Двойные интегралы

Доц. А.М. Стаин

РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина

Определённый интеграл

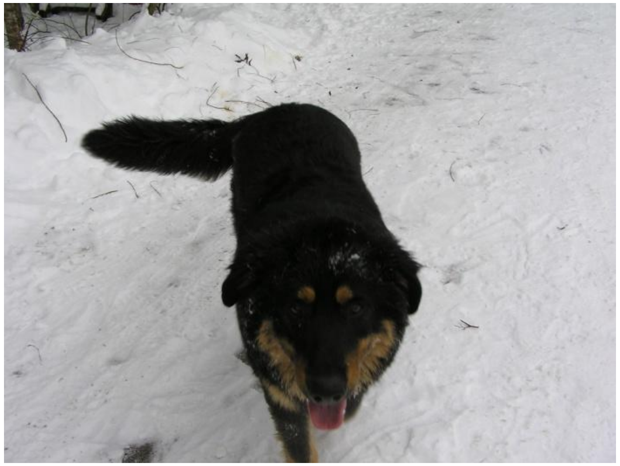
- Определение:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

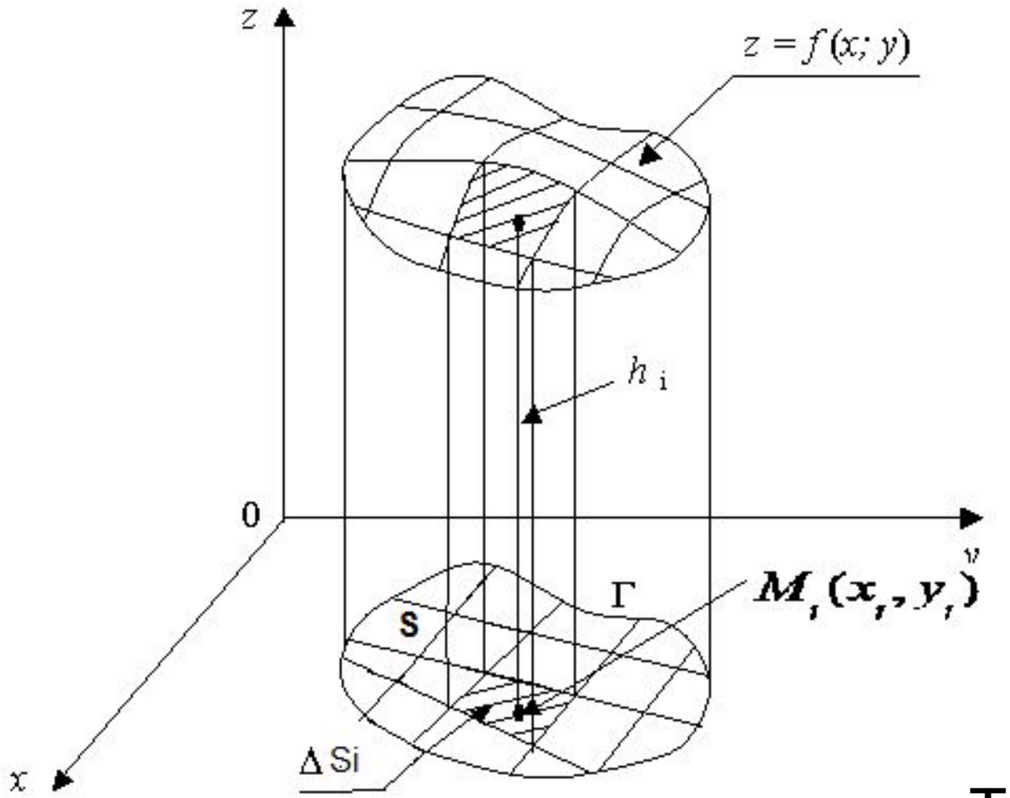
Двойной интеграл

?

- Другая , **но тоже собака.**



Задача: найти объем тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y), f(x, y) \geq 0$, снизу конечной областью S плоскости Oxy и с боков прямой цилиндрической поверхностью, построенной на границе области S и имеющей образующие, перпендикулярные к плоскости Oxy.



Тело построенного вида мы в дальнейшем будем называть ***цилиндроидом***.

Объем цилидра $V = SH$.

Алгоритм: разобъем основание

$S \to$ на конечное число элементарных ячеек $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$

(вообще говоря, криволинейных);

в каждой из этих ячеек ΔS_i выберем точку $M_i(x_i, y_i)$ и

построим прямой цилиндрический столбик с основанием ΔS_i и

высотой $f(x_i, y_i)$. Объем столбика

равен $f(x_i, y_i)\Delta S_i$, где ΔS_i - площадь соответствующей ячейки.

Сумма объемов столбиков - объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего данное криволинейное тело, причем аппроксимация является тем более точной, чем меньше диаметры ячеек ΔS_i.

Т.о. объем цилиндроида приближенно равен

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

Формула (1) позволяет найти объем V с любой степенью точности, если число ячеек ΔS_i достаточно велико и их линейные размеры малы.

Пусть $d = \max_i d_i$ - наибольший из диаметров ячеек ΔS_i.

Предполагая, что в формуле (1) число ячеек неограниченно возрастает ($n \to \infty$), причем $d \to 0$, в пределе получим точную формулу для объема цилиндроида

$$V = \lim_{d\to 0 (n\to\infty)} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \quad (2)$$

Обобщим конструкцию, примененную для вычисления объема цилиндроида.

