

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Функция n переменных

Переменная u называется функцией n переменных (аргументов) x, y, z, \dots, t , если каждой системе значений x, y, z, \dots, t , из области их изменений (области определения), соответствует определенное значение u .

Областью определения функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных $z=f(x, y)$ область определения представляет некоторую совокупность **точек плоскости**, а для функции трех переменных $u=f(x, y, z)$ – некоторую совокупность **точек пространства**.

Функция двух переменных

Функцией двух переменных называется закон, по которому каждой паре значений независимых переменных x, y (аргументов) из **области определения** соответствует значение зависимой переменной z (функции).

Данную функцию обозначают следующим образом: $z = z(x, y)$ либо $z = f(x, y)$, или же другой стандартной буквой: $u = f(x, y)$, $u = u(x, y)$

Частные производные первого порядка

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

вычисленный при постоянной y

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по переменной y называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

вычисленный при постоянной x

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полный дифференциал

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Полный дифференциал функции *трех* аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Частные производные высших порядков

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}''(x, y);$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f_{xxx}'''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}'''(x, y) \text{ и т.д.}$$

Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от ее пологого

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Дифференциалы высших порядков вычисляются по формуле

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

Имеет место символическая формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и функции $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Дифференцирование неявных функций

Производные неявной функции двух переменных $z=f(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y,z)=0$, могут быть вычислены по формулам

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \quad \text{при условии } \frac{dF}{dz} \neq 0$$

Экстремум функции

Функции $z=f(x,y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0;y_0)$ если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x;y)$ некоторой окрестности точки M_0 .

Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е.

$$\frac{df(x_0, y_0)}{dx} = 0, \quad \frac{df(x_0, y_0)}{dy} = 0$$

(необходимые условия экстремума).

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ - стационарная точка функции $z=f(x, y)$. Обозначим

$$A = \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{dx^2}, \quad B = \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{dxdy}, \quad C = \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{dy^2}$$

И составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

Если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум $A > 0$ (или $C > 0$);

Если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет (**достаточные условия наличия или отсутствия экстремума**);

Если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Неопределённый интеграл

Первообразная функция

- Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$, если в каждой точке этого интервала $f(x)$ является производной для $F(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x)$$

- Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции $f(x)$ требуется найти функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Неопределённый интеграл

- Множество всех первообразных функции $F(x)+C$ для $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где C - произвольная постоянная;

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования;

\int - знак неопределенного интеграла.

Свойства неопределённого интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a \neq 0 - \text{постоянная}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывной функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ то и $\int f(u)du = F(u) + C$ где $u = \varphi(x)$ - произвольная функция, имеющая непрерывную производную

Таблица неопределённых

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \pi/2}{2} \right| + C$$

$$13. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C$$

$$17. \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C$$

$$18. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

- Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.

- При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$du = d(u + a), \quad a - \text{число},$$

$$du = \frac{1}{a} d(au), \quad a \neq 0 - \text{число},$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u du = d(\sin u),$$

$$\sin u du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tgu}).$$

Замена переменной в неопределённом интеграле (интегрирование подстановкой)

- Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

- Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную.

- Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем **формулу интегрирования подстановкой** $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям

- **Формула интегрирования по частям**

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

- Формула дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$ который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование рациональных дробей

- Рациональной дробью называется дробь вида $P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной.
- Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^m}, m \geq 2;$$

$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, p^2-4q < 0;$$

$$\text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}, m \geq 2, p^2-4q < 0.$$

где A, B, p, q, a – действительные числа.

