

Двугранный угол, решение задач

Урок по геометрии в 10 классе
разработан по учебнику Л.С.
Атанасяна.



Цель урока:

- Сформировать у обучающихся конструктивный подход по выработке умений и навыков находить угол между плоскостями.

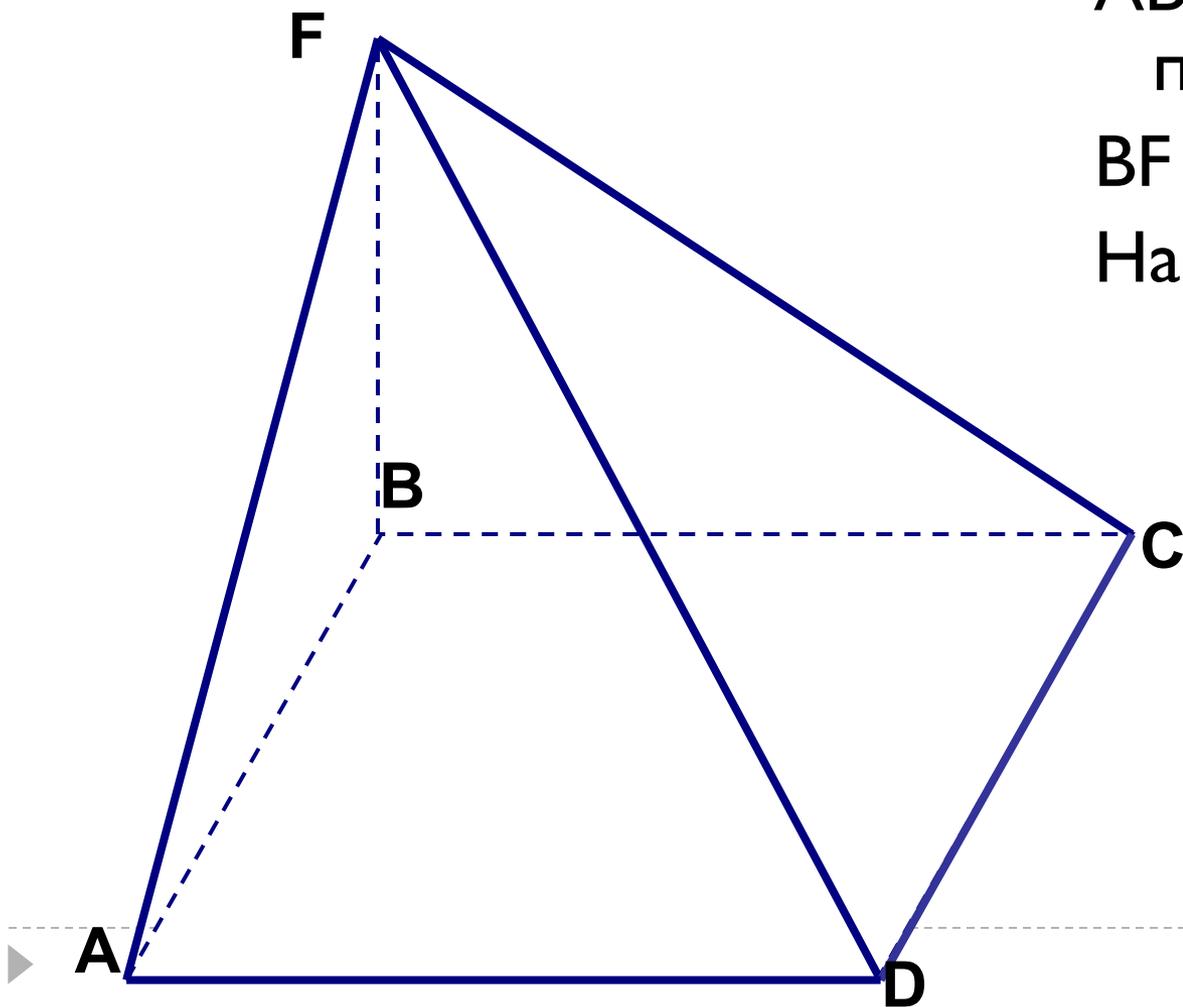


Вид урока: изучение и первичное закрепление новых знаний

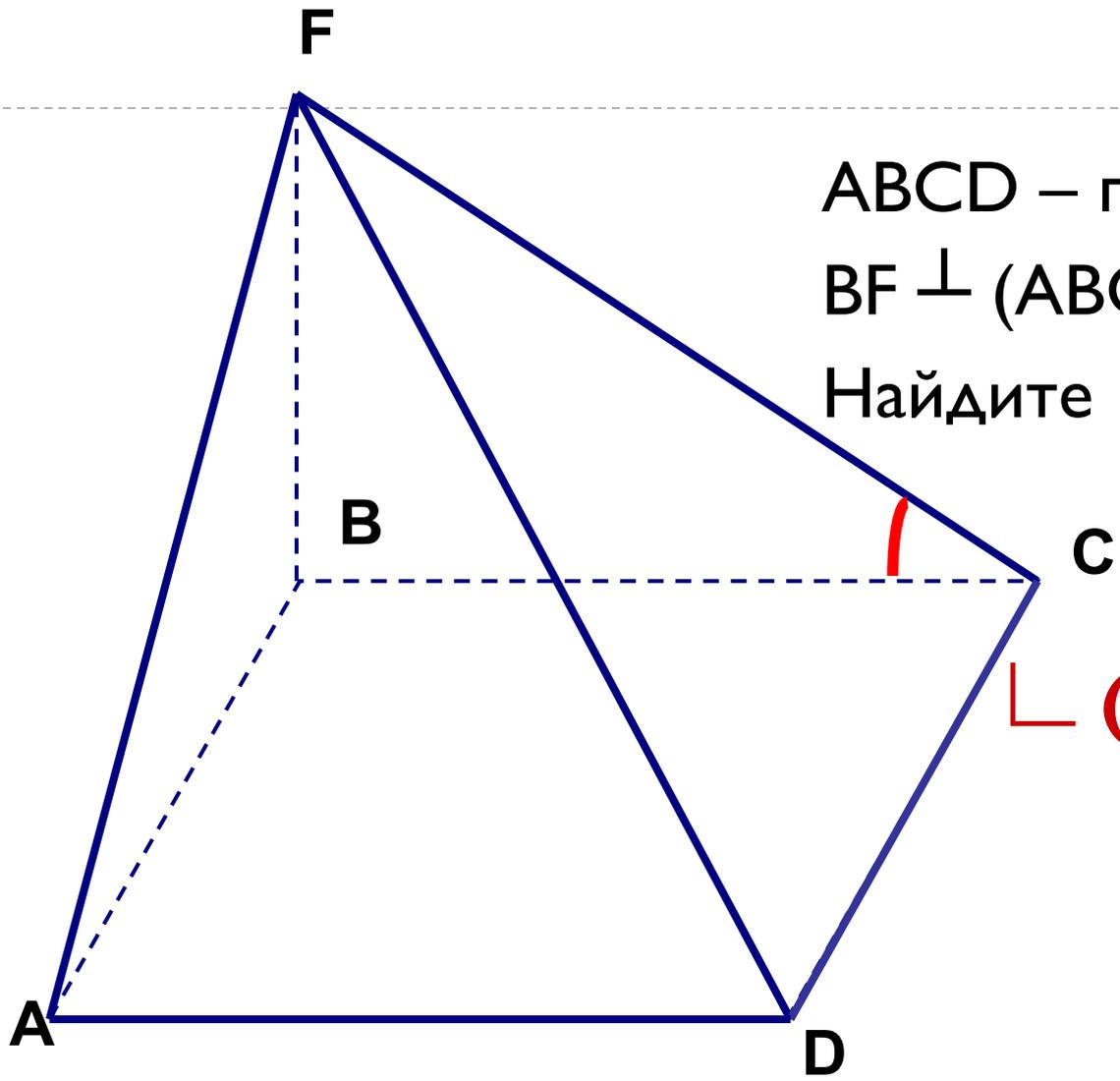
Оборудование: компьютер, проектор, слайды,
чертежные инструменты, цветные мелки.