Пусть в плоскости Oxy задана конечная замкнутая область S, имеющая кусочно-гладкую границу G. В области S определена ограниченная функция $f(x, y)$. С помощью сетки гладких линий разобьем область S на конечное число замкнутых ячеек $\Delta S_i (i = 1, 2, ..., n)$.

В каждой ячейке выберем некоторую точку $M_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим ***двумерную интегральную сумму***

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \qquad (3)$$

где ΔS_i - площадь соответствующей ячейки.

Определение 1 Двумерной интегральной суммой (3) от данной функции $f(x, y)$, распространенной на данную область S, называется сумма произведений площадей элементарных ячеек области S на значения функции $f(x, y)$ в выделенных точках этих ячеек.

Пусть число элементарных ячеек $n \to \infty$,

А их наибольший диаметр $d \to 0$. Тогда

Определение 2 Если, двумерная интегральная сумма (3) при условии, что число n элементарных ячеек ΔS_i неограниченно возрастает и наибольший из диаметров d элементарных ячеек стремится к нулю имеет конечный предел, не зависящий от способа дробления области S на элементарные ячейки и выбора точек $M_i \in \Delta S_i$, то этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$, распространенным на область S.

$$\iint_S f(x, y) dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \qquad (4)$$

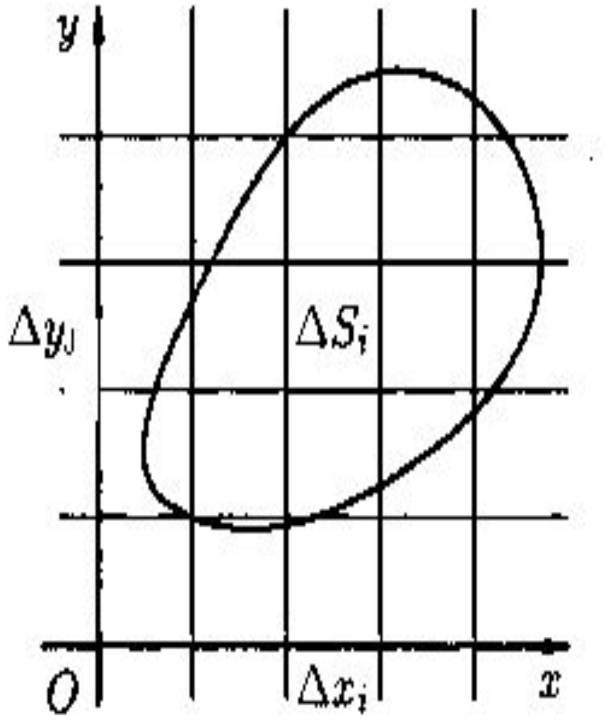
Имеет место следующая теорема существования двойного интеграла:

Теорема 1 Если конечная замкнутая область S имеет кусочно-гладкую границу G и функция $f(x, y)$ непрерывна в области S, то соответствующий двойной интеграл существует.

Замечание: так как значение двойного интеграла не зависит от вида элементарных ячеек, то в дальнейшем при решении задач мы будем использовать это обстоятельство, выбирая наиболее подходящую сетку разбиения области S.

В Декартовой прямоугольной системе координат наиболее удобная **прямоугольная сетка**, образованная пересечением систем прямых, параллельных координатным осям Ox, Oy.

В этом случе $\Delta S_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$, за исключением, возможно, ячеек, примыкающих к границе G. Что бы подчеркнуть использование прямоугольной сетки, в обозначении интеграла (4) полагают $dS = dxdy$ - двумерный элемент площади.



$$\iint\limits_{S} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0 \\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

где $(x_i, y_j) \in \Delta S_{ij}$ и сумма распространяется на

все значения i, j такие, что $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$

