ДИСПЕРСИЯ

Определения

Пусть случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M(\xi)$.

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D(\xi)=M\left((\xi-M(\xi))^2\right) \qquad (1)$$

Из (1)

$$D(\xi)=M\left(\xi^2\right)-(M(\xi))^2 \qquad (2)$$

Пусть ξ - дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$ и вероятностями этих значений $P(\xi=x_k)=p_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Тогда

$$D(\xi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(\xi))^2 p_i \qquad (3)$$

Пусть ξ - непрерывная случайная величина, плотность вероятностей которой $f(x)$. Тогда

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^2 f(x)dx \qquad (4)$$

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$

Определение. Дисперсией случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ называется матрица $D = \left(D_{ij}\right)$, где

$$D_{ij} = M\left[\left(\xi_i - M\left(\xi_i\right)\right)\left(\xi_j - M\left(\xi_j\right)\right)\right] = \operatorname{cov}\left(\xi_i, \xi_j\right) = D_{ji}$$

$$D_{ii} = M\left[\left(\xi_i - M\left(\xi_i\right)\right)\left(\xi_i - M\left(\xi_i\right)\right)\right] = D\left(\xi_i\right)$$

$\operatorname{cov}\left(\xi_i, \xi_j\right)$ **- ковариация** случайных величин ξ_i, ξ_j

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$, $C = const.$
2. $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$
3. $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2\operatorname{cov}(\xi_1 \xi_2)$, где

$$\operatorname{cov}(\xi_1 \xi_2) = M\left(\left(\xi_1 - M(\xi_1)\right)\left(\xi_2 - M(\xi_2)\right)\right)$$

Действительно

$$D(\xi_1 + \xi_2) = M\left((\xi_1 + \xi_2 - M(\xi_1 + \xi_2))^2\right) = M\left(\left(\xi_1 - M(\xi_1)\right)^2\right) + M\left(\left(\xi_2 - M(\xi_2)\right)^2\right) +$$

$$+ 2M\left(\left(\xi_1 - M(\xi_1)\right)\left(\xi_2 - M(\xi_2)\right)\right) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2\operatorname{cov}(\xi_1 \xi_2).$$

Следствие.

а) Пусть ξ_1, ξ_2 независимы, тогда

$$D(\xi_1 \pm \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$$

б) Пусть $C = const$.

$$D(\xi \pm C) = D(\xi)$$

в) Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы, тогда

$$D(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)$$

4. Пусть ξ_1, ξ_2 независимы, тогда

$$D(\xi_1 \xi_2) = D(\xi_1) D(\xi_2) + D(\xi_1) M^2(\xi_2) + D(\xi_2) M^2(\xi_1)$$

Действительно

$$D(\xi_1\xi_2)=M\left(\left(\xi_1\xi_2-M\left(\xi_1\xi_2\right)\right)^2\right)=M\left(\left(\xi_1\xi_2\right)^2\right)+M^2\left(\xi_1\xi_2\right)-2M\left(\xi_1\xi_2\right)M(\xi_1\xi_2)$$

$$=M\left(\xi_1^2\right)M\left(\xi_2^2\right)+M^2\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)-2M\left(\xi_1\right)M\left(\xi_2\right)M\left(\xi_1\right)M\left(\xi_2\right)=$$

$$=M\left(\xi_1^2\right)M\left(\xi_2^2\right)-M^2\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)$$

Так как

$D(\xi)=M\left(\xi^2\right)-(M(\xi))^2$ и, следовательно $M\left(\xi^2\right)=D(\xi)+M^2(\xi)$, то

$$D(\xi_1\xi_2)=(D\left(\xi_1\right)+M^2\left(\xi_1\right))(D\left(\xi_2\right)+M^2\left(\xi_2\right))-M^2\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)=$$

$$=D\left(\xi_1\right)D\left(\xi_2\right)+D\left(\xi_1\right)M^2\left(\xi_2\right)+D\left(\xi_2\right)M^2\left(\xi_1\right)$$