ДИСПЕРСИЯ

Определения

Пусть случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M(\xi)$.

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right) \qquad (1)$$

Из (1)

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 \qquad (2)$$

Пусть ξ - дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$ и вероятностями этих значений $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i \qquad (3)$$

Пусть ξ - непрерывная случайная величина, плотность вероятностей которой $f(x)$. Тогда

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f(x) dx \qquad (4)$$

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$

Определение. Дисперсией случайной величины $\xi = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$ называется матрица $D = \left(D_{ij}\right)$, где

$$D_{ij} = M\left[\left(\xi_i - M\left(\xi_i\right)\right)\left(\xi_j - M\left(\xi_j\right)\right)\right] = \operatorname{cov}\left(\xi_i, \xi_j\right) = D_{ji}$$

$$D_{ii} = M\left[\left(\xi_i - M\left(\xi_i\right)\right)\left(\xi_i - M\left(\xi_i\right)\right)\right] = D\left(\xi_i\right)$$

$\operatorname{cov}\left(\xi_i, \xi_j\right)$ **- ковариация** случайных величин ξ_i, ξ_j

Свойства дисперсии

1. $D(C)=0$, $C = const.$
2. $D(C\xi)=C^2 D(\xi)$
3. $D(\xi_1+\xi_2)=D(\xi_1)+D(\xi_2)+2\operatorname{cov}(\xi_1\xi_2)$, где

$$\operatorname{cov}(\xi_1\xi_2)=M\Big(\big(\xi_1-M(\xi_1)\big)\big(\xi_2-M(\xi_2)\big)\Big)$$

Действительно

$$D(\xi_1+\xi_2)=M\left((\xi_1+\xi_2-M(\xi_1+\xi_2))^2\right)=M\left(\left(\xi_1-M(\xi_1)\right)^2\right)+M\left(\left(\xi_2-M(\xi_2)\right)^2\right)+$$

$$+2M\Big(\big(\xi_1-M(\xi_1)\big)\big(\xi_2-M(\xi_2)\big)\Big) = D(\xi_1)+D(\xi_2)+2\operatorname{cov}(\xi_1\xi_2).$$

Следствие.

а) Пусть $\xi_{1,}\xi_2$ независимы, тогда

$$D(\xi_1 \pm \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$$

б) Пусть $C = const.$

$$D(\xi \pm C) = D(\xi)$$

в) Пусть $\xi_{1,}\xi_2,...,\xi_n$ независимы, тогда

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)$$

4. Пусть $\xi_{1,}\xi_2$ независимы, тогда

$$D(\xi_1\xi_2) = D(\xi_1)D(\xi_2) + D(\xi_1)M^2(\xi_2) + D(\xi_2)M^2(\xi_1)$$

Действительно

$$D(\xi_1\xi_2)=M\left(\left(\xi_1\xi_2-M\left(\xi_1\xi_2\right)\right)^2\right)=M\left(\left(\xi_1\xi_2\right)^2\right)+M^2\left(\xi_1\xi_2\right)-2M\left(\xi_1\xi_2\right)M(\xi_1\xi_2)$$

$$=M\left(\xi_1^2\right)M\left(\xi_2^2\right)+M^2\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)-2M\left(\xi_1\right)M\left(\xi_2\right)M\left(\xi_1\right)M\left(\xi_2\right)=$$

$$=M\left(\xi_1^2\right)M\left(\xi_2^2\right)-M^2\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)$$

Так как

$D(\xi)=M\left(\xi^2\right)-(M(\xi))^2$ и, следовательно $M\left(\xi^2\right)=D(\xi)+M^2(\xi)$, то

$$D(\xi_1\xi_2)=(D\left(\xi_1\right)+M^2\left(\xi_1\right))(D\left(\xi_2\right)+M^2\left(\xi_2\right))-M^2\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)=$$

$$=D\left(\xi_1\right)D\left(\xi_2\right)+D\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)+D\left(\xi_2\right)M^2\left(\xi_1\right)$$