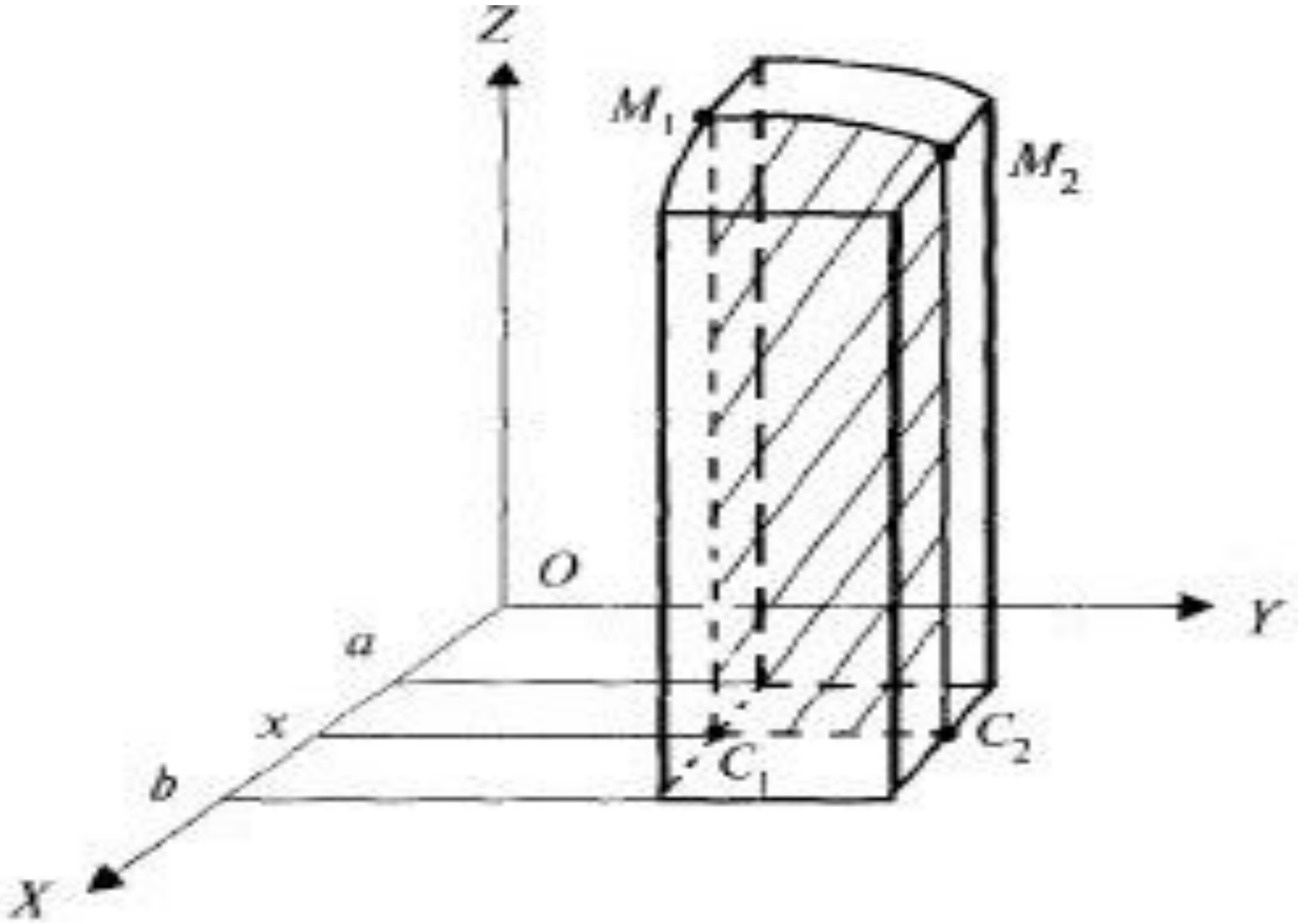
Двойной интеграл с прямоугольной областью интегрирования.

Пусть нужно вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy \qquad (5)$$

где область интегрирования S есть прямоугольник: $a \le x \le b, C_1 \le y \le C_2$.

Если предположить, что $f(x,y) \ge 0$, то геометрически интеграл (5) равен объему прямого цилиндроида, построенного на прямоугольнике S.



Z
M_1
M_2
O
Y
a
x
b
X
C_1
C_2

Объем можно вычислить методом сечений. Т.е., если $\sigma(x)$ - площадь сечения цилиндроида плоскостью перпендикулярной к оси Ox в её точке $x \in [a,b]$, то имеем

$$V = \iint\limits_{S} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} \sigma(x)\,dx \qquad (6)$$

Рис.

Но площадь $\sigma(x)$ представляет собой криволинейную трапецию ограниченную снизу отрезком $C_1 \le y \le C_2$ и сверху кривой M_1M_2 $z = f(x, y)$, $x = const$. Поэтому

$$\sigma(x) = \int_{C_1}^{C_2} f(x, y)dy \qquad (7)$$

где при интегрировании переменная x полагается постоянной

Подставляя это выражение в формулу (6) получаем

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{C_1}^{C_2} f(x,y)dy \qquad (8)$$

Можно показать, что формула (8) остается верной и для знакопеременной под интегральной функции.

Замечание 1. Формула (8) верна для ограниченной разрывной функции $f(x, y)$, имеющей конечное число кусочно-гладких линий разрыва конечной длины.

Замечание 2. Интеграл в правой части (8) называется повторным. Т.к. в интеграле (5) переменные x и y равноправны, то можно записать так

$$\iint\limits_{S} f(x,y)dxdy = \int\limits_{C_1}^{C_2} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx \qquad (9)$$

Тогда из (8),(9) следует

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{C_1}^{C_2} f(x,y)dy = \int\limits_{C_1}^{C_2} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx \qquad (10)$$

