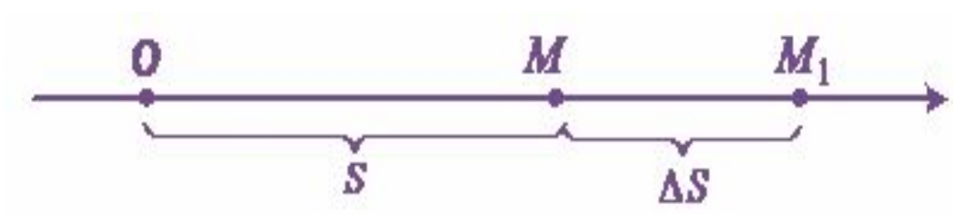
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1. Пусть материальная точка M движется прямолинейно, ее положение определяется расстоянием S, отсчитываемым от некоторой начальной точки O.



Пусть движение точки описывается функцией $S(t)$, которая при каждом значении времени t определяет пройденное точкой расстояние $S = S(t)$. Требуется определить скорость v точки в момент времени t.

Решение. Пусть в момент времени t точка занимает положение M. Для определения скорости v придадим t приращение Δt.

Тогда пройденный путь получит приращение $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, и точка займет новое положение M_1.

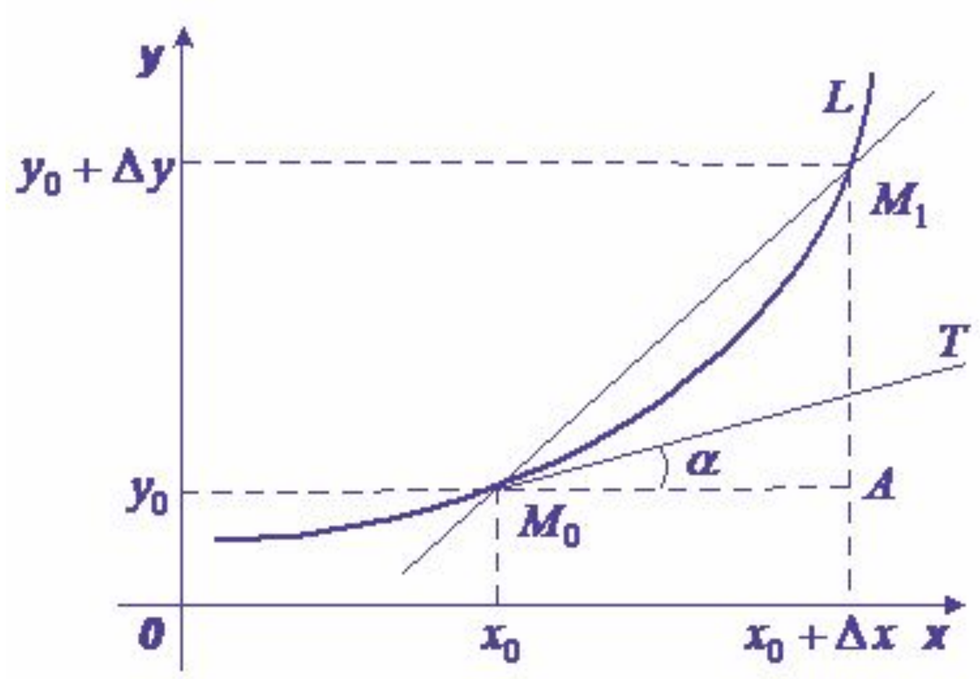
Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ определяет среднюю скорость движения точки за промежуток Δt.

Однако средняя скорость не может полно охарактеризовать скорость движения точки в момент времени.

Наиболее полно характеризует скорость движения точки в момент времени предел к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$. Т.о. скорость точки в момент времени t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Задача 2. Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$, график которой представляет собой кривую L. Требуется найти угловой коэффициент касательной проведенной к графику функции.



Решение.

К кривой L в точке M_0 построим касательную M_0T и секущую M_0M_1

Если точку M_1 перемещать по кривой L, то секущая будет вращаться вокруг точки M_0.

Касательной к кривой L в точке M_0 называется предельное положение M_0T секущей, когда точка M_1 стремится по кривой к точке M_0.

Найдем угловой коэффициент касательной M_0T, т.е. число $k = tg\,\alpha$, где α – угол между касательной M_0T и положительным направлением оси Ox.

Из прямоугольного треугольника ΔM_0AM_1 имеем: $tg\angle M_1M_0A = \dfrac{AM_1}{AM_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Для получения углового коэффициента k перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$k = tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

§2. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, придадим x_0 произвольное приращение $\Delta x = x - x_0$, тогда функция также получит приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, если он существует.