Решение задач по ГОТОВЫМ
чертежам на слайдах:



$ABCD$ –
прямоугольник,
 $BF \perp (ABC)$.
Найдите $\angle (DC)$.

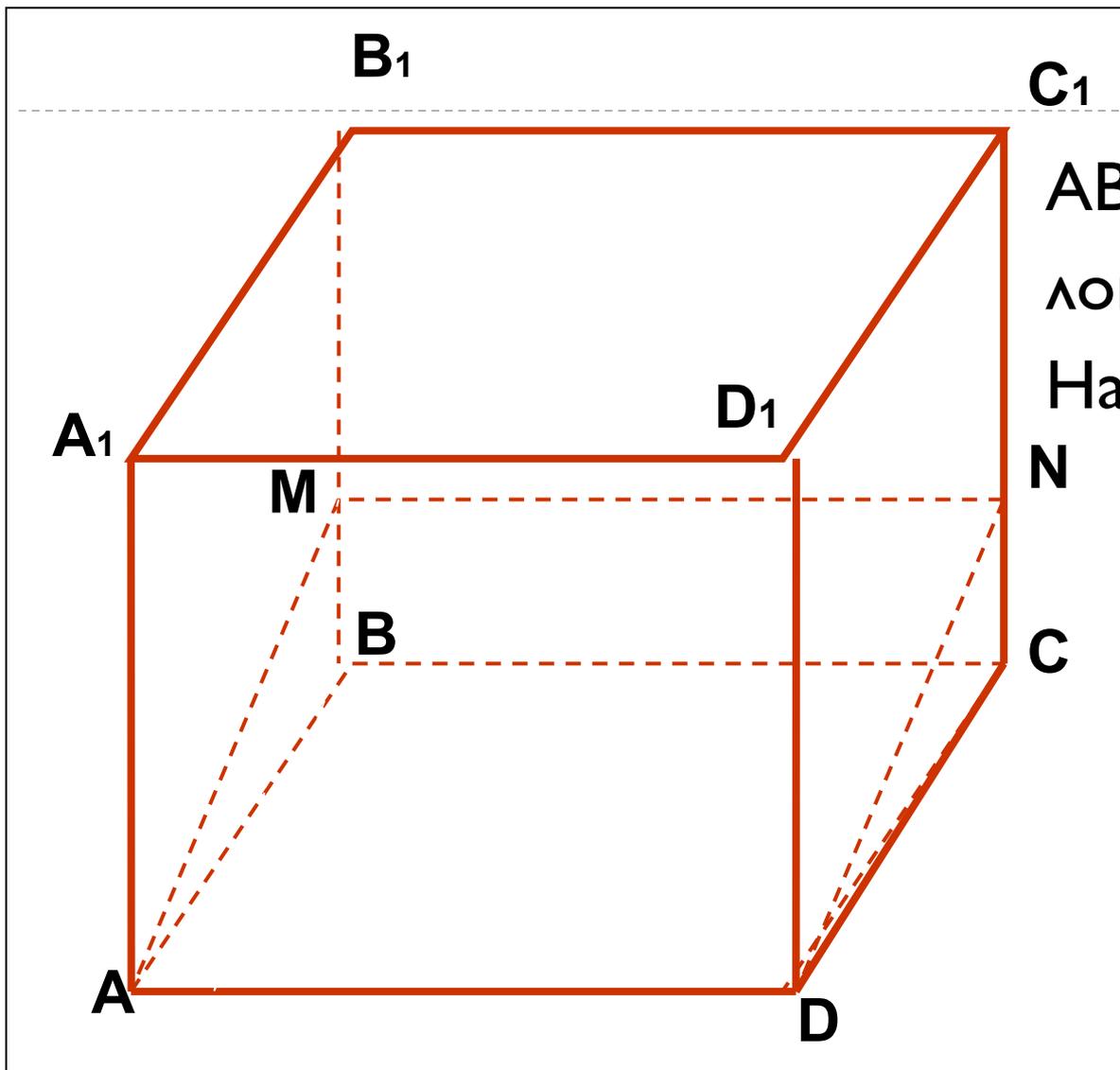


ABCD – прямоугольник,
 $BF \perp (ABC)$.

Найдите $\sphericalangle (DC)$.

$\sphericalangle (CD) = \sphericalangle FCB$

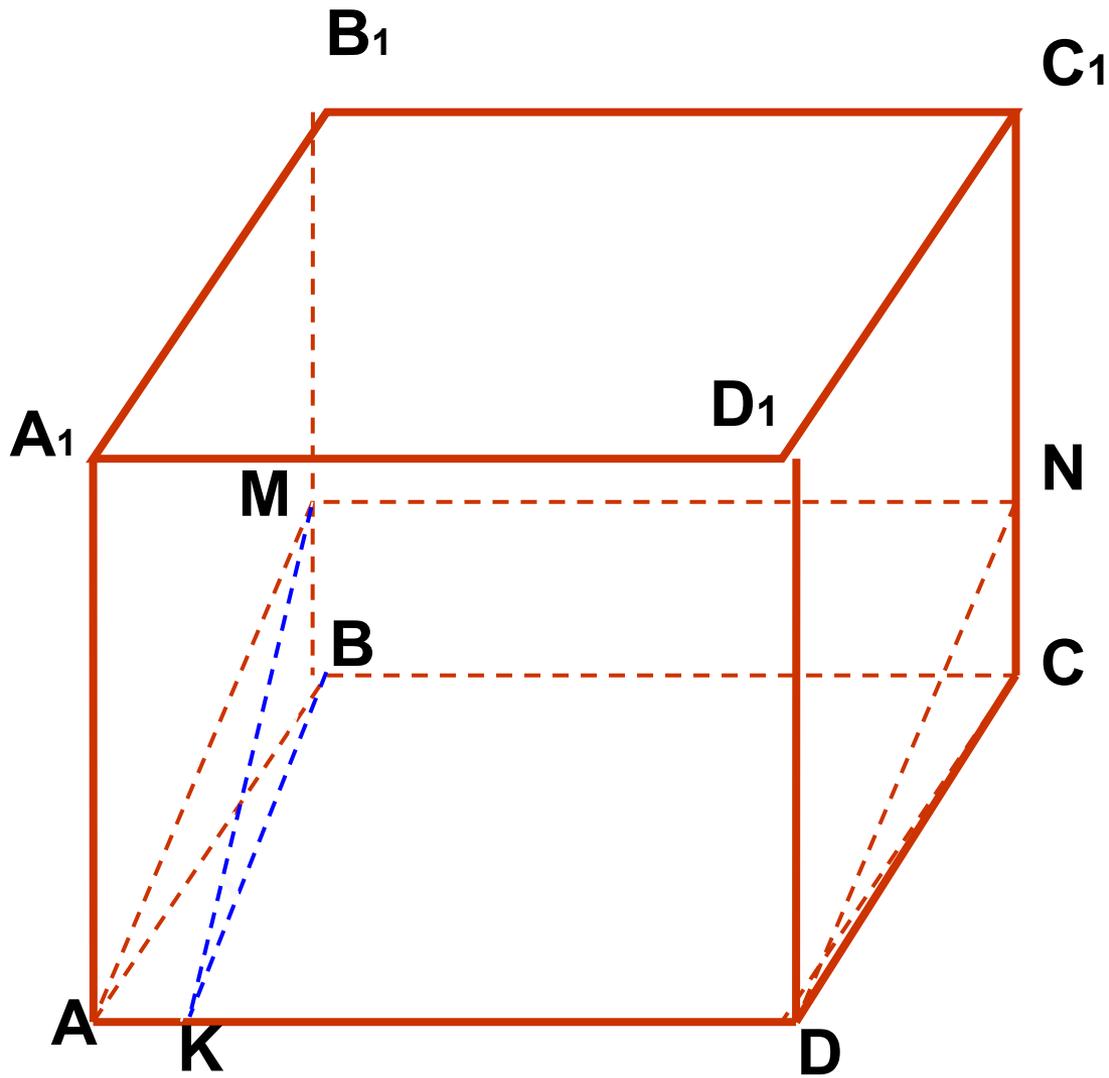




$ABCD$ – параллелограмм, $AA_1 \perp (ABC)$.