Пример1: Найти

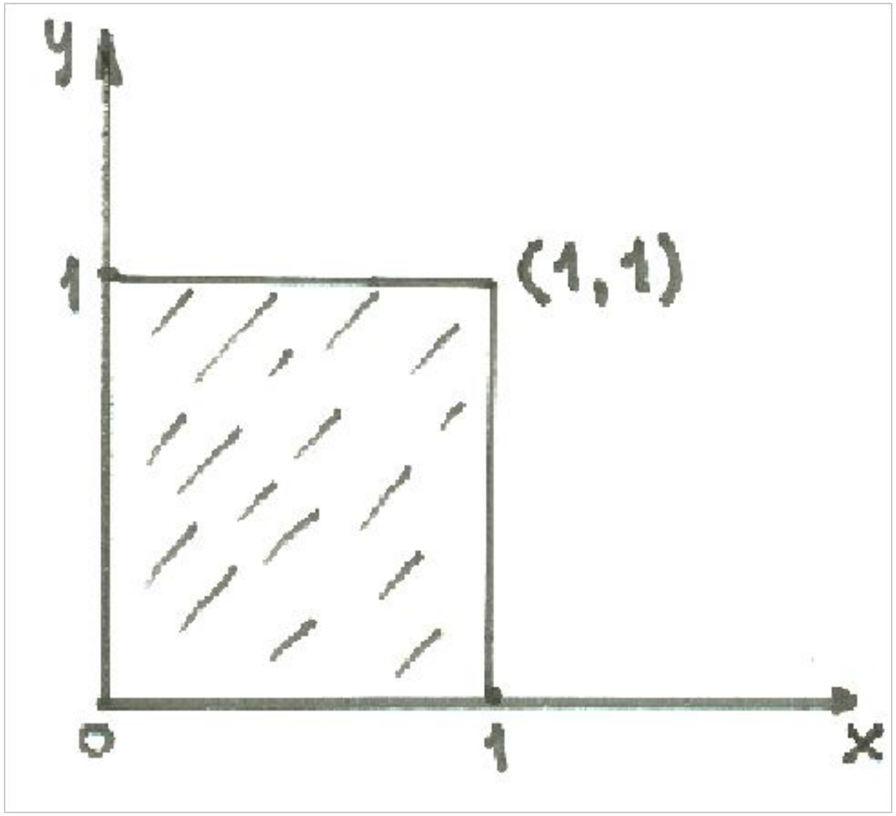
$$\iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy$$, где $.S:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$

$$\iint\limits_s (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 x^2 dy + \int\limits_0^1 y^2 dy)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2 y\Big|_0^1 + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2 dx + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$



Двойной интеграл в Декартовых прямоугольных координатах.

Определение 3. Область S называется стандартной относительно оси Ox, если любая прямая, проходящая параллельно оси Ox через любую внутреннюю точку области S, пересекает её границу G в двух точках: точку входа M и точку выхода N.

В дальнейшем мы будем иметь дело со стандартными относительно оси Ox областями вида

$$S:\left\{a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\right\},$$

где $y_1(x), y_2(x)$ - однозначные непрерывные функции на отрезке $\left[a,b\right]$, либо со стандартными относительно оси Oy областями вида

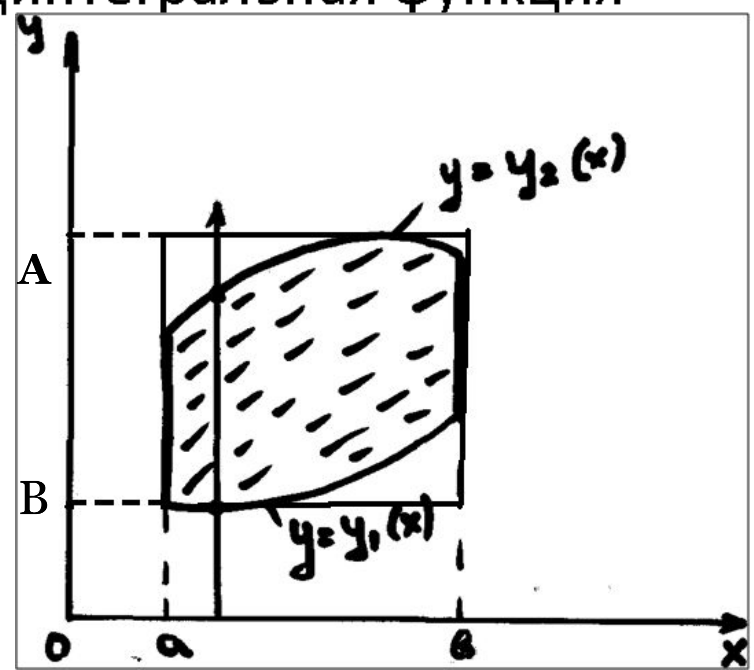
$$S:\left\{A \le y \le B; x_1(y) \le x \le x_2(y)\right\},$$

где $x_1(y), x_2(y)$ - однозначные непрерывные функции на отрезке $\left[A,B\right]$.

Пусть дан двойной интеграл

$$\iint_S f(x,y)dxdy \qquad (11)$$

где область интегрирования S, с кусочно-гладкой границей G стандартна относительно оси Oy и подинтегральная функция $f(x,y)$ - непрерывна в S.



Т.к. область S конечна, то её можно заключить в некоторый минимальный прямоугольник $R\{a \le x \le b, A \le y \le B\}$.

Пусть

$$y = y_1(x), (a \le x \le b) \qquad (G_1)$$

$$y = y_2(x), (a \le x \le b) \qquad (G_2)$$

- уравнения частей границы G, ограничивающих область снизу и сверху, где $y_1(x), y_2(x)$ - однозначные непрерывные функции.

  Так как S- стандартна относительно оси Oy, то каждая вертикаль, проведенная в точке x, где $a < x < b$ пересекает границу G в двух и только в двух точках: $M(x, y_1(x)), M(x, y_2(x))$.

Введем вспомогательную функцию

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(,y),(x,y)\in S \\ 0,(x,y)\in R-S \end{cases}$$

Тогда, очевидно

$$\iint\limits_{s} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{R} f^*(x,y)dxdy \quad (12)$$

Для функции $f^*(x,y)$ граница G является единственной линией разрыва. Учитывая прямоугольность области R , получим

$$\iint_R f^*(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_A^B f^*(x,y)dy \quad (13)$$

Так как отрезок $[y_1(x), y_2(x)]$ целиком принадлежит области S и, значит,

$f^*(x,y) = f(x,y)$ при $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, а вне этого отрезка

$f^*(x,y) = 0$

TO

$$\int_A^B f^*(x,y)dy =$$

$$= \int_A^{y_1(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_2(x)}^{B} f^*(x,y)dy =$$

$$= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Таким образом

$$\iint\limits_{R} f^{*}(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

или

$$\iint\limits_{S} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (14)$$

Аналогично, если область S стандартна относительно оси Ox и определяется неравенствами

$$A \le y \le B, x_1(y) \le x \le x_2(y),$$

где $x_1(y), x_2(y)$ - непрерывные функции на отрезке $[A, B]$, то получаем

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_A^B dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (15)$$

Пример 1. Вычислить

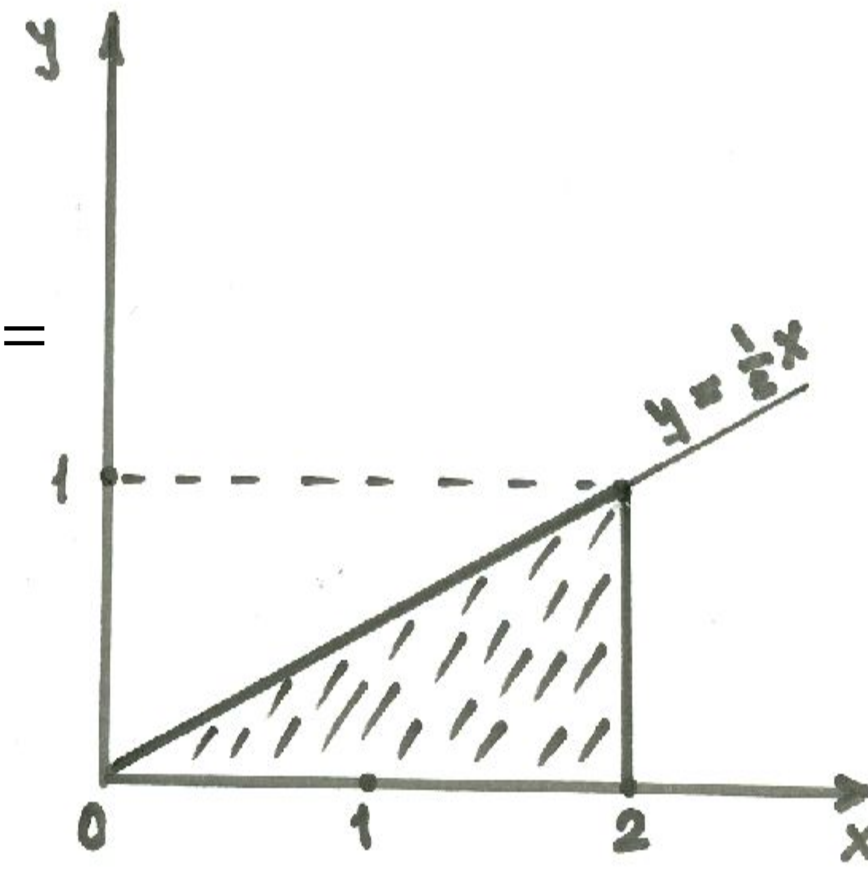
$$\iint_S x^2 y\,dxdy$$

где S - треугольник с вершинами $O(0,0), A(2,0), B(2,1)$.

$$\iint_s x^2 y\,dxdy = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{0.5x} y\,dy =$$

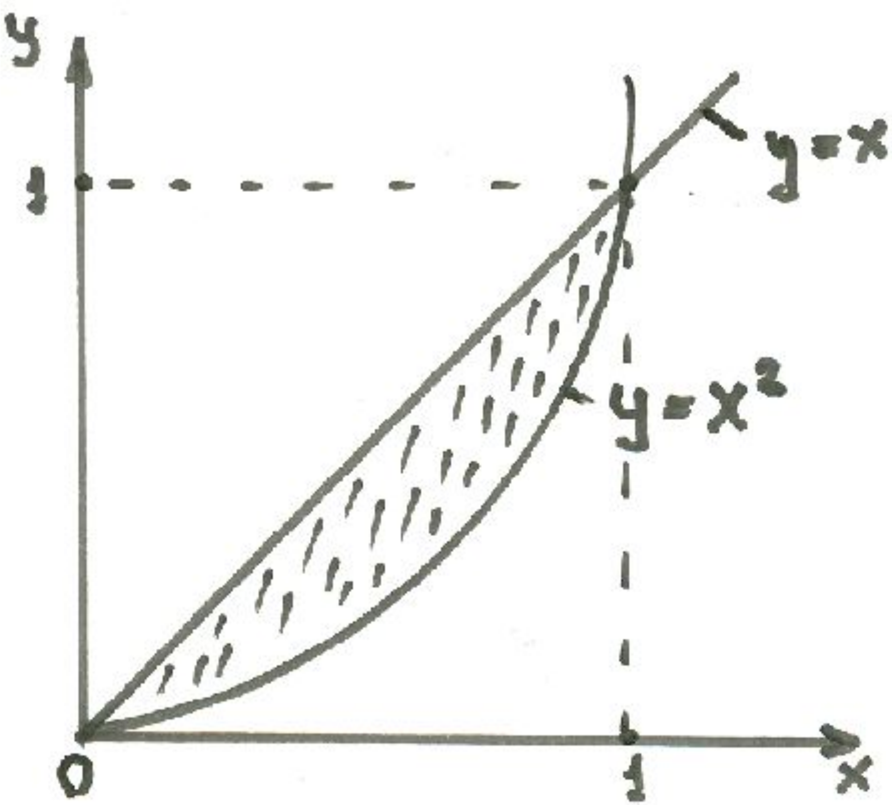
$$= \int_0^2 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{0.5x}\right) dx = \frac{0.25}{2}\int_0^2 x^4 dx =$$

$$= \frac{0.25}{2}\left(\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2\right) = \frac{4}{5}.$$



Пример 2. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$



Пример 3.Вычислить интеграл

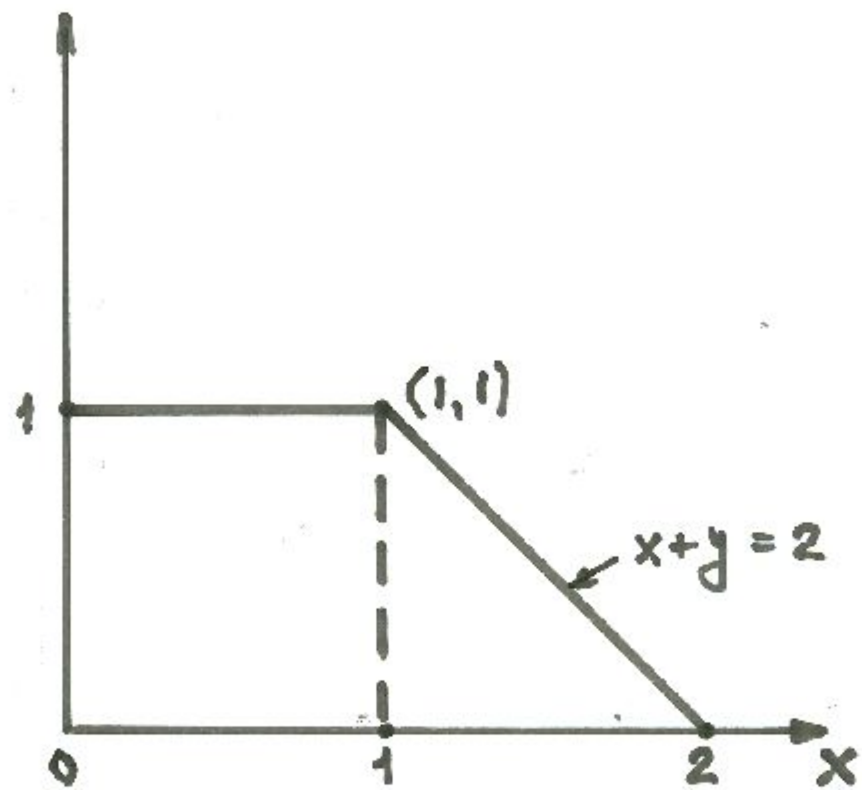
$$\iint_S (x+y)\,dxdy$$

где S - трапеция с вершинами $O(0,0), A(2,0), B(1,1), C(0,1)$.

1) $$\iint_S (x+y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)\,dy +$$

$$+\int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)\,dy.$$

2) $$\iint_S (x+y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} (x+y)\,dx$$



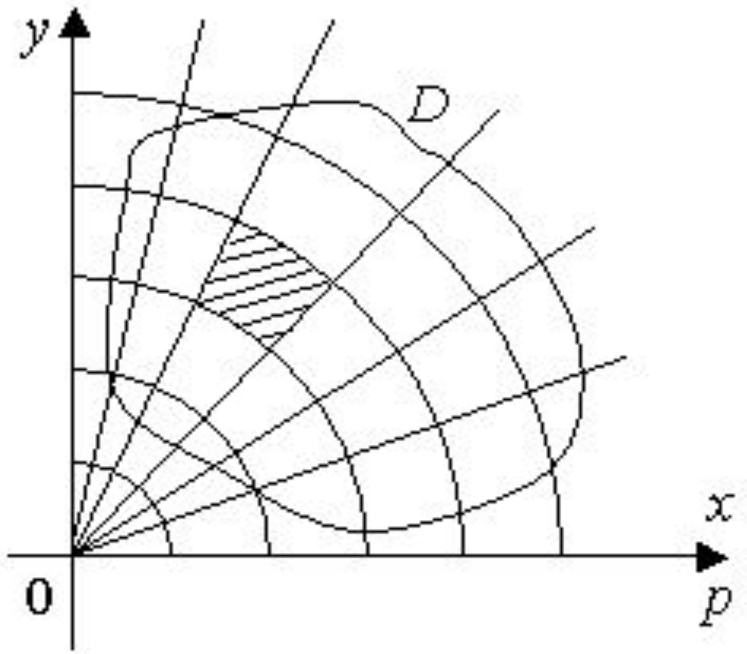
Двойной интеграл в полярных координатах.

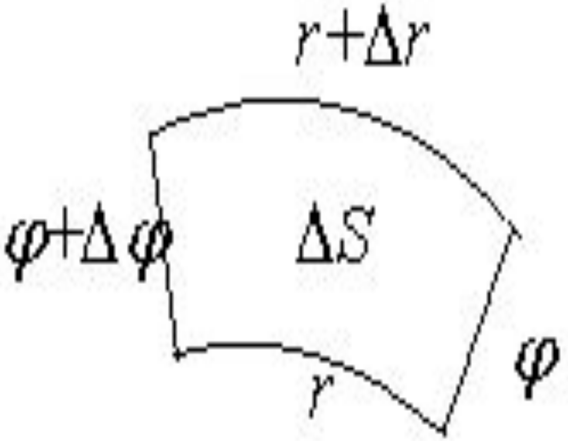
Пусть в двойном интеграле

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_S f(x,y)dS \qquad (16)$$

мы хотим перейти к полярным координатам r,φ. Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad (17)$$


y
D
x
0
p


r+Δr
φ+Δφ
ΔS
φ
r

Разобьем область интегрирования S на элементарные ячейки ΔS_{ij} с помощью координатных линий $r = r_j$ (окружности) и

$\varphi = \varphi_i$ (лучи). Введем обозначения:

$$\begin{cases} \Delta r_j = r_{j+1} - r_j \\ \Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i \end{cases}$$

Так как окружности перпендикулярны радиусам, то ячейки ΔS_{ij}, с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости относительно их линейных размеров, можно рассматривать как прямоугольники с измерениями

$r_j \Delta\varphi_i, \Delta r_j$

Поэтому площадь каждой такой ячейки можно приближенно считать равной

$$\Delta S_{ij} \approx r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j \qquad (18)$$

Наличие ячеек неправильной формы, примыкающих к границе области, как и ранее в декартовой системе координат, не повлияет на значение двойного интеграла.

Для удобства выберем точки $M_{ij} \in \Delta S_{ij}$

в вершинах ячеек ΔS_{ij} с полярными координатами r_j, φ_i.

Тогда декартовы координаты точки M_{ij} равны

$$x_{ij} = r_j \cos\varphi_i ; y_{ij} = r_j \sin\varphi_i$$

и, следовательно,

$$f(x_{ij}, y_{ij}) = f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i).$$

Т.о. $\iint\limits_S f(x,y)dS = \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta S_{ij} =$

$= \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i,j} f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i) r_j \Delta\varphi_i \Delta r_j$ (19)

Так как φ_i, r_j - числа и если их рассматривать как значения прямоугольных декартовых координат некоторых точек плоскости $O\varphi r$. Тогда (19) можно рассматривать как интегральную сумму для функции

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r,$$

соответствующую прямоугольной сетке с линейными элементами $\Delta\varphi_i, \Delta r_j$. Следовательно,

$$\lim_{d\to 0}\sum_{ij} f(r_j\cos\varphi_i, r_j\sin\varphi_i)r_j\Delta\varphi_i\Delta r_j =$$

$$=\iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr \qquad (20)$$

Или, сравнивая (19) и (20), получаем

$$\iint_S f(x,y)dS = \iint_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \quad (21)$$

Выражение

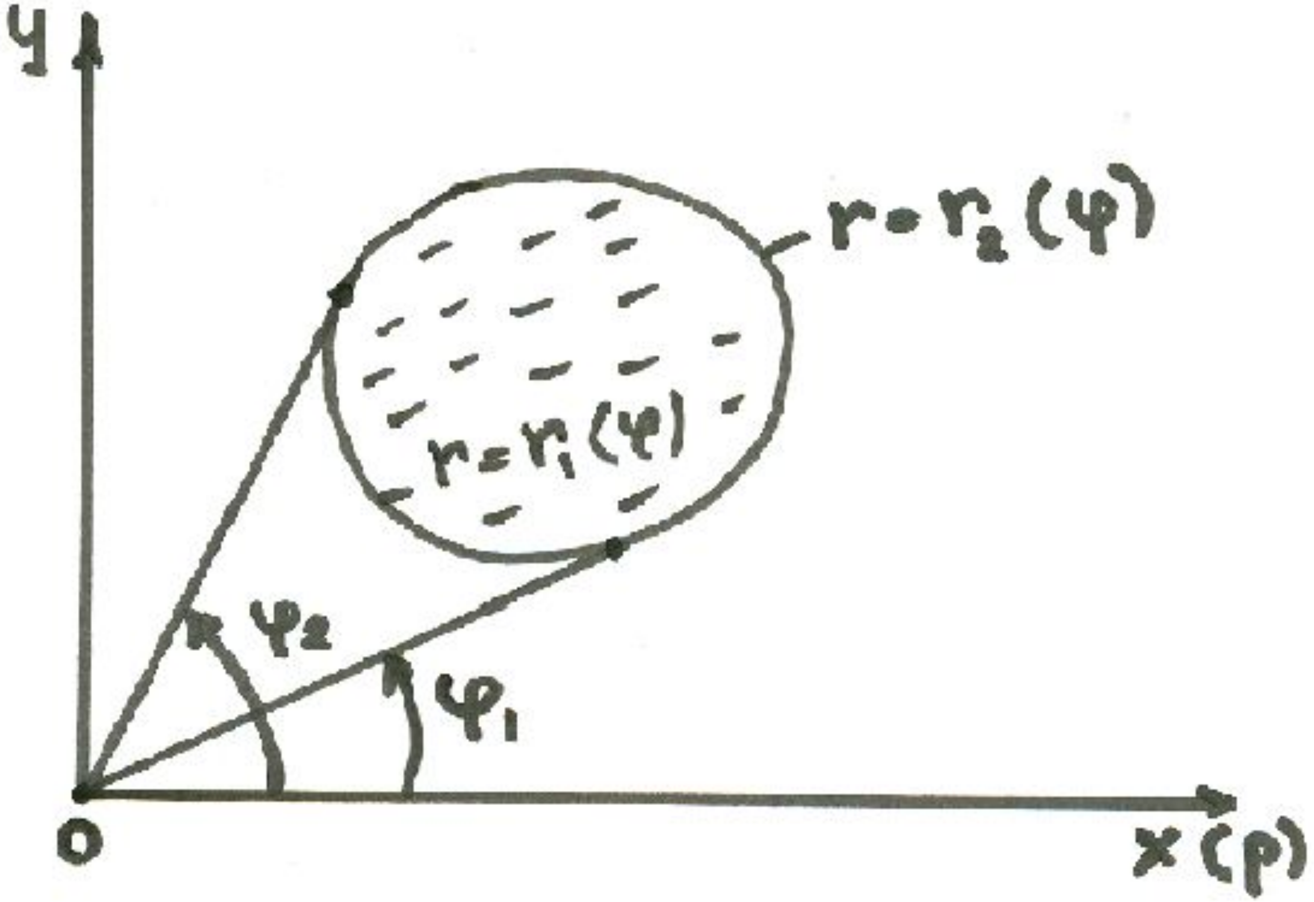
$$dS = r d\varphi dr \qquad (22)$$

мы будем называть ***двумерным элементом площади в полярных координатах***.

Для вычисления двойного интеграла (21) его нужно представить в виде повторного.

Для этого рассмотрим область интегрирования S, определяемую неравенствами

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi),$$



y
r = r₂ (φ)
r = r₁ (φ)
φ₂
φ₁
O
x (ρ)

Тогда аналогично с прямоугольными координатами получаем

$$\iint\limits_S F(r,\varphi)\,d\varphi\,dr = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)\,dr \quad (23)$$

где

$$F(r,\varphi) = rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

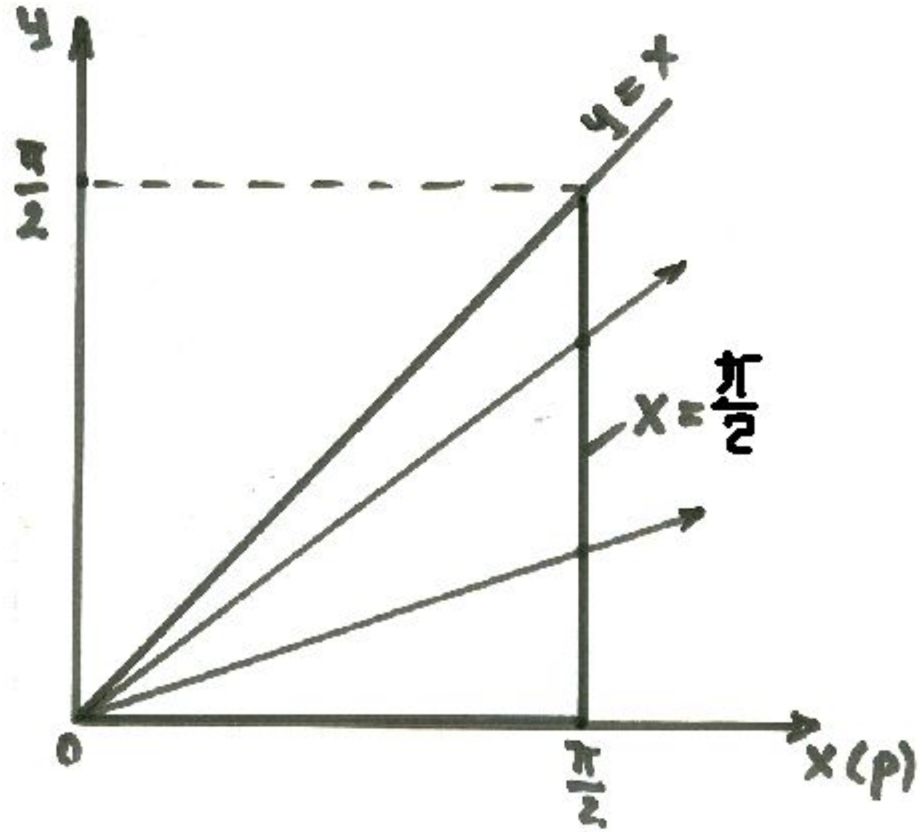
Пример 1. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{r} = \frac{\pi}{2}$$

где S-первая четверть круга радиуса $R=1$ с центром в точке $O(0,0)$.

Пример 2. Перейти к полярным координатам в интеграле:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2\cos\varphi}} r^2 dr.$$




IQ
"-ing"
IQ

Удачи на экзамене!