Обозначение. $f'(x_0)$ или $\frac{d f(x_0)}{dx}$ - производная функции $f(x)$ в точке x_0

Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то говорят, что она **дифференцируема** в этой точке. Вычисление производной функции называют ее дифференцированием.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Геометрический смысл производной. Из 2-ой задачи параграфа 1 имеем:

$$k = tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Механический смысл производной. Из 1-ой задачи параграфа 1 имеем:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

§3. Производные элементарных функций.
Основные правила вычисления производных

Пусть C – постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда

- $(C f(x))' = C f'(x)$,
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$,
  - $g(x) \neq 0$.

1. $C' = 0 \ (C = const)$	2. $x' = 1$	3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $(x^n)' = nx^{n-1} \ (n \in R)$	5. $(a^x)' = a^x \ln a$	6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$	8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	9. $\left(x^x\right)' = x^x(1+\ln x)$
10. $(\sin x)' = \cos x$	11. $(\cos x)' = -\sin x$	12. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	18. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
19. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	20. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	21. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

§4. Производная сложной, параметрической

Теорема 1. (производная сложной функции). Пусть дана сложная функция $z = G(f(x))$, причем функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $G(y)$ – в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $z = G(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место равенство $(G(f(x_0)))' = G'(y_0)f'(x_0)$.

Параметрическое задание функции

Рассмотрим две функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, где t изменяется на некотором промежутке T.

Для любого значения параметра t существует точка $M\left(\varphi(t),\psi(t)\right)$ в плоскости XOY.

Определение. Совокупность точек $M\left(\varphi(t),\psi(t)\right)$ плоскости XOY, отвечающих всем значениям параметра $t\in T$ называется **кривой заданной параметрически.**

Теорема (производная функции, заданной параметрически).

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы при некотором $t = t_0$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ и имеет место равенство

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Уравнения некоторых типов кривых в параметрической форме

1. Окружность

Если центр окружности находится в начале координат, то координаты любой ее точки могут быть найдены по формулам $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 360^0$

Если исключить параметр t, то получим каноническое уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = r^2$$

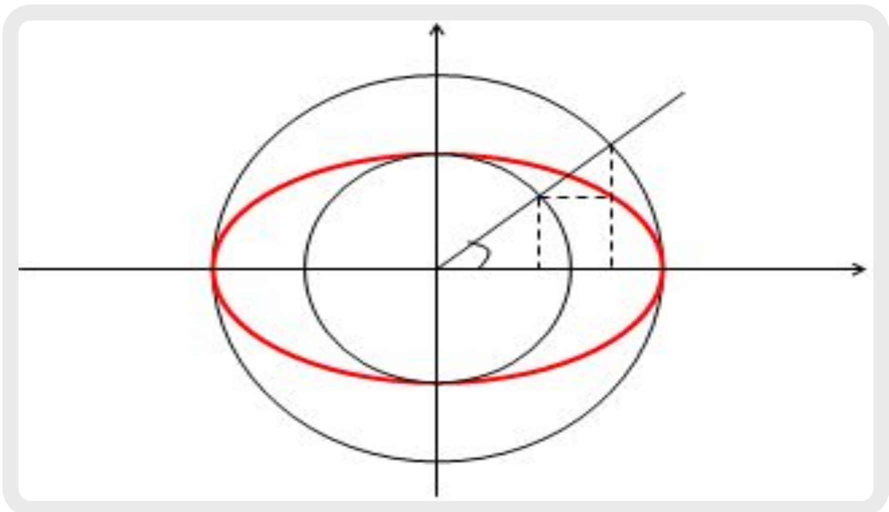
$$(cos^2 t + sin^2 t) = r^2$$

2. Эллипс

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\ \text{где}\ 0 \le t \le 2\pi$$