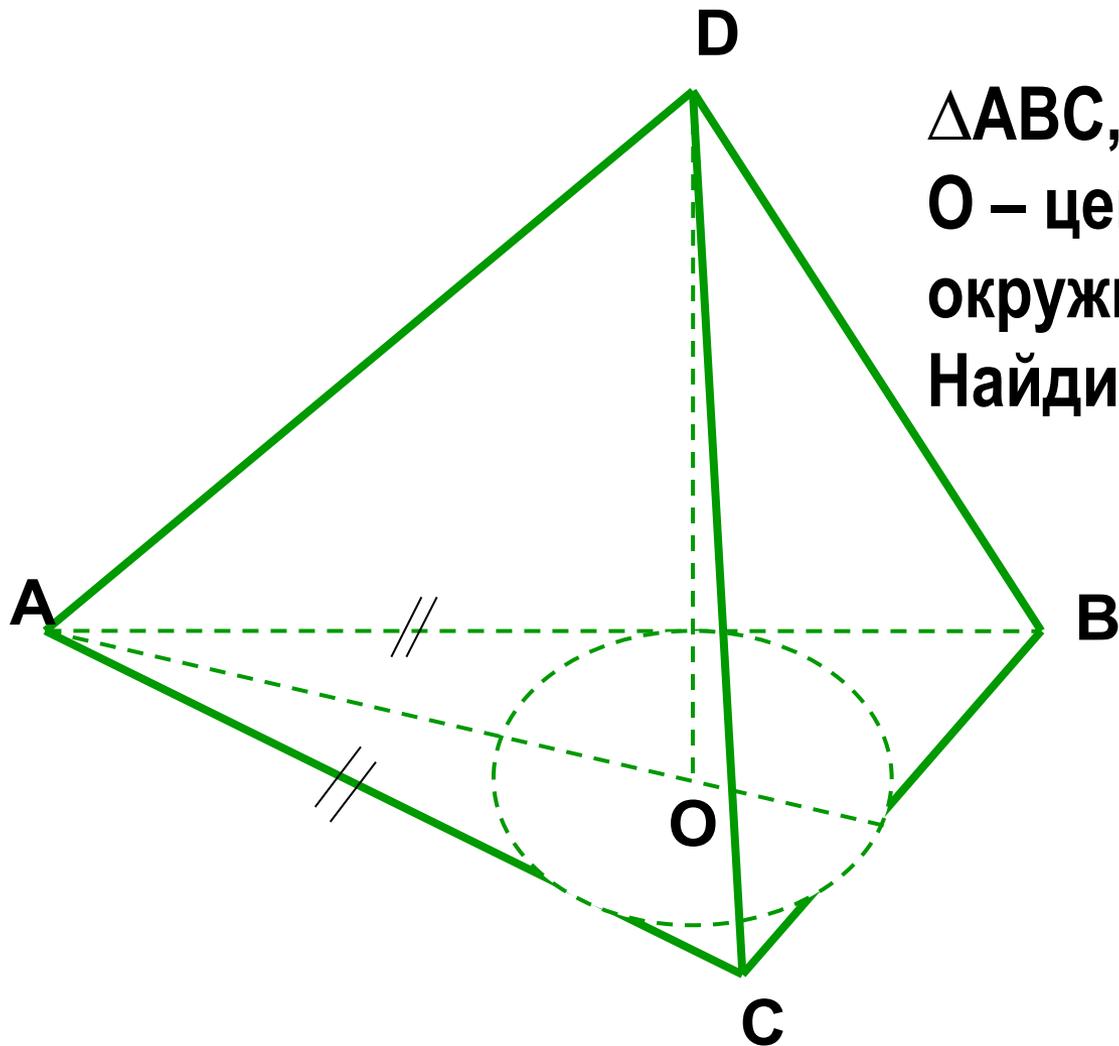
Найдите $\angle (CDAM)$.





$\angle CDAM = \angle MKB$

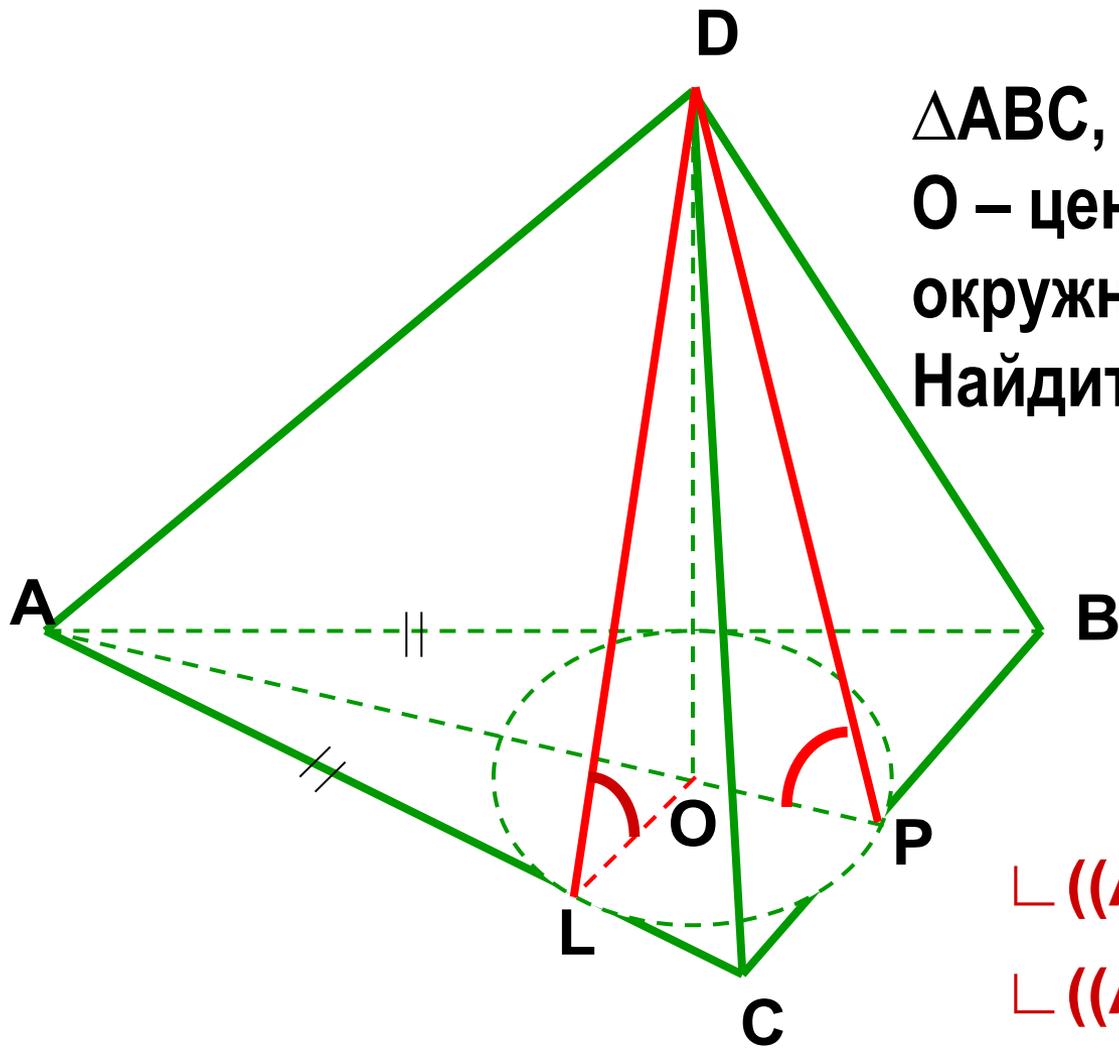




$\triangle ABC$, $AC=AB$,

O – центр вписанной
окружности.

Найдите $\sphericalangle ((ABC),(BCD))$,
 $\sphericalangle ((ABC),(ACD))$.



