумя параметрами: m_1 и σ_x^2 .

Свойства нормального СП:

- 1) ПВ положительная $w(x) \geq 0$;
- 2) ПВ симметрична относительно $x = m_1$;
- 3) $w_{\max} = w(m_1) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$;
- 4) $\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$;
- 5) При изменении m_1 кривая без изменения формы смещается вдоль оси x ;
- 6) Чем больше дисперсия σ_x^2 , тем меньше величина максимума ПВ и тем она шире.



7) ИФР, соответствующая нормальному закону, имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx = \left| \begin{array}{l} y = (x-m_1)/\sigma \\ dy = dx/\sigma \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_1}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m_1}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – **интеграл вероятности**, неэлементарная табули-

рованная функция, вероятность того, что нормированное случайное отклонение не превзойдет величину z .

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F\left(\frac{x_2 - m_1}{\sigma_x}\right) - F\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_x}\right); \quad p(m_1 - 3\sigma < x < m_1 + 3\sigma) \cong 0,997.$$

Аналитический (комплексный) сигнал

Представление сложного (негармонического) сигнала $s(t)$ в виде действительной или мнимой части комплексного сигнала $\underline{z}(t) = s(t) + j\tilde{s}(t)$, $\tilde{s}(t)$ – функция, связанная с исходной соотношениями:

$$\tilde{s}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad - \text{преобразования Гильберта,}$$

является обобщением символического метода.

Экспоненциальная форма записи сигнала

$$\underline{z}(t) = A(t) [\cos \psi(t) + j \sin \psi(t)]$$

$A(t) \cos \psi(t) = s(t)$, $A(t) \sin \psi(t) = \tilde{s}(t)$, $A(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}$ – огибающая сигнала,

$\psi(t) = \arctg[\tilde{s}(t)/s(t)]$ – полная мгновенная фаза, $\varphi(t) = \psi(t) - \omega_0 t$ – мгновенная начальная фаза, $\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\arctg \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)} \right] = \frac{s(t)\tilde{s}'(t) - \tilde{s}(t)s'(t)}{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}$ – мгновенная частота.

Квазигармоническая форма записи сигнала

$$\underline{x}(t) = A_0 [\cos \psi(t) + j \sin \psi(t)] = \operatorname{Re} \{ \underline{A}(t) e^{j\omega_0 t} \},$$

$\underline{A}(t) = A(t) e^{j\varphi t}$ – комплексная огибающая сигнала.

Узкополосные сигналы

Видеосигналы – спектр сосредоточен в области низких частот от 0 до F_B .

Радиосигналы – спектр сосредоточен вблизи несущей частоты $f_0 \neq 0$,

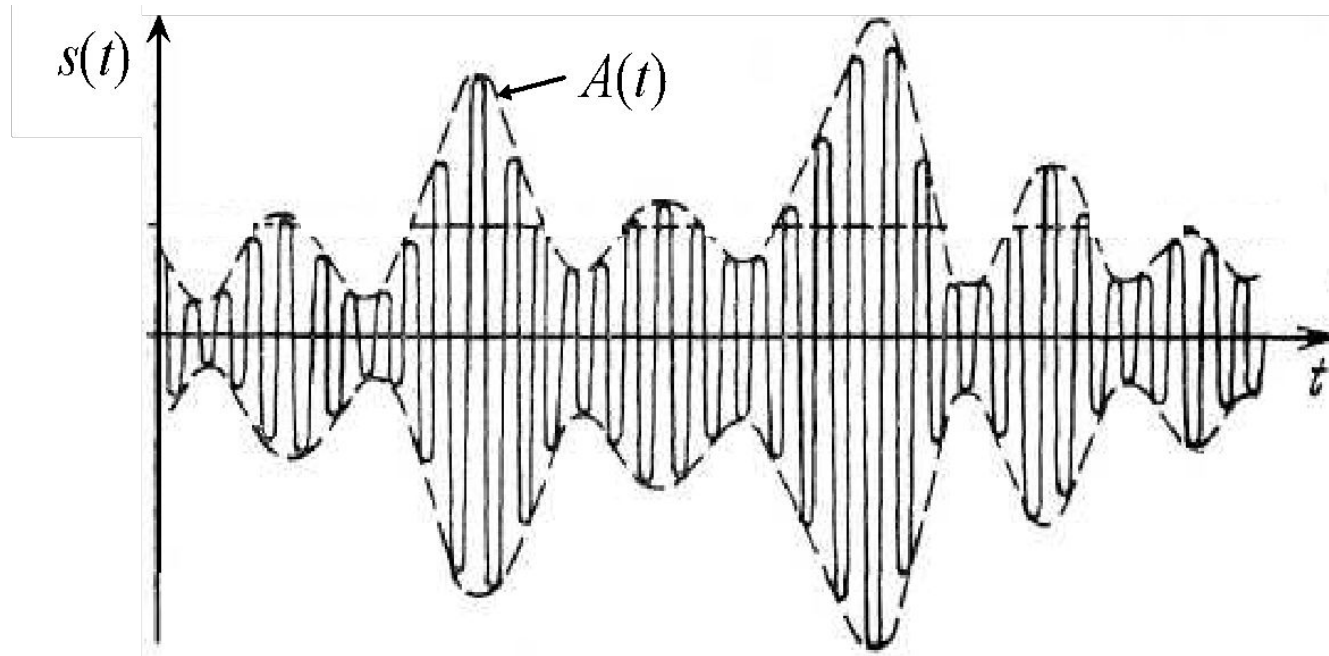
$\Delta f / f_0 \ll 1$ – узкополосный сигнал, Δf – ширина спектра сигнала:

