Лекция 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, называется дифференциальным уравнением (сокращенно ДУ).

Порядком дифференциального уравнения (15.1) называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция зависит от одного переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, в противном случае ДУ в *частных производных*.

Определение 3. *Решением* или *интегралом* дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)

1. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y). \tag{1'}$$

В этом случае мы говорим, что дифференциальное уравнение разрешено относительно производной. Для такого уравнения справедлива следующая теорема, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \phi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Теорема. *Если в уравнении*

$$y' = f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *по* y *непрерывны в некоторой области* D *на плоскости* Oxy, *содержащей некоторую точку* $(x_0; y_0)$, *то существует единственное решение этого уравнения*

$$y = \varphi(x),$$

удовлетворяющее условию $y = y_0$ *при* $x = x_0$.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y=\varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0; y_0)$.

Из только что высказанной теоремы вытекает, что уравнение (1′) имеет бесконечное число различных решений (например, решение, график которого проходит через точку $(x_0; y_0)$; другое решение, график которого проходит через точку $(x_0; y_1)$ и т. д., если только эти точки лежат в области D).

Условие, что при $x=x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*. Оно часто записывается в виде

$$y|_{x=x_0}=y_0.$$

О п р е д е л е н и е 1. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

которая зависит от одной произвольной постоянной C и удовлетворяет следующим условиям:

а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянной C;

б) каково бы ни было начальное условие $y = y_0$ при $x = x_0$, т. е. $y|_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию. При этом предполагается, что значения x_0 и y_0 принадлежат к той области изменения переменных x и y, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения.

2. В процессе разыскания общего решения дифференциального уравнения мы нередко приходим к соотношению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2'}$$

не разрешенному относительно y. Разрешив это соотношение относительно y, получаем общее решение. Однако выразить y из соотношения (2') в элементарных функциях не всегда оказывается возможным; в таких случаях общее решение оставляется в неявном виде. Равенство вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Определение 2. *Частным решением* называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем произвольной постоянной C придать определенное значение $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае *частным интегралом* уравнения.

Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \tag{1}$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от y. Преобразуем его следующим образом (предполагая, что $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x)\, dx. \tag{1'}$$

Считая y известной функцией от x, равенство (1′) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным слагаемым. Интегрируя левую часть по y, а правую по x, найдем

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)\, dx + C. \tag{1''}$$

Мы получили соотношение, связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т. е. получили общий интеграл уравнения (1).

1. Дифференциальное уравнение типа (1′)

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

называют уравнением с *разделенными переменными*. Общий интеграл его по доказанному есть

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

2. Уравнение вида

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

НАЗЫВАЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

- Оно может быть приведено к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выажение N1(y)*M2(x):

$$\frac{M_1(x)\,N_1(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dx+\frac{M_2(x)\,N_2(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dy=0,$$

или

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=0,$$

т. е. к уравнению вида (2).

Однородные уравнения первого порядка

Определение 1. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией n-го измерения* относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Определение 2. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y) \tag{1}$$

называется *однородным* относительно x и y, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y.

Решение однородного уравнения.

Решение однородного уравнения. По условию $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Положив в этом тождестве $\lambda = 1/x$, получим

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Сделаем подстановку

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т. е. } y = ux.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Подставляя это выражение производной в уравнение (1′), получим

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u).$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{du}{dx}=f(1,\ u)-u, \quad \text{или} \quad \frac{du}{f(1,\ u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, найдем

$$\int\frac{du}{f(1,\ u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

Подставляя после интегрирования вместо u отношение y/x, получим интеграл уравнения (1′).

Линейные уравнения первого порядка

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x), \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные непрерывные функции от x (или постоянные).

Решение линейного уравнения (1). Будем искать решение уравнения (1) в виде произведения двух функций от x:

$$y = u(x)\,v(x). \tag{2}$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определится на основании уравнения (1).

Дифференцируя обе части равенства (2), находим

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Подставляя полученное выражение производной $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), будем иметь

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v + Puv = Q,$$

или

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q. \tag{3}$$

Выберем функцию v такой, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \tag{4}$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции v, находим

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$-\ln|C_1| + \ln|v| = -\int P\,dx,$$

или

$$v = C_1 e^{-\int P\,dx}.$$

Так как нам достаточно какого-нибудь отличного от нуля решения уравнения (4), то за функцию $v(x)$ возьмем

$$v(x) = e^{-\int P\,dx}, \tag{5}$$

где $\int P\,dx$ — какая-нибудь первообразная. Очевидно, что $v(x) \neq 0$.

Подставляя найденное значение $v(x)$ в уравнение (3), получим $\left(\text{учитывая, что } \frac{dv}{dx} + Pv = 0\right)$

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x),$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

откуда

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Подставляя u и v в формулу (2), окончательно получаем

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C\right],$$

или

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + Cv(x). \qquad (6)$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}\,y = (x+1)^3.$$

Решение. Полагаем $y = uv$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\,v.$$

Подставляя выражение $\frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение, будем иметь

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-\frac{2}{x+1}uv=(x+1)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}v\right)+v\frac{du}{dx}=(x+1)^3. \qquad (7)$$

Для определения v получим уравнение $\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}v=0$, т. е. $\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1}$, откуда $\ln|v|=2\ln|x+1|$, или $v=(x+1)^2$. Подставляя выражение функции v в уравнение (7), получаем для определения u уравнение $(x+1)^2\frac{du}{dx}=(x+1)^3$, или $\frac{du}{dx}=x+1$, откуда $u=\frac{(x+1)^2}{2}+C$.

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения будет иметь вид

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2.$$

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (2)$$

причем $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах. Докажем, что если левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал, то выполняется условие (2), и обратно — при выполнении условия (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$du(x, y) = 0, \tag{3}$$

и, следовательно, его общий интеграл есть $u(x, y) = C$.

Предположим сначала, что левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy;$$

тогда

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Дифференцируя первое соотношение по y, а второе — по x, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, будем иметь

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

т. е. равенство (2) является **необходимым** условием для того, чтобы левая часть уравнения (1) была полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Покажем, что это условие является и **достаточным**, т. е. что при выполнении равенства (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ находим $u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y)$, где x_0 — абсцисса любой точки из области существования решения.

При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от y. Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (4). Для этого продифференцируем *) обе части последнего равенства по y и результат приравняем $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

но так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то можем написать $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N$, т. е. $N(x, y)\big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y)$, или

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Следовательно,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

или

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C_1.$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ будет иметь вид

$$u = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C_1.$$

Здесь $P(x_0; y_0)$ — точка, в окрестности которой существует решение дифференциального уравнения (1).

Приравнивая это выражение произвольной постоянной C, получим общий интеграл уравнения (1):

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \qquad (5)$$