$\triangle ABC$, $AC=AB$,

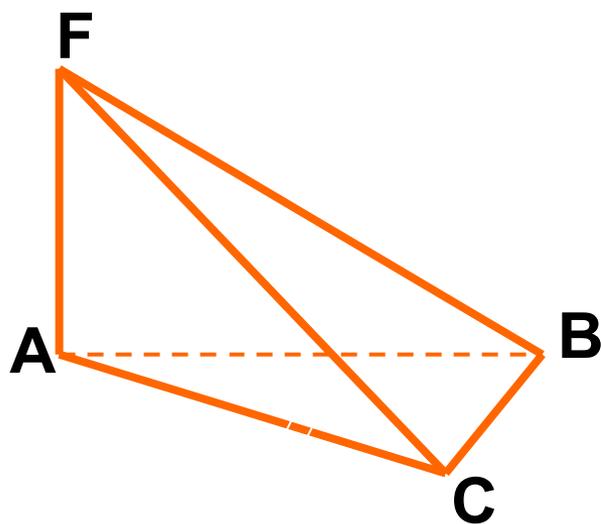
O – центр вписанной
окружности.

Найдите $\sphericalangle ((ABC),(BCD))$,
 $\sphericalangle ((ABC),(ACD))$.

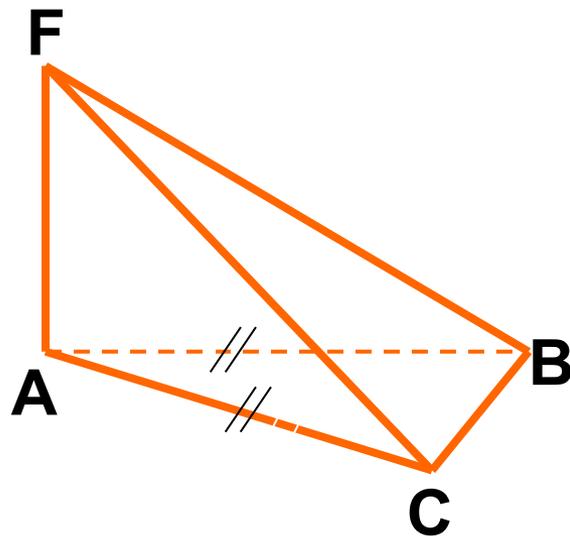
$$\sphericalangle ((ABC),(BCD)) = \sphericalangle DPO$$

$$\sphericalangle ((ABC),(ACD)) = \sphericalangle DLO$$

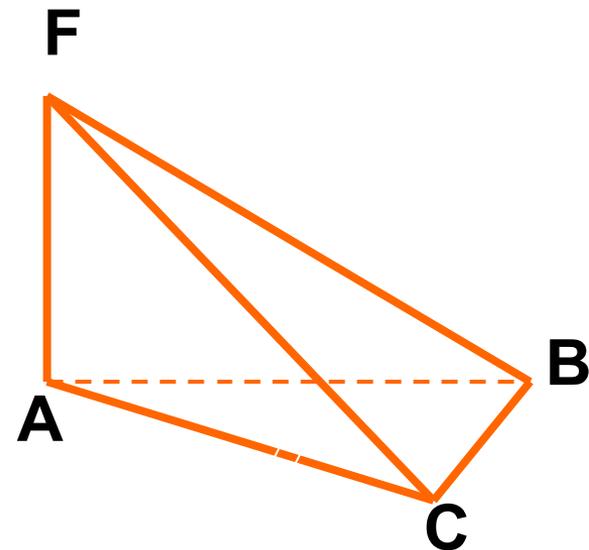
Работа по вариантам:



$\triangle ABC$
прямоугольный
($C = 90^\circ$)

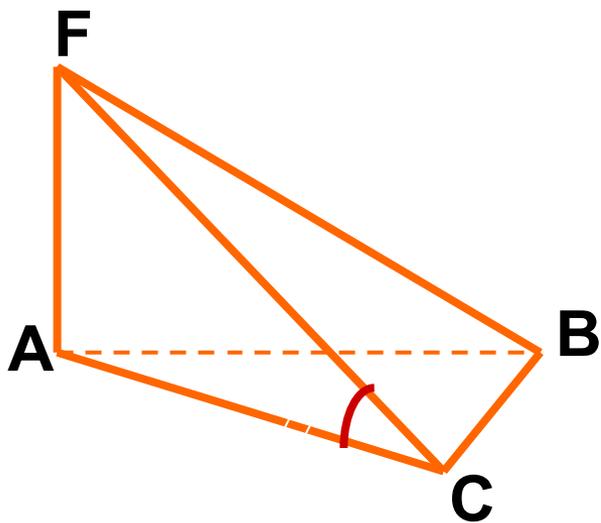


$\triangle ABC$
равнобедренный

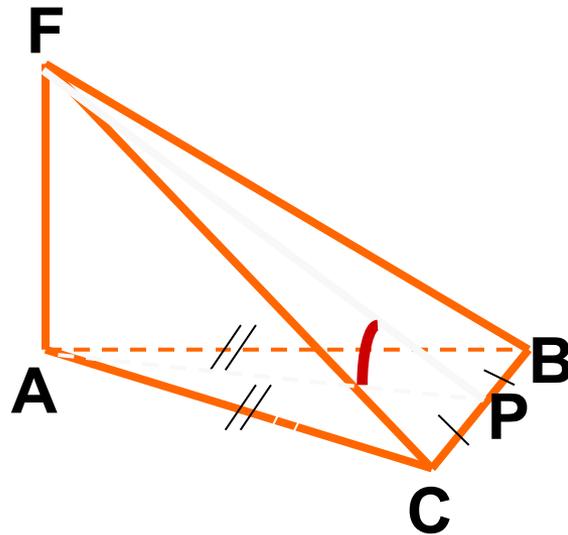


$\triangle ABC$
тупоугольный
($C > 90^\circ$)