$$s(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_0], \quad (1)$$

$A(t)$ и ψ – огибающая и фаза радиосигнала, φ_0 – начальная фаза, $\omega_0 = 2\pi f_0$ – несущая частота,

$$A(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}, \quad \psi(t) = \operatorname{arctg}[\tilde{s}(t)/s(t)].$$

$A(t)$ – огибающая в виде линии, касательной к точке максимума исходной функции и, в случае гармонического сигнала, соединяющей два соседних максимума кратчайшим путём.



Характеристики огибающей и начальной фазы узкополосного случайного сигнала

ВЧ сигнал $s(t)$ (1), с учётом $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ при $\varphi_0 = 0$ можно представить в виде суммы двух квадратурных составляющих:

$$s(t) = A(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_0t - A(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_0t = A_c(t)\cos\omega_0t - A_s(t)\sin\omega_0t,$$

$$A_c(t) = A(t)\cos\varphi(t), \quad A_s(t) = A(t)\sin\varphi(t) \quad - \text{амплитуды соответственно}$$

косинусной и синусной составляющих колебания,

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \varphi(t) = -\operatorname{arctg}(A_s/A_c) \quad (2)$$

Для отыскания ПВ $w_A(A)$ и $w_\varphi(\varphi)$ требуется знание соответствующих ПВ $w(A_c)$ и $w(A_s)$, а также $w(A_c, A_s)$.

$$w(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad w(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

Взаимная ФК между СП $A_c(t)$ и $A_s(t)$ при $\tau = 0$ $B_{A_1 A_2}(0) = 0$.

Следовательно, $A_c(t)$ и $A_s(t)$ в один и тот же момент времени являются независимыми величинами. Поэтому совместная $w(A_c, A_s)$ и двумерная ПВ $w(A, \varphi)$ определяются выражениями:

$$w(A_c, A_s) = w(A_c)w(A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A_c^2 - A_s^2}{2\sigma_s^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right);$$

$$w(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

Плотность вероятности начальной фазы

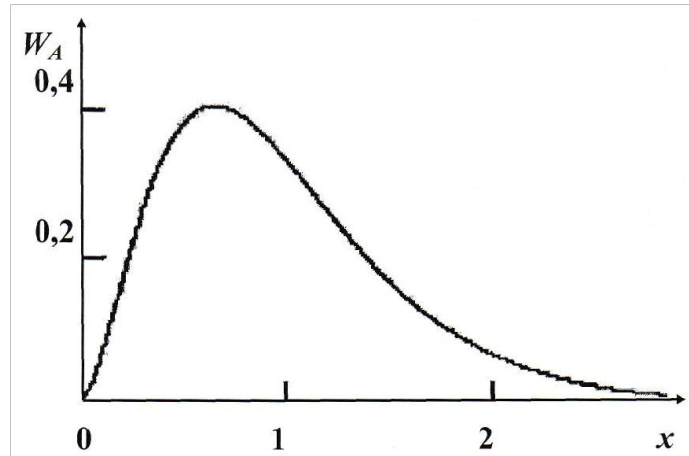
$$w_\varphi(\varphi) = \int_0^\infty w(A, \varphi) dA = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi}, \quad \begin{array}{l} -\pi < \varphi \leq \pi, \\ x = A/\sigma_s. \end{array}$$

Начальная фаза узкополосного СП распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$.

