



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО Е ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1. Пусть материальная точка M движется прямолинейно, ее положение определяется расстоянием S , отсчитываемым от некоторой начальной точки O .



Пусть движение точки описывается функцией $S(t)$, которая при каждом значении времени t определяет пройденное точкой расстояние $S = S(t)$. Требуется определить скорость v точки в момент времени t .

Решение. Пусть в момент времени t точка занимает положение M . Для определения скорости v придадим t приращение Δt .

Тогда пройденный путь получит приращение $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, и точка займет новое положение M_1 .

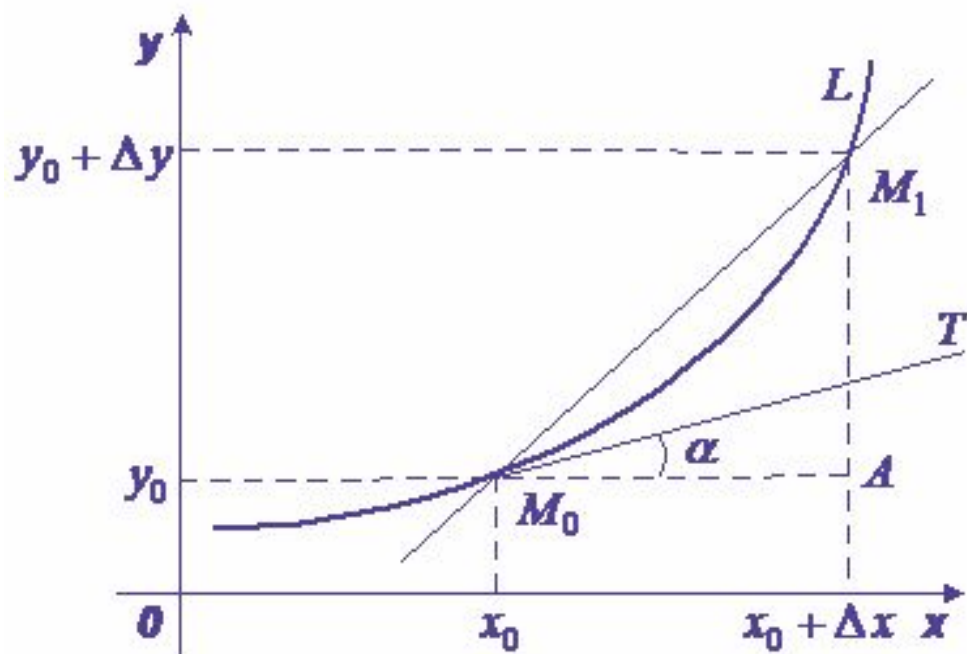
Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ определяет среднюю скорость движения точки за промежуток Δt .

Однако средняя скорость не может полностью охарактеризовать скорость движения точки в момент времени.

Наиболее полно характеризует скорость движения точки в момент времени предел к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \rightarrow 0$. Т.о. скорость точки в момент времени t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} .$$

Задача 2. Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$, график которой представляет собой кривую L . Требуется найти угловой коэффициент касательной проведенной к графику функции.



Решение.

К кривой L в точке M_0 построим касательную M_0T и секущую M_0M_1

Если точку M_1 перемещать по кривой L , то секущая будет вращаться вокруг точки M_0 .

Касательной к кривой L в точке M_0 называется предельное положение M_0T секущей, когда точка M_1 стремится по кривой к точке M_0 .

Найдем угловой коэффициент касательной M_0T , т.е. число $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между касательной M_0T и положительным направлением оси Ox .

Из прямоугольного треугольника ΔM_0AM_1 имеем: $\operatorname{tg} \angle M_1M_0A = \frac{AM_1}{AM_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Для получения углового коэффициента k перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

§2. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , придадим x_0 произвольное приращение $\Delta x = x - x_0$, тогда функция также получит приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, если он существует.

Обозначение. $f'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$ - производная функции $f(x)$ в точке x_0

Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то говорят, что она **дифференцируема** в этой точке. Вычисление производной функции называют ее дифференцированием.


Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Геометрический смысл производной. Из 2-ой задачи параграфа 1 имеем:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Механический смысл производной. Из 1-ой задачи параграфа 1 имеем:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$



§3. Производные элементарных функций.