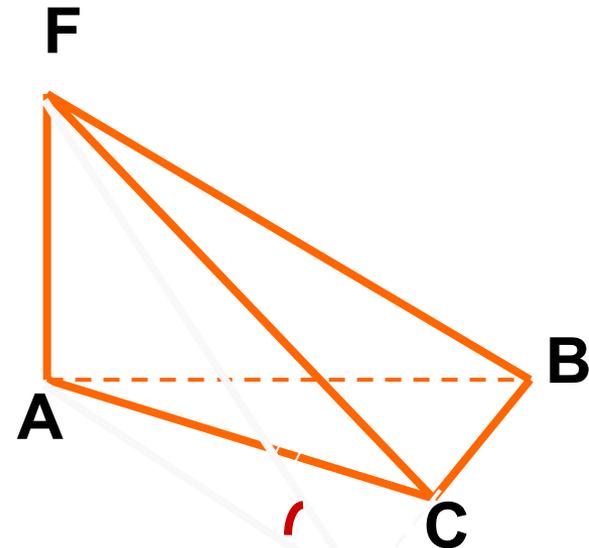




$\triangle ABC$
 прямоугольный
 ($C = 90^\circ$)
 $\angle(BC) = \angle ACF$



$\triangle ABC$
 Равнобедренный
 $\angle(BC) = \angle FPA$

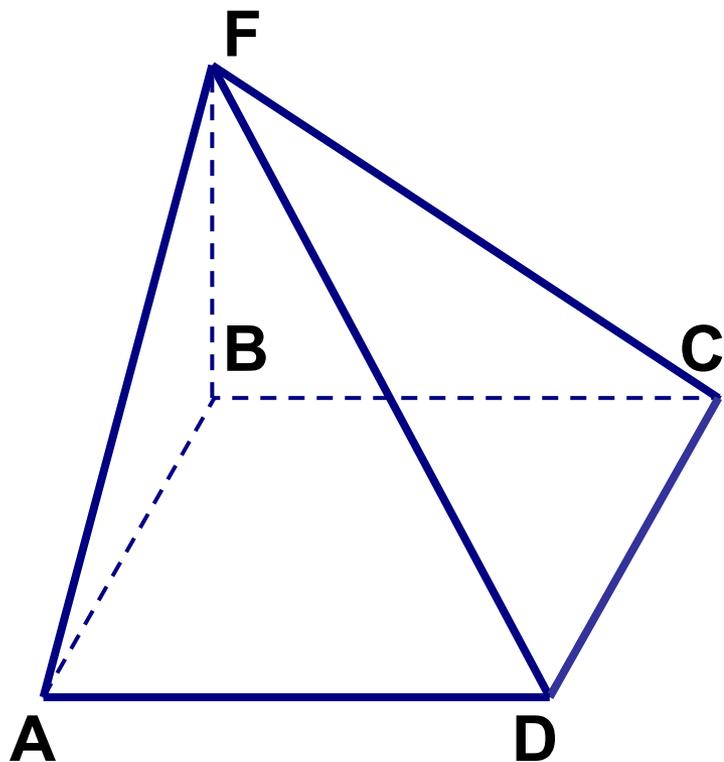


$\triangle ABC$
 тупоугольный
 ($C > 90^\circ$)
 $\angle(BC) = \angle APF$



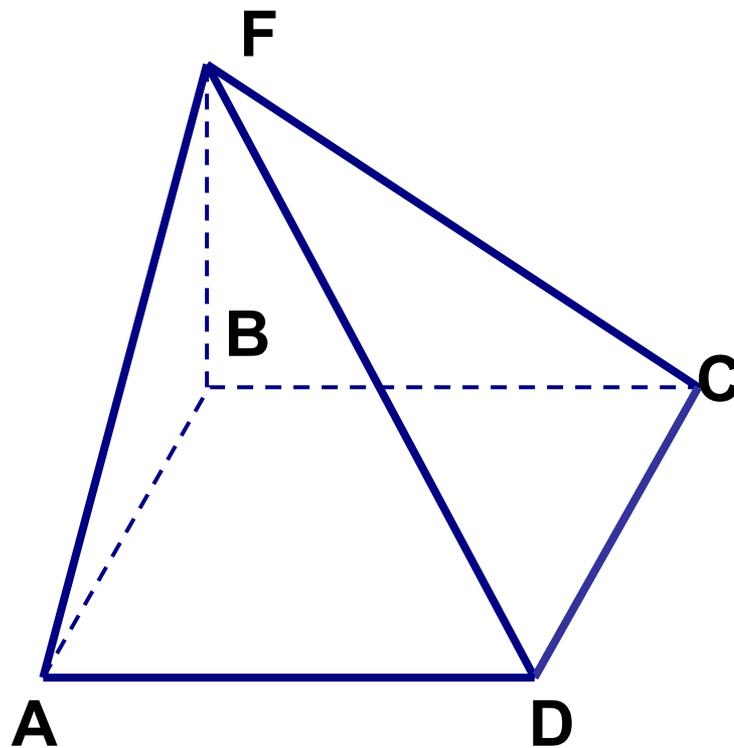
$FB \perp (ABC)$

ABCD - прямоугольник



$FB \perp (ABC)$

ABCD - параллелограмм

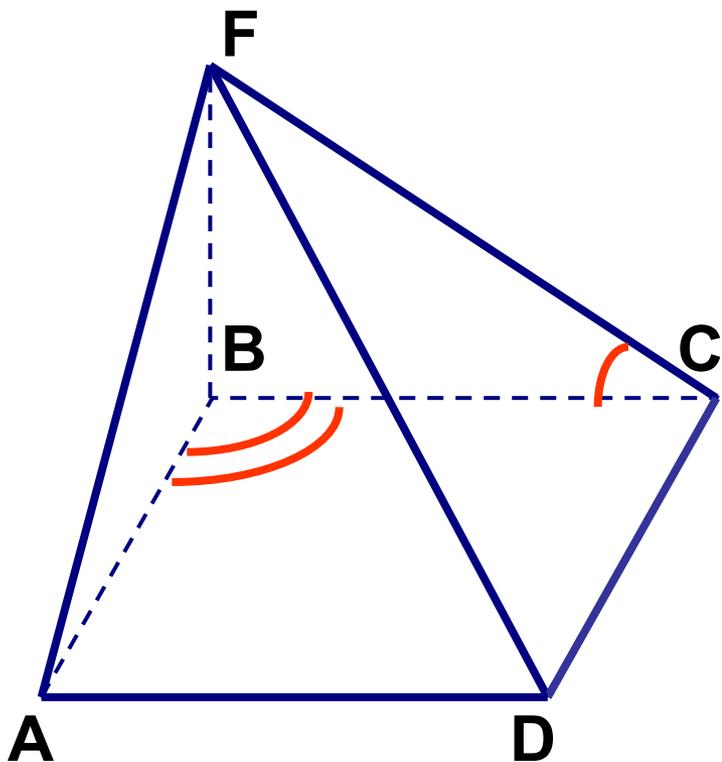


Найдите угол между (ABC) и (FDC);
Найдите угол между (AFB) и (FBC).