Интегрируя по переменной φ получаем одномерную ПВ:

$$w_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} w(A, \varphi) d\varphi = \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad 0 < A < \infty.$$

Распределение огибающей называется *распределением Рэлея*.



Максимум значения функция $w_A(A)$ достигает при $A = \sigma_s$ ($x = 1$) (наивероятнейшее значение огибающей).

Среднее значение (математическое ожидание) огибающей

$$M[A] = \int_0^{\infty} A w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_0^{\infty} A^2 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_s.$$

Дисперсия огибающей $M[A^2] = \int_0^{\infty} A^2 w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_0^{\infty} A^2 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = 2\sigma_s^2,$

т. е. средняя мощность огибающей равна удвоенной дисперсии исходного физического сигнала.

Вероятность того, что огибающая $A(t)$ превысит уровень C

$$P(A > C) = \int_C^{\infty} w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_C^{\infty} A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

При $C = \sigma_s^2$ вероятность превышения этого уровня составляет всего лишь примерно 1%. Поэтому можно считать, что ширина дорожки, фактически наблюдаемой на экране осциллографа, не превышает $(5-6)\sigma_s$.

Функция корреляции огибающей узкополосного нормального процесса

$$B_A(\tau) \approx \frac{\pi\sigma_s^2}{2} \left[1 + \frac{1}{4} R_0^2(\tau) \right]$$

$R_s(\tau) = B_s(\tau) / \sigma_s^2 = R_0(\tau) \cos \omega_0 \tau,$ $R_0(\tau)$ – коэффициент корреляции.

Представим $w(A, \varphi)$ в виде произведения

$$w(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) = \left[\frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right)\right] \left(\frac{1}{2\pi}\right) = w_A(A)w_\varphi(\varphi),$$

$A(t)$ и $\varphi(t)$ независимые СВ при их отсчёте в один и тот же момент t .

Вероятность того, что огибающая $A(t)$ превысит C

$$p(A > C) = \int_C^\infty w_A(A) dA = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_C^\infty A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) dA = \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

При $C = \sigma_s^2$ вероятность $p(A > C) \approx 1\%$, поэтому можно считать, что ширина дорожки, фактически наблюдаемой на экране осциллографа, не превышает (5-6) σ_s .

Функция корреляции фазы $\varphi(t)$

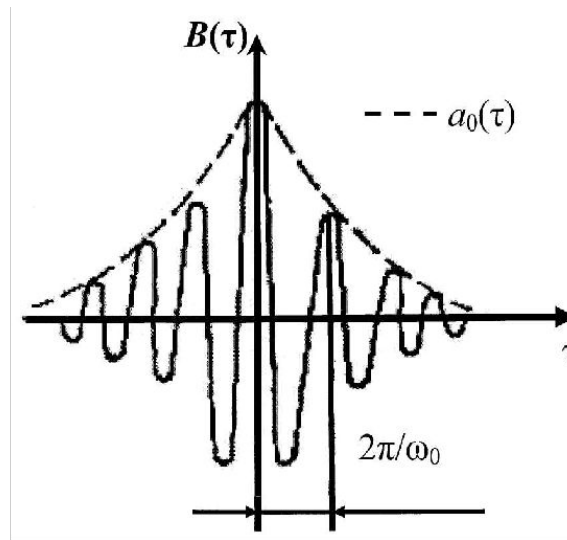
$$B_\varphi(\tau) = \frac{\pi}{2} R_0(\tau) + \frac{1}{4} R_0^2(\tau) + \frac{\pi}{12} R_0^3(\tau) + \dots$$

При $\tau = 0$ ряд сходится к $\pi^3/3$, т.е. дисперсия фазы $\sigma_\varphi^2 = \pi^3/3$.