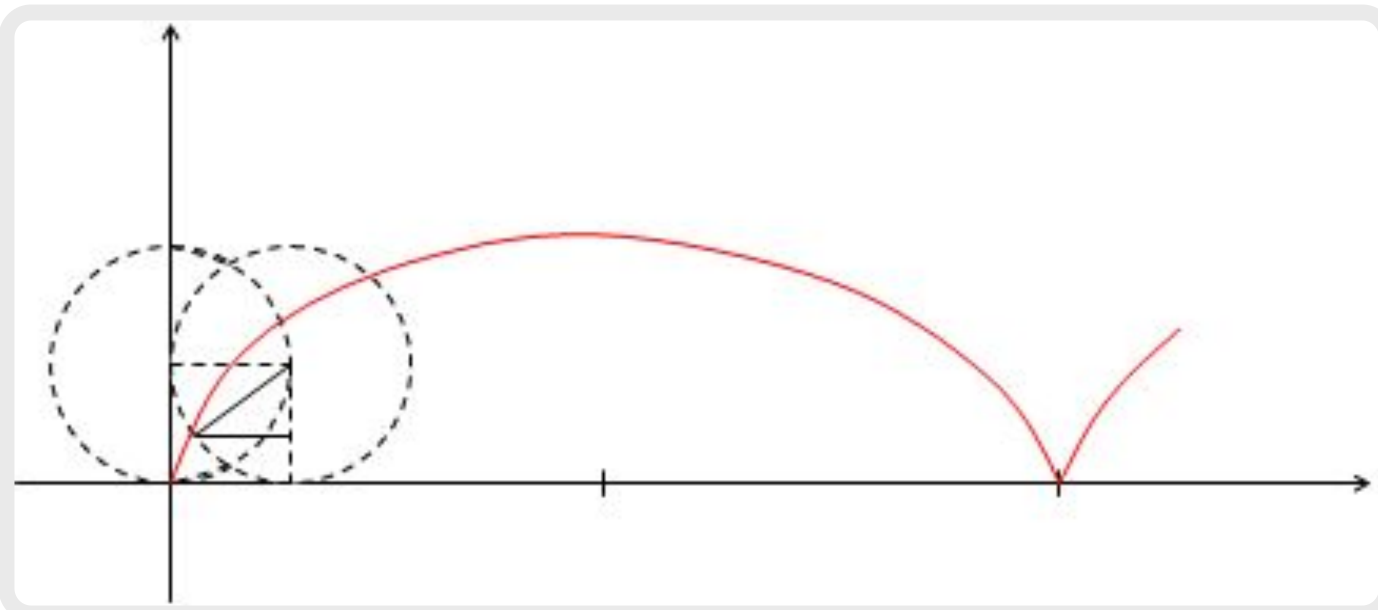


3. Циклоида

Циклоидой называется кривая, которую описывает некоторая точка, лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

Параметрическое уравнение циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \text{ при } 0 \le t \le 2\pi.$$

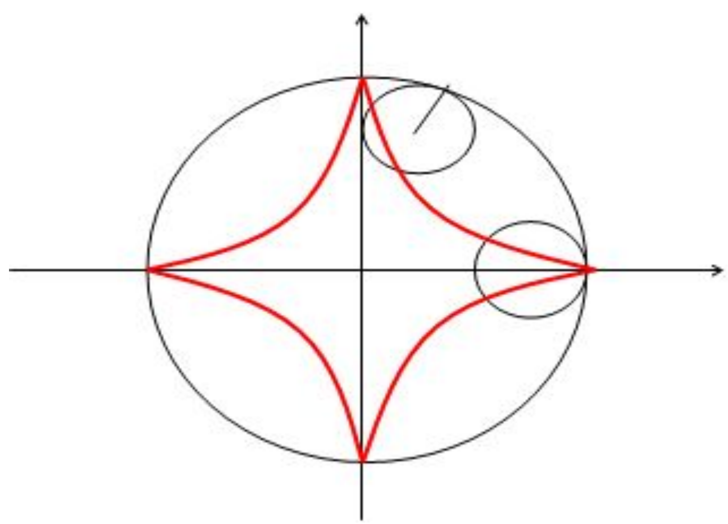


4. Астроида

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса $R/4$, вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R.

Параметрические уравнения астроиды:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



§5. Производная показательно- степенной функции

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием.

Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет **показательно – степенной**.

Пусть $U=f(x)$ и $V=g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x)>0$.

Найдем производную функции $y = U^V$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = V \ln U$$
,

$$\frac{y}{y} = v \ln u + v\frac{u'}{u},$$

$$y = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v \ln u\right),$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v \ln u.$$

§ 7. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f^{/}(x)$ в каждой точке x некоторого множества D. Тогда ее производную $f^{/}(x)$ можно рассматривать как новую функцию, определенную на множестве D.

В свою очередь функция $f^{/}(x)$ может в некоторых точках множества D также иметь производную.

Определение. Производная от производной первого порядка $((f^{/}(x))^{/}$ называется **производной второго порядка** (второй производной).

Обозначение: $y'', \quad f''(x), \quad y^{(2)}, \quad \dfrac{d^2 y}{dx^2}.$

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го, и т.д. порядков.

§ 8. Уравнение касательной и нормали к графику дифференцируемой функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на множестве X и в каждой точке этого множества имеет производную. Некоторая кривая l – ее график. $M_0(x_0; y_0) \in l$.

Для того чтобы кривая l в точке $M_0(x_0; y_0)$ имела касательную необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ в точке x_0 имела производную $f'(x_0)$.

Как известно из курса аналитической геометрии уравнение прямой, проходящей через заданную точку с данным угловым коэффициентом имеет вид $y = k\left(x - x_0\right) - y_0$.

Как известно из параграфа 1 $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Тогда **уравнение касательной** примет вид:

$$y = f^{|}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right).$$

Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется **нормалью** к графику функции $y=f(x)$ в этой точке. Как известно из курса аналитической геометрии условие перпендикулярности двух прямых на плоскости имеет вид: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Тогда

$$k_{кас.} \cdot k_{норм.} = -1 \Rightarrow k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{f^{|}\left(x_0\right)}.$$

Следовательно, **уравнение нормали** имеет вид:

$$y = -\frac{1}{f^{|}\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right).$$