$FB \perp (ABC)$

ABCD - прямокутник

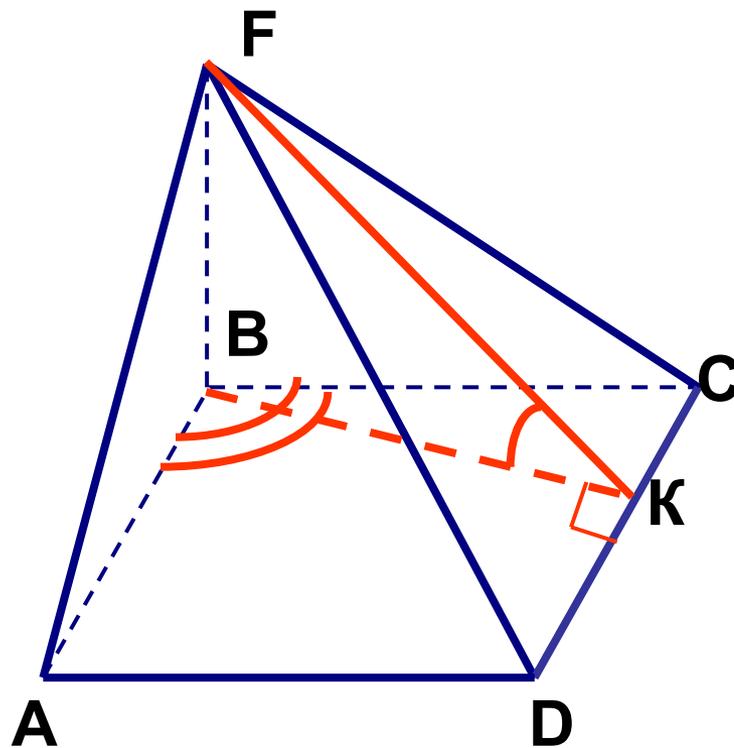


a) $\angle((ABC), (FCD)) = \angle FCB$

б) $\angle((AFB), (FBC)) = \angle ABC$

$FB \perp (ABC)$

ABCD - параллелограмм



a) $\angle((ABC), (FCD)) = \angle FKB$

б) $\angle((AFB), (FBC)) = \angle ABC$



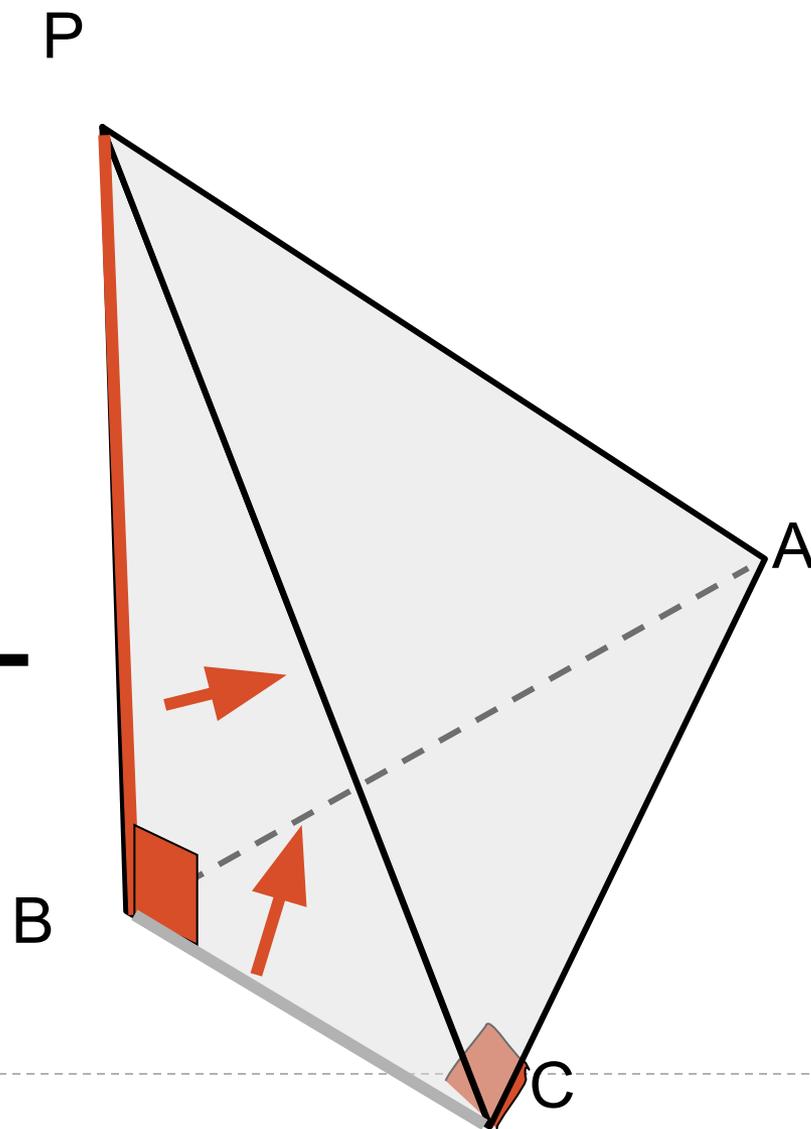
а) $PABC$ - пирамида;
 $\angle ACB = 90^\circ$;
 $(PB) \perp (ABC)$
 Доказать:
 $\angle PCB$ - линейный
 угол двугранного
 угла с ребром AC .

$$BC \perp AC$$

$$PB \perp (ABC)$$

$$PC \perp AC$$

$$\Rightarrow \angle PACB = \angle PCB$$



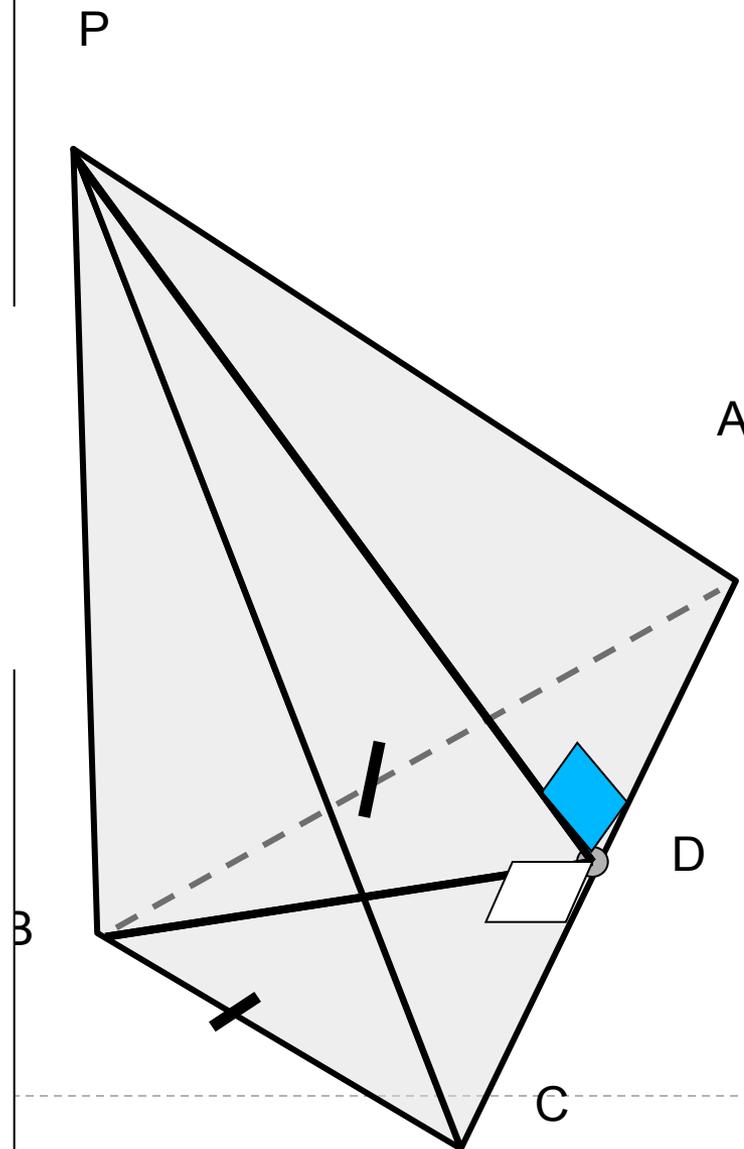
$\triangle ABC$ – равнобедренный, D – середина AC , значит: $BD \perp AC$.

$BD \perp AC$

$PB \perp (ABC)$

$\Rightarrow \angle PACB = \angle PDB$

$PD \perp AC$



с) $PAVCSD$ - пирамида;

$(PB) \perp (ABC)$;

$(BK) \perp (DC)$;

Доказать:

$\angle PKB$ - линейный
угол двугранного
угла с ребром CD .

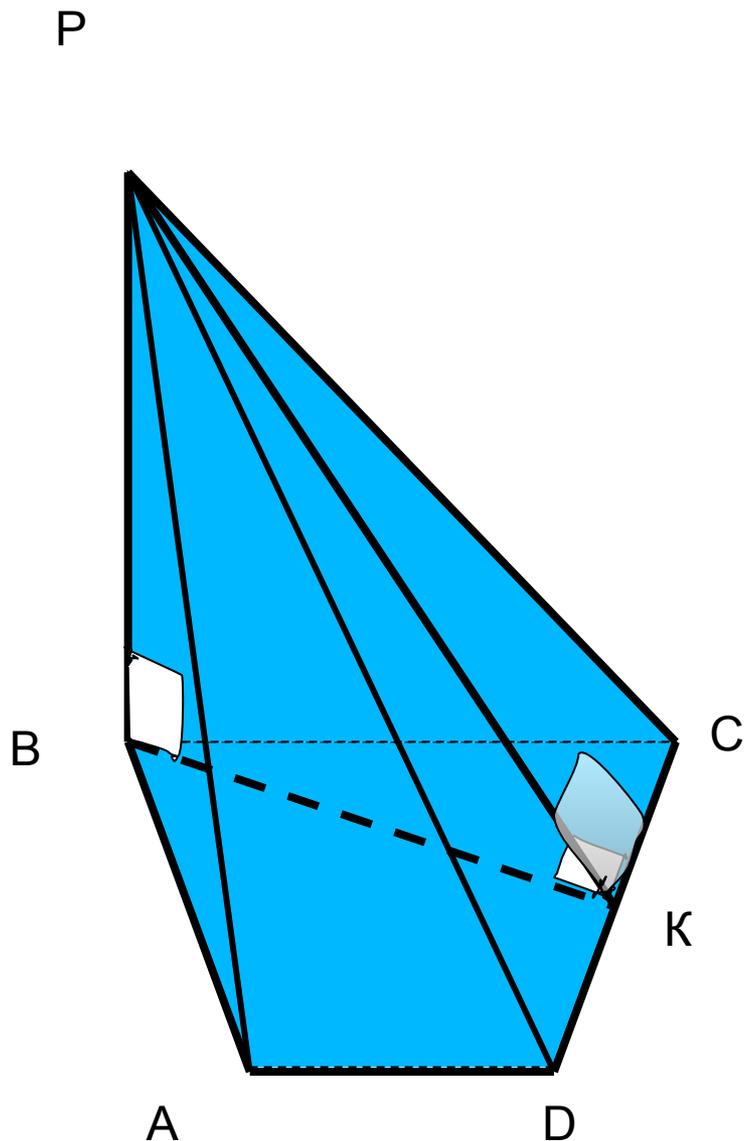
$BK \perp PC$

$PB \perp (ABC)$



$BK \perp DC$

$\Rightarrow \angle PCDB = \angle PKB$



в) Построить линейный угол двугранного угла с ребром AC ,
если в пирамиде $PABC$:
грань ABC – правильный треугольник, O – точка пересечения медиан
треугольника ABC , $(PO) \perp (ABC)$;

$\angle PACB$ - ?