Основные правила вычисления производных

Пусть C – постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

$$\blacklozenge (C f(x))' = C f'(x),$$

$$\blacklozenge (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$\blacklozenge (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$\blacklozenge \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

$$\circ g(x) \neq 0.$$

1. $C' = 0$ ($C = const$)	2. $x' = 1$	3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \in R$)	5. $(a^x)' = a^x \ln a$	6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$	8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	9. $(x^x)' = x^x (1 + \ln x)$
10. $(\sin x)' = \cos x$	11. $(\cos x)' = -\sin x$	12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	18. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
19. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	20. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	21. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

§4. Производная сложной, параметрической

Теорема 1. (производная сложной функции).

Пусть дана сложная функция $z = G(f(x))$, причем функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $G(y)$ – в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $z = G(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место равенство $(G(f(x_0)))' = G'(y_0)f'(x_0)$.

Параметрическое задание функции

Рассмотрим две функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, где t изменяется на некотором промежутке T .

Для любого значения параметра t существует точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ в плоскости XOY .

Определение. Совокупность точек $M(\varphi(t), \psi(t))$ плоскости XOY , отвечающих всем значениям параметра $t \in T$ называется **кривой заданной параметрически.**

Теорема (производная функции, заданной параметрически).

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы при некотором $t = t_0$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ и имеет место равенство

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Уравнения некоторых типов кривых в параметрической форме

1. Окружность

Если центр окружности находится в начале координат, то координаты любой ее точки могут быть найдены по формулам $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 360^\circ$

Если исключить параметр t , то получим каноническое уравнение окружности

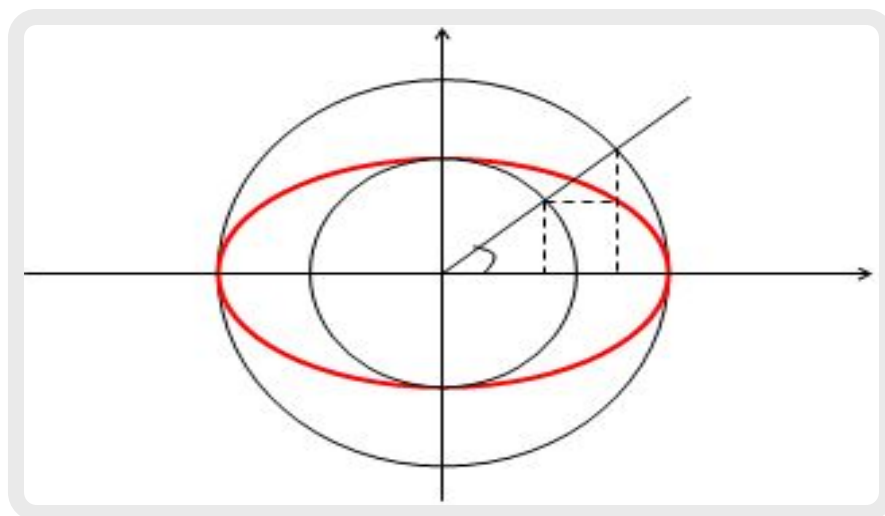
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$$

2. Эллипс

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \text{ где } 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