Функция корреляции узкополосного СП равна

$B(\tau) = \sigma_x^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau$, $\rho(\tau) = a_0(\tau) / \sigma_x^2$ – нормированная огибающая, $a_0(\tau)$ – огибающая, медленно изменяющаяся по сравнению с $\cos \omega_0 t$.

Интервал корреляции узкополосного СП $\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} \frac{a_0(\tau) d\tau}{B(0)}$.



ФК узкополосного СП

Вид ФК свидетельствует о том, что отдельные реализации узкополосного СП представляют собой квазигармонические колебания, у которых огибающая $A(t)$ и фаза $\varphi(t)$ являются СФ, медленно изменяющимися во времени.

Пространства сигналов. Геометрическая трактовка процесса передачи сообщений в ТКС

Вся совокупность встречающихся сигналов L разбита на ряд множеств, объединённых каким-либо одним общим и единственным свойством P : $L_P = \{s; P\}$ – множество всех сигналов s , для которых справедливо свойство P . Определив P , определяем множество сигналов.

Множество гармонических сигналов $L = \{s; s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), -\infty < t < \infty\}$ содержит гармонические сигналы с произвольными значениями амплитуд A , частот ω и фаз φ .

Множества сигналов могут образовываться из других, ранее определённых множеств, логическими операциями объединения (индекс \cup) и пересечения (индекс \cap):

$$L = S_1 \cup S_2 = \{s; s \in S_1 \text{ или } s \in S_2\},$$

$$L = S_1 \cap S_2 = \{s; s \in S_1 \text{ и } s \in S_2\}.$$

Для сигналов одного и того же множества (элементов) указываются признак или признаки, отличающие их друг от друга. Наиболее подходящим признаком, отличающим два элемента множества x и y , является расстояние $d(x, y)$ между ними в некоторой системе координат.

Множество с определённым расстоянием называется *пространством*.

Если установлено правило для вычисления $d(x, y)$, то пространство называется *метрическим*, а само правило – *метрикой*.

Расстояние обладает следующими аксиоматическими признаками:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \quad \text{при } x = y;$$

$$d(x, y) = d(y, x);$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ – неравенство треугольника,}$$

x, y и z – элементы пространства.

Так как сигналы x и y представляют собой функции, то $d(x, y)$ – это функционал.

В метрическом пространстве сигналы можно представить в виде векторов, соединяющих начало координат с элементом (точкой) пространства. Каждому элементу x, y, z, \dots соответствует набор вещественных или комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ и т. д., являющихся проекцией вектора на координатные оси. Различные взаимосвязи между элементами пространства могут быть определены с помощью операций векторной алгебры. Эти операции линейны, следовательно векторное пространство ~~линейное~~. Множество сигналов L образует **линейное пространство** сигналов, если для него справедливы следующие аксиомы:

1) существует нулевой элемент \emptyset , что для всех $x(t) \in L$ выполняется равенство $x(t) + \emptyset = x(t)$;

2) для $x(t) \in L$ и $y(t) \in L$ существует $s(t) = x(t) + y(t)$, $s(t) \in L$. При этом операция суммирования должна быть:

– коммутативна: $x(t) + y(t) = y(t) + x(t)$;

– ассоциативна: $x(t) + [y(t) + z(t)] = [x(t) + y(t)] + z(t)$;

– однородна: $x(t) + [-x(t)] = \emptyset$.

3) существует множество скалярных элементов α , для которых $y(t) = \alpha x(t)$ – новый сигнал, $x(t) \in L$, $y(t) \in L$. Операция умножения должна быть:

- ассоциативна: $\alpha[\beta \cdot x(t)] = \alpha \beta \cdot x(t)$;
- дистрибутивна: $\alpha[x(t) + y(t)] = \alpha x(t) + \alpha y(t)$,
- пропорциональна: $\frac{(\alpha + \beta)x(t)}{1 \cdot x(t)} = \frac{\alpha x(t) + \beta x(t)}{x(t)}$, $\frac{0 \cdot x(t)}{0 \cdot x(t)} = \underline{\quad}$;

0. В зависимости от значений скаляров α, β, λ , линейные пространства могут быть вещественными или комплексными.