ВК-медиана,

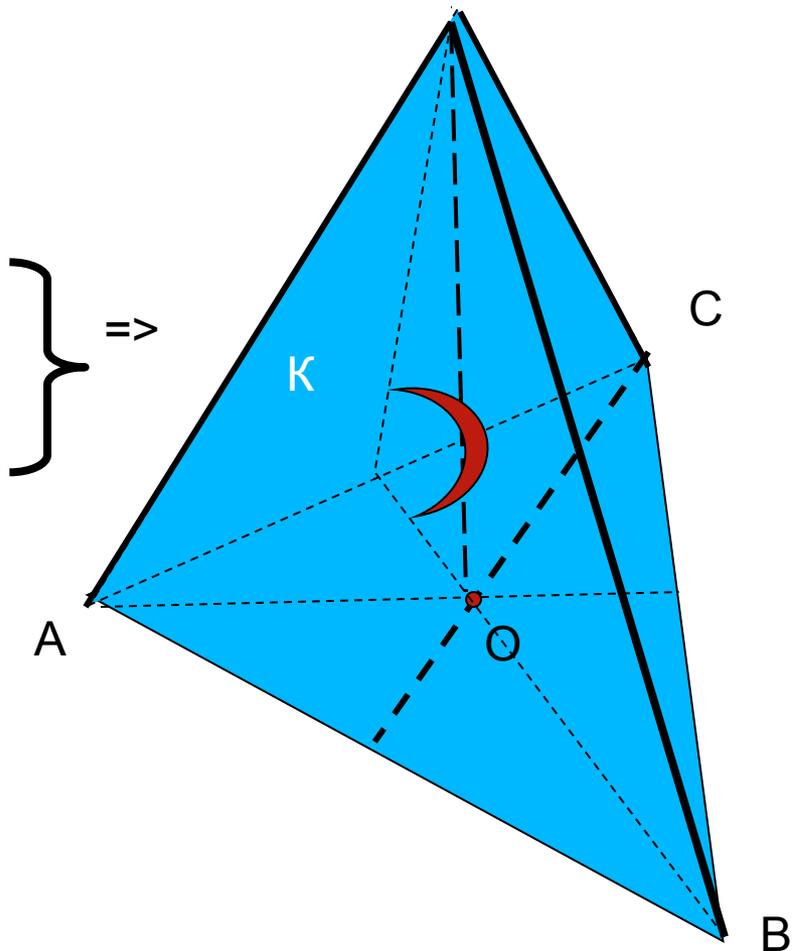
P

$\triangle ABC$ -правильный

\Rightarrow ВК - высота

$BO \perp AC$
 $PO \perp ABC$

$PK \perp AC$



$\angle PACB = \angle PKB$



с) Построить линейный угол двугранного угла с ребром AC, если в пирамиде PABC:

грань ABC –
правильный треугольник,
O – середина AB,
(PO) \perp (ABC);

$\angle PACO$ - ?

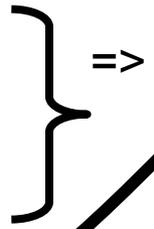


$AB=BC$

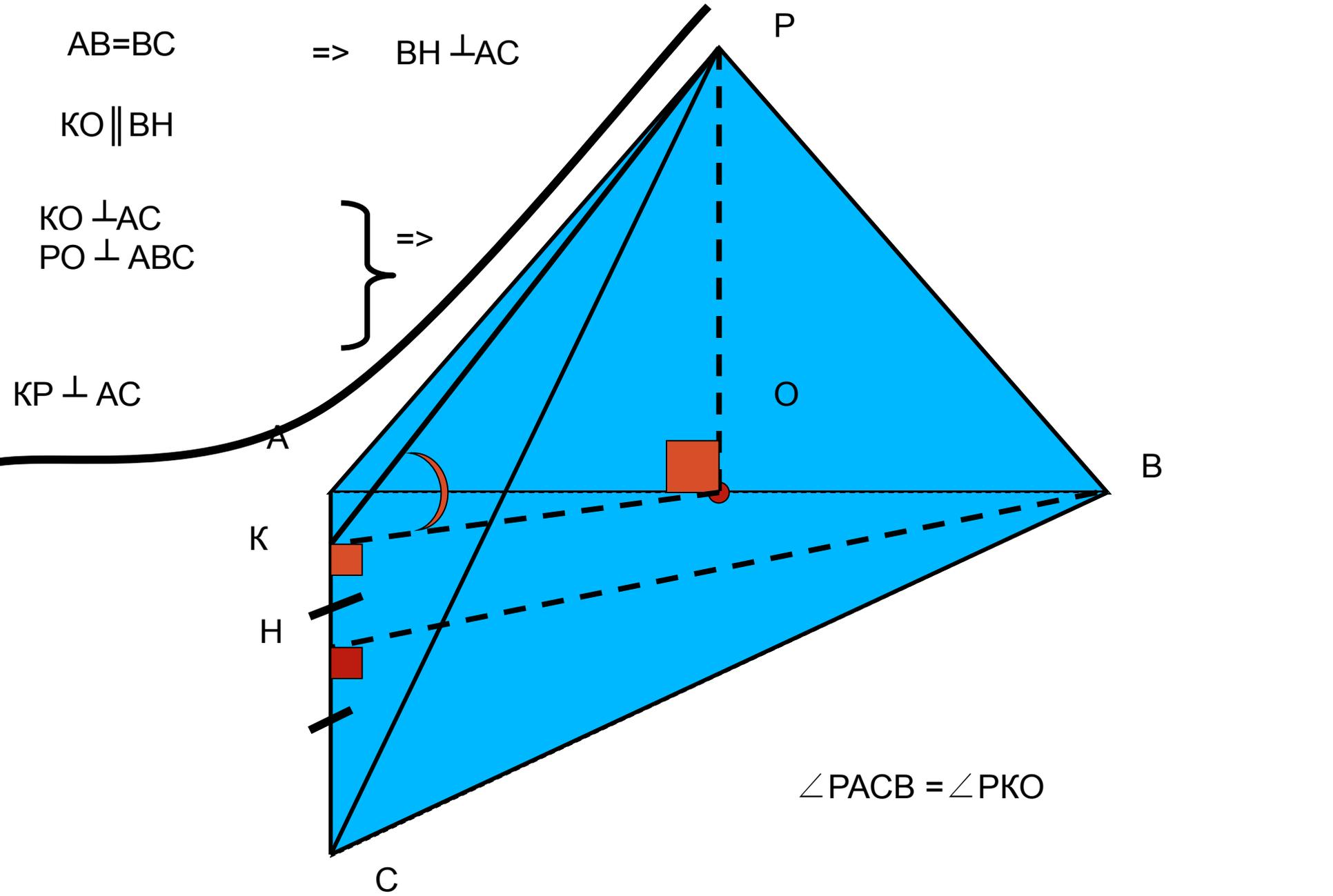
$\Rightarrow BH \perp AC$

$KO \parallel BH$

$KO \perp AC$
 $PO \perp ABC$



$KP \perp AC$



$\angle PACB = \angle PKO$



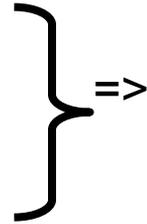
D) Дан прямоугольник ABCD
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC, если:
 $(PB) \perp (ABC)$;