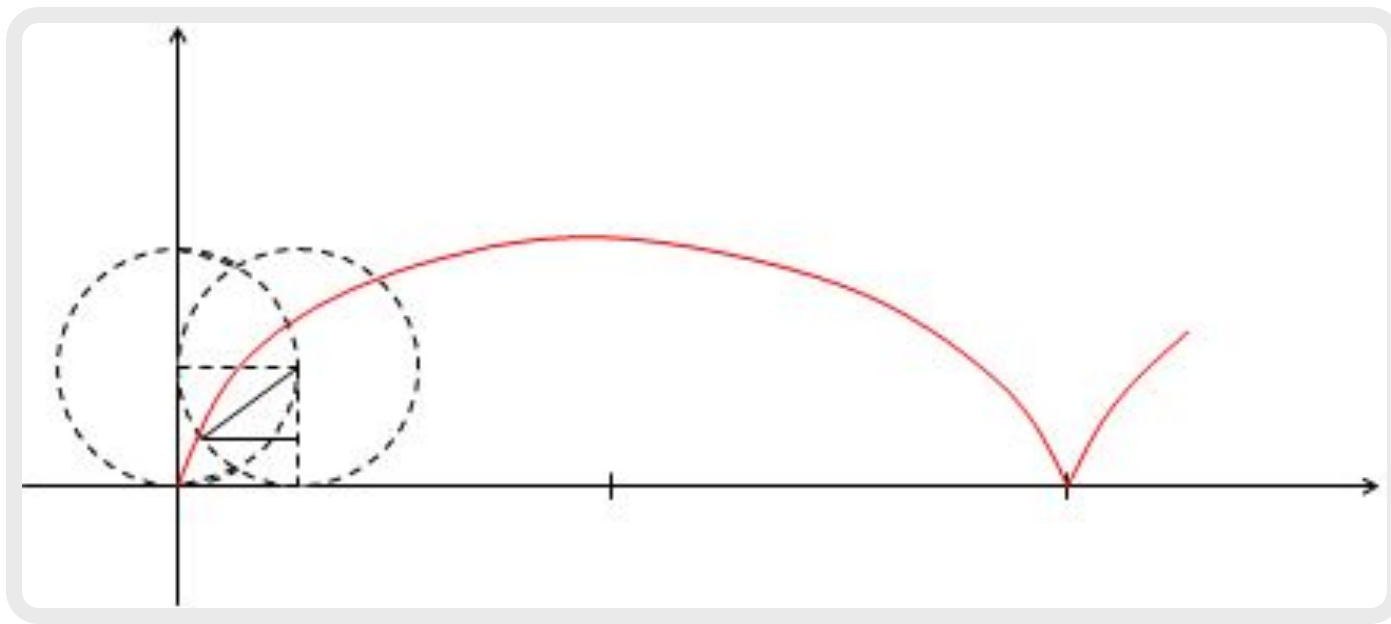


3. Циклоида

Циклоидой называется кривая, которую описывает некоторая точка, лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

Параметрическое уравнение циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

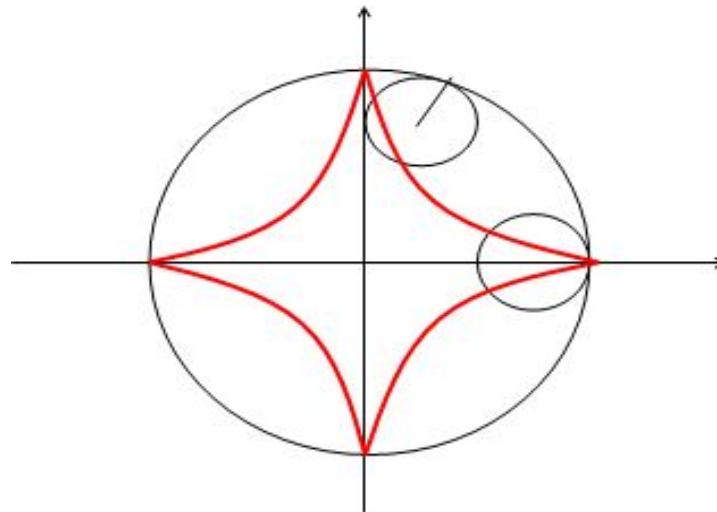


4. Астроида

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса $R/4$, вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R .

Параметрические уравнения астроида:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



§5. Производная показательно-степенной функции

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием.

Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет **показательно – степенной**.

Пусть $U = f(x)$ и $V = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x , $f(x) > 0$.

Найдем производную функции $y = U^V$.

Логарифмируя, получим:

$$\ln y = V \ln U$$

$$\frac{y'}{y} = V \ln u + v \frac{u'}{u},$$

$$y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + V \ln u \right),$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v V \ln u.$$

§ 7. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x некоторого множества D . Тогда ее производную $f'(x)$ можно рассматривать как новую функцию, определенную на множестве D .

В свою очередь функция $f'(x)$ может в некоторых точках множества D также иметь производную.

Определение. Производная от производной первого порядка $((f'(x))')$ называется **производной второго порядка** (второй производной).

Обозначение: y' , $f''(x)$, $y^{(2)}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го, и т.д. порядков.

§ 8. Уравнение касательной и нормали к графику дифференцируемой функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на множестве X и в каждой точке этого множества имеет производную. Некоторая кривая l – ее график. $M_0(x_0; y_0) \in l$.

Для того чтобы кривая l в точке $M_0(x_0; y_0)$ имела касательную необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ в точке x_0 имела производную $f'(x_0)$.

Как известно из курса аналитической геометрии уравнение прямой, проходящей через заданную точку с данным угловым коэффициентом имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$.

Как известно из параграфа 1 $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Тогда **уравнение касательной** примет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется **нормалью** к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Как известно из курса аналитической геометрии условие перпендикулярности двух прямых на плоскости имеет вид: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Тогда

$$k_{\text{кас.}} \cdot k_{\text{норм.}} = -1 \Rightarrow k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следовательно, **уравнение нормали** имеет вид:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$