

ДИСПЕРСИЯ

Определения

Пусть случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M(\xi)$.

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right) \quad (1)$$

Из (1)

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 \quad (2)$$

Пусть ξ - дискретная случайная величина с возможными значениями x_1, x_2, \dots, x_n и вероятностями этих значений $P(\xi = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots, n$.

Тогда

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(\xi))^2 p_i \quad (3)$$

Пусть ξ - непрерывная случайная величина, плотность вероятностей которой $f(x)$. Тогда

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f(x) dx \quad (4)$$

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$

Определение. Дисперсией случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

называется матрица $D = (D_{ij})$, где

$$D_{ij} = M \left[(\xi_i - M(\xi_i)) (\xi_j - M(\xi_j)) \right] = \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = D_{ji}$$

$$D_{ii} = M \left[(\xi_i - M(\xi_i)) (\xi_i - M(\xi_i)) \right] = D(\xi_i)$$

$\text{cov}(\xi_i, \xi_j)$ - **ковариация** случайных величин ξ_i, ξ_j

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0, C = \text{const.}$

2. $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$

3. $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$, где

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\left(\left(\xi_1 - M(\xi_1)\right)\left(\xi_2 - M(\xi_2)\right)\right)$$

Действительно

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \xi_2) &= M\left(\left(\xi_1 + \xi_2 - M(\xi_1 + \xi_2)\right)^2\right) = M\left(\left(\xi_1 - M(\xi_1)\right)^2\right) + M\left(\left(\xi_2 - M(\xi_2)\right)^2\right) + \\ &+ 2M\left(\left(\xi_1 - M(\xi_1)\right)\left(\xi_2 - M(\xi_2)\right)\right) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Следствие.

а) Пусть ξ_1, ξ_2 независимы, тогда

$$D(\xi_1 \pm \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$$

б) Пусть $C = \text{const.}$

$$D(\xi \pm C) = D(\xi)$$

в) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, тогда

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i)$$

4. Пусть ξ_1, ξ_2 независимы, тогда

$$D(\xi_1 \xi_2) = D(\xi_1)D(\xi_2) + D(\xi_1)M^2(\xi_2) + D(\xi_2)M^2(\xi_1)$$

Действительно

$$\begin{aligned} D(\xi_1 \xi_2) &= M\left(\left(\xi_1 \xi_2 - M(\xi_1 \xi_2)\right)^2\right) = M\left(\left(\xi_1 \xi_2\right)^2\right) + M^2(\xi_1 \xi_2) - 2M(\xi_1 \xi_2)M(\xi_1 \xi_2) \\ &= M\left(\xi_1^2\right)M\left(\xi_2^2\right) + M^2(\xi_1)M^2(\xi_2) - 2M(\xi_1)M(\xi_2)M(\xi_1)M(\xi_2) = \\ &= M\left(\xi_1^2\right)M\left(\xi_2^2\right) - M^2(\xi_1)M^2(\xi_2) \end{aligned}$$

Так как

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 \text{ и, следовательно } M\left(\xi^2\right) = D(\xi) + M^2(\xi), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} D(\xi_1 \xi_2) &= (D(\xi_1) + M^2(\xi_1))(D(\xi_2) + M^2(\xi_2)) - M^2(\xi_1)M^2(\xi_2) = \\ &= D(\xi_1)D(\xi_2) + D(\xi_1)M^2(\xi_2) + D(\xi_2)M^2(\xi_1) \end{aligned}$$