$\angle BCDP - ?$



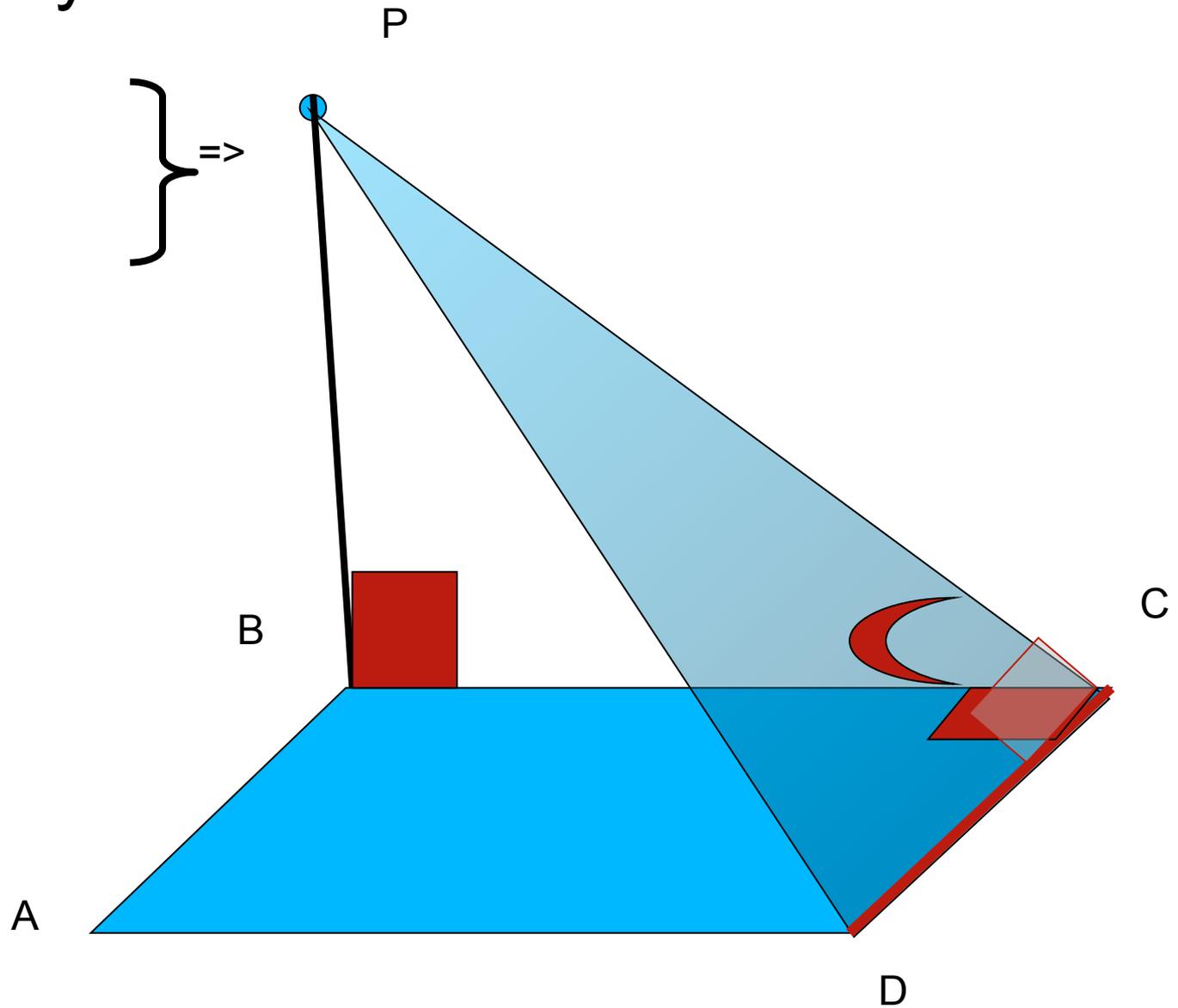
ABCD-прямоугольник

$$\begin{aligned} BC &\perp CD \\ PB &\perp ABC \end{aligned}$$



$$PC \perp CD$$

Значит:
 $\angle BCDP = \angle BCP$

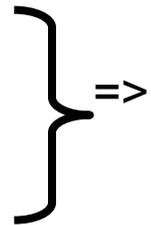


е) Дан прямоугольник $ABCD$
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC , если:
 $O \in AB$; $(PO) \perp (ABC)$.

$\angle ODP$ - ?



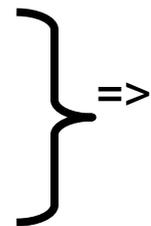
$PO \perp ABC$



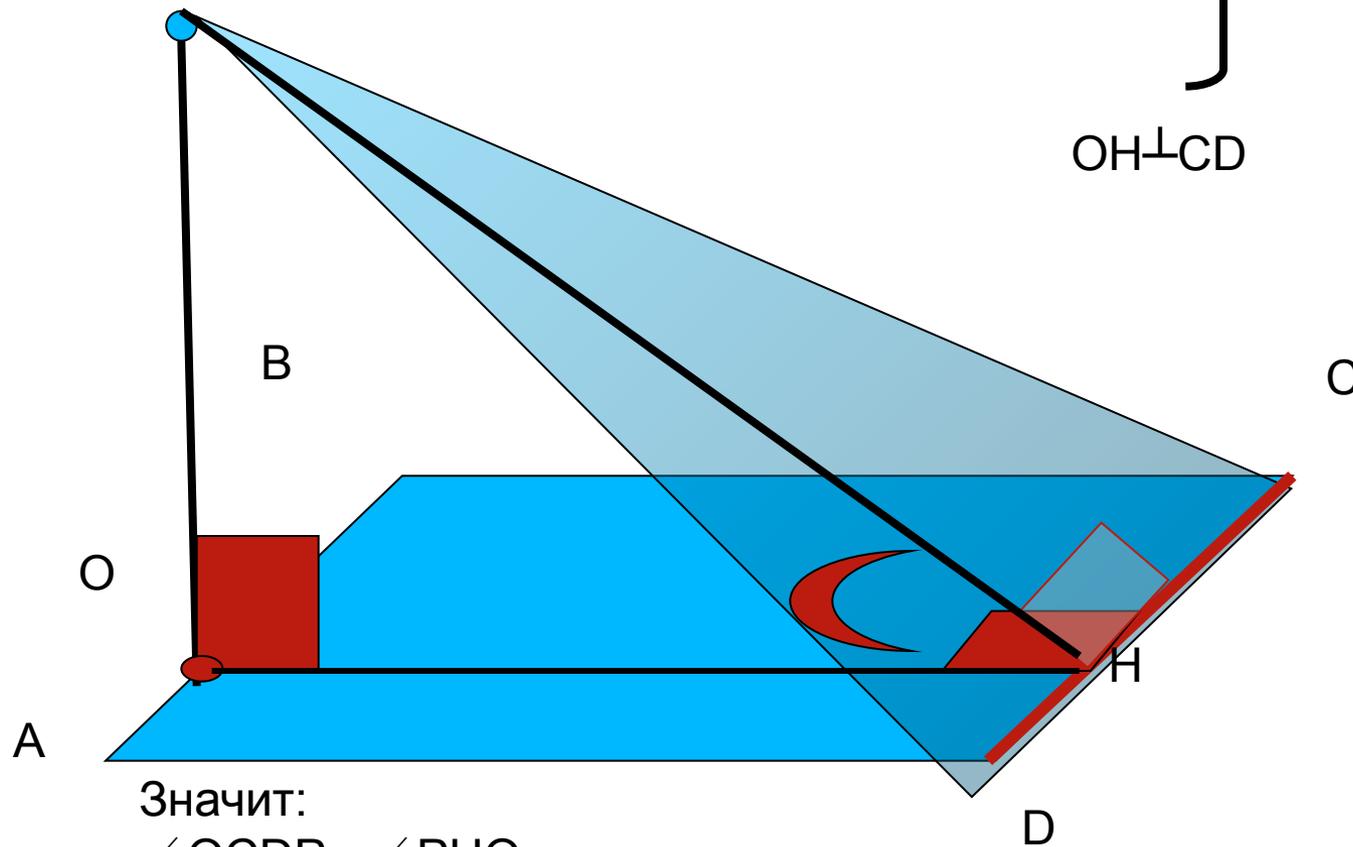
$PH \perp CD$

P

$AD \perp CD$
 $OH \parallel AD$



$OH \perp CD$



Значит:
 $\angle O C D P = \angle P H O$

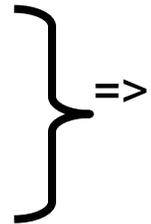


f) Дан прямоугольник $ABCD