В векторном пространстве длина вектора называется его **нормой** $\|x\|$, а само пространство – **нормированным**. **Свойства нормы:**

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0; \|x\| = 0 \text{ только при } x(t) = 0; \\ \|kx\| &= |k| \cdot \|x\|, \text{ где } k \text{ любое число;} \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \text{ при } x(t) \in L \text{ и } y(t) \in L. \end{aligned}$$

Квадрат нормы носит название **энергии сигнала**: $E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$.

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Степень связи (сходства) по форме и положению сигналов $x(t)$ и $y(t)$ в пространстве сигналов отражается их скалярным произведением:

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi, \quad (3)$$

φ – угол между двумя векторами.

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

При $\varphi = 0$ ($\cos \varphi = 1$) сигналы совпадают по направлению и расстояние между ними минимальное. При $\varphi = \pi/2$ ($\cos \pi/2 = 0$) сигналы перпендикулярны друг другу, т. е. ортогональны, и проекции сигналов друг на друга равны нулю. При $\varphi = \pi$ ($\cos \pi = -1$) сигналы противоположны по направлению и расстояние между ними максимально.

Фактор расстояния между сигналами играет существенную роль при их различении в демодуляторах и селекции в многоканальных системах.

Линейное пространство дискретных и цифровых сигналов со скалярным произведением (3) называется **евклидовым пространством**. Совокупность n линейно независимых векторов образует **n -мерное евклидово пространство R_n** . Любой вектор \underline{x} , относящийся к R_n , определяется совокупностью его координат $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Пространство R_n можно определить как множество точек, представленных концами векторов, норма которых равна

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}.$$

Расстояние между двумя векторами как норма разности векторов

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2}.$$

При $n \rightarrow \infty$ пространство R_n переходит в бесконечномерное **пространство Гильберта** L_2 , в частности, пространство всех непрерывных комплексных функций аргумента t , заданных на интервале $(-T/2; T/2)$, в котором скалярное произведение и квадрат нормы определяются выражениями:

$$(x, y) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y^*(t) dt, \quad \|x\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

Если элементы этого пространства $L_2(T)$ – вещественные сигналы $s(t)$, определённые на интервале $(-T/2; T/2)$, то выполняется условие

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt \leq \infty.$$

При $T \rightarrow \infty$ получаем пространство $L_2(\infty)$. Если для сигналов этого пространства последнее условие не выполняется, но выполняется условие

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt < \infty,$$

то вводится скалярное произведение с размерностью мощности

$$(u, i)_P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) i^*(t) dt \quad \text{и} \quad \|s\|_P^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt.$$

Квадрат расстояния между двумя векторами в вещественном пространстве $L_2(T)$ определяется соотношениями:

$$d^2(x, y) = \|x - y\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t) - y(t)]^2 dt.$$

Пространство L_2 представляет собой естественное обобщение пространства R_n , получаемое путём перехода от дискретизированной функции к функции непрерывного аргумента.

Пространство L_2 имеет особое значение, т. к. оно позволяет применить общие геометрические представления к сообщениям, сигналам и помехам, определённым как функции непрерывного аргумента.

Пространство Хэмминга. Функция $x(t)$, принимающая на каждом интервале $i\Delta t$ одно из m возможных значений $x_i^{(k)}$ ($k = \overline{0, m-1}$) на отрезке длительностью T полностью определена $n = T/\Delta t$ значениями $x_i^{(k)}$ или совокупностью коэффициентов $\{x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}\}$ ($k, l, v \in \overline{0, m-1}$), называемый **n -набором**. При $m=2$ коэффициенты $x_i^{(k)}$ принимают значения 0 или 1, n -набор представляет собой просто кодовую комбинацию n -значного двоичного кода, отображающую символ передаваемого сообщения.

Двоичные n -наборы отображаются векторами (точками) в **пространстве Хэмминга** 2_n .

Скалярное произведение в этом пространстве задаётся функцией:

$$(\overset{\square}{x}, \overset{\square}{y}) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k \right]^2.$$

Норма двоичного вектора (*вес кодовой комбинации* w) определяется количеством содержащихся в нём единиц

$$\|\overset{\square}{x}\| = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Расстояние в пространстве Хэмминга между двоичными векторами определяется по числу позиций в кодовой комбинации, в которых векторы имеют различные символы

$$d(\overset{\square}{x}, \overset{\square}{y}) = \|\overset{\square}{x} - \overset{\square}{y}\| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k - y_k| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k \oplus y_k|.$$