Найдем интегралы от простейших дробей

$$I. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C;$$

$$II. \int \frac{A}{(x-a)^m} dx = \frac{A}{-m+1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C;$$

$$III. \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

$$III. \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

$$IV. \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^m} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m}$$

Первый интеграл простейшей дроби IV типа в правой части равенства легко находится с помощью подстановки $x^2+px+q=t$, а второй преобразуем так:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) \right]^m}$$

Полагая $x+p/2=t$, $dx=dt$ и обозначая $q-p^2/4=a^2$,

получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$$

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби

Перед интегрированием рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) Если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

где $M(x)$ -многочлен, а $P_1(x)/Q(x)$ – правильная рациональная дробь;

2) Разложить знаменатель дроби (на линейные и квадратичные множители):
 $Q(x) = (x - a)^m \dots (x^2 + px + q)^n \dots,$

где $p^2/4 - q < 0$, т.е. трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные сопряженные корни:

3) Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \dots$$
$$\dots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{x^2 + px + q} + \dots;$$

4) Вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, B_1, B_2, \dots, B_m, \dots, C_1, C_2, \dots, C_m, \dots$, для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомым коэффициентов.

Интегрирование простейших иррациональных функций

1. Интегралы вида

$$\int R(x, (ax + b)^{m_1/n_1}, (ax + b)^{m_2/n_2}, \dots) dx$$

где R – рациональная функция; $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$ – целые числа. С помощью подстановки $ax + b = t^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2, \dots , указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

2. Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Такие интегралы путем выделения квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам 15 или 16

3. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Для нахождения этого интеграла выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и разложим интеграл на сумму интегралов:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

4. Интегралы вида
$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

С помощью подстановки $x-a=1/t$ этот интеграл приводится к рассмотренному п.2

5. Интеграл вида
$$\int \frac{P_n(x)dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

где $P_n(x)$ – многочлен n -й степени. Интеграл такого вида находится с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$ -й степени с неопределенными коэффициентами, λ - число.

Дифференцируя указанное тождество и приводя результат к общему знаменателю, получим равенство двух многочленов, из которого можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ .

6. Интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

где m, n, p – рациональные числа.

Как доказал П.Л. Чебышев, интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

- 1) p – целое число, тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n .
- 2) $(m+1)/n$ – целое число, в этом случае данный интеграл рационализируется с помощью подстановки $a+bx^n=t^s$;
- 3) $(m+1)/n+p$ – целое число, в этом случае к той же цели ведет подстановка $ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби p .

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

где R – рациональная функция.

Под знаком интеграла находится рациональная функция от синуса и косинуса. В данном случае применима универсальная тригонометрическая подстановка $\operatorname{tg}(x/2)=t$, которая сводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции нового аргумента t (таблица п.1).

Существуют и другие подстановки, представленные в следующей таблице:

№	$f(x)$	Рационализирующая подстановка	Формулы
1	2	3	4
1	$R(\sin x, \cos x)$	Универсальная $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
2	$R(\sin^2 x; \sin x \cdot \cos x; \cos^2 x)$	$\operatorname{tg} x = t$	$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ $dx = \frac{dt}{1+t^2}$
3	$R(\operatorname{tg} x)$	$\operatorname{tg} x = t$	$x = \operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$

1	2	3	4
4	$R(\sin^m x; \cos^n x)$		
4.1	$\begin{cases} m = 2k < 0 \\ n = 2p < 0 \end{cases}$	$\operatorname{tg} x = t$	$x = \operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$
4.2	$\begin{cases} m = 2k > 0 \\ n = 2p > 0 \end{cases}$	Формулы понижения степени	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
4.3	$\begin{cases} m = 2k + 1 \\ n = 2k \end{cases}$	$\cos x = t$	$\sin^2 x = 1 - t^2$ $\sin x dx = dt$
4.4	$\begin{cases} n = 2k + 1 \\ m = 2k \end{cases}$	$\sin x = t$	$\cos^2 x = 1 - t^2$ $\cos x dx = dt$
5	$R(\sin x) \cos x$	$\sin x = t$	$\cos x dx = dt$
6	$\sin ax \cdot \cos bx$ $\sin ax \cdot \sin bx$ $\cos ax \cdot \cos bx$	Формулы преобразования произведения в сумму	$\sin ax \cdot \cos bx =$ $\frac{1}{2}(\sin(a+b)x +$ $\sin(a-b)x$

Определенный интеграл

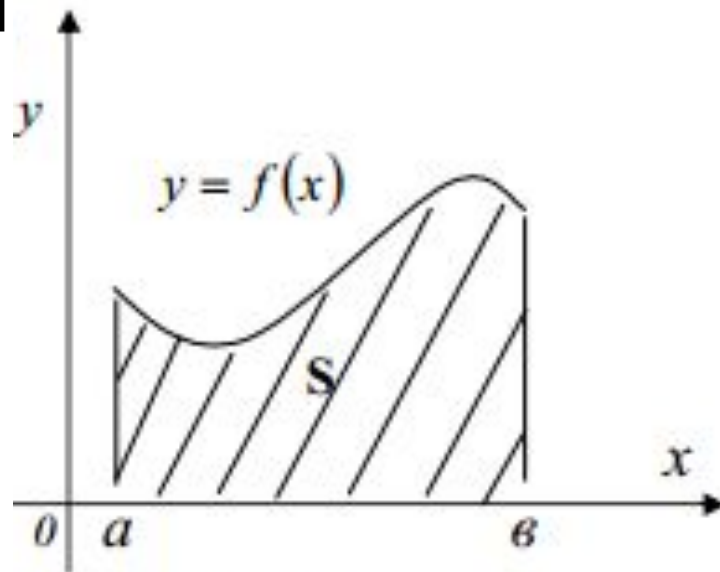
Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Теорема Коши. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл существует

Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции - фигуры, ограничен $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Свойства определенного

$$1. \int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$$4. \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

$$5. \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b$$

7. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \leq 0$ для всех точек

$x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

8. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

9. Если M - наибольшее, m - наименьшее значение $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

10. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a;b]$ (теорема о среднем)

$$11. \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$12. \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Правила вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, т.е. $F(x)' = f(x)$.

2. Интегрирование по частям:

$$\int_a^a u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^a v du$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a;b]$.

3. Замена переменной

$$\int_a^a f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$$

где $x=\varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функция непрерывна на $[\alpha; \beta]$

4. Если $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Если $f(x)$ – четная функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются:

- 1) интегралы с бесконечными пределами;
- 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности, - расходящимся

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a; b]$ и непрерывна при $a \leq x < c$ и $c < x \leq b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{c+\beta}^b f(x) dx$$

При исследовании сходимости несобственных интегралов пользуются одним из признаков сравнения.

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены для всех $x \geq a$ и интегрируемы на отрезке $[a; A]$, где $A \geq a$, и если $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ для

всех $x \geq a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$

2.1 Если при $x \rightarrow +\infty$ функция $f(x) \leq 0$ является бесконечно малой порядка $p > 0$ по сравнению с $1/x$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2.2 Если функция $f(x) \geq 0$ определена и непрерывна в промежутке $a \leq x < b$ и является бесконечно большой порядка p по сравнению с $\int_a^b f(x) dx$

$1/(b-x)$ при $x \rightarrow b-0$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится при $p < 1$ и

Вычисление площади плоской

фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ [$f(x)\geq 0$], прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a;b]$ оси OX вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ [$f_1(x)\leq f_2(x)$] и прямыми $x=a$ и $x=b$ находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$ оси OX вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнения $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ [$y(t)\geq 0$ при $t_1\leq t\leq t_2$]

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\theta)$ и двумя полярными радиусами $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ ($\alpha<\beta$), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ – гладкая (т.е. производная $y'=f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

При параметрическом задании кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ [$x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции] длина дуги кривой, соответствующая, монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2 , вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\theta)$, $\alpha\leq\theta\leq\beta$, то длина дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

Вычисление объема тела

1. **Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений.** Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX , может быть выражена как функция от x , т.е. в виде $S=S(x)$ ($a \leq x \leq b$), объем части тела, заключенный между перпендикулярными оси OX плоскостями $x=a$ и $x=b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. **Вычисление объема тела вращения.** Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$, вращается вокруг оси OX , то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ [$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$] и прямыми $x=a$, $x=b$, вращается вокруг оси OX , то объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга гладкой кривая $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) вращается вокруг оси OX , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия

- **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.
- Если независимая переменная одна, то уравнение называется **обыкновенным**, если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**.

Уравнение первого порядка

Функциональное уравнение $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$, связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**.

Решением уравнения первого порядка называется всякая функция $y = \phi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместе со своей производной $y' = \phi'(x)$, обращает его в тождество относительно x .

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка

- Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \phi(x, C)$, которая при любом значении параметра C является решением этого дифференциального уравнения. Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Уравнение, разрешенное относительно производной

Если уравнение 1-го порядка разрешить относительно производной, то оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x, y)$$

Его общее решение геометрически представляет собой семейство интегральных кривых, т. е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной C .

Постановка задачи Коши

Задача отыскания решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$ называется задачей Коши для уравнения 1-го порядка.

Геометрически это означает: найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, проходящую $M_0(x_0, y_0)$ через данную точку.

.

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$f(x)dx = g(y)dy$$

называется уравнением с разделенными переменными.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно имеет вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Для решения уравнения делят обе его части на произведение функций $N_1(y)M_2(x)$, а затем интегрируют.

Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду $f\left(\frac{y}{x}\right)$ или к виду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одного порядка .

Линейные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно содержит y и y' в первой степени, т.е. имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)$

Решают такое уравнение с помощью подстановки $y=uv$, где u и v -вспомогательные неизвестные функции, которые находят, подставляя в уравнение вспомогательные функции и на одну из функций налагают определенные условия.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение 1-го порядка, имеющее вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$

Его, как и линейное уравнение решают с помощью подстановки

$$y = UV$$

Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Уравнение 2-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Или $y'' = f(x, y, y')$

Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, которая при любых значениях параметров c_1, c_2 является решением этого уравнения.

Задача Коши для уравнения 2-го порядка

Если уравнение 2-го порядка разрешить относительно второй производной, то для такого уравнения имеет место задача: найти решение уравнения $f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y'(x_0) = y'_0$$

Эту задачу называют *задачей Коши* для дифференциального уравнения 2-го порядка.

Теорема существования и единственности решения уравнения 2-го

Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные по аргументам y и y' непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0, y'_0) , то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y'(x_0) = y'_0.$$

Уравнения 2-го порядка,
допускающие понижение порядка

Простейшее уравнение 2-го порядка

$y'' = f(x)$ решают двукратным
интегрированием.

Уравнение $F(x, y', y'') = 0$ не
содержащее явно y , решают с помощью

подстановки $y' = p$

$$F(p, y', y'') = 0$$

Уравнение не содержащее

x , решают заменой $y' = p$ $\frac{dp}{dy} \cdot p$

Линейные однородные уравнения

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Если все коэффициенты этого уравнения постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами .

Свойства решений линейного однородного уравнения

Теорема 1. Если $y(x)$ является решением уравнения, то и $Cy(x)$, где C -константа, также является решением этого уравнения.

Свойства решений линейного однородного уравнения

Теорема 2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ -
решения уравнения, то и их сумма
также является решением этого
уравнения.

Следствие. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ -
решения уравнения, то функция
 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

-также решение этого уравнения.

Линейно зависимые и линейно независимые функции

Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно зависимыми** на некотором промежутке, если можно подобрать такие числа β и α , не равные нулю одновременно, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю на этом промежутке, т. е.

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$$

Если таких чисел подобрать нельзя, то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на указанном промежутке.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут линейно зависимыми тогда и только тогда, когда их отношение постоянно, т. е.

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$$

Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения 2-

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ -линейно
независимые частные решения ЛОУ 2-го
порядка, то их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

где C_1 и C_2 -произвольные постоянные,
является общим решением этого
уравнения.

Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется *характеристическим уравнением* линейного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Оно получается из ЛОУ заменой соответствующей порядку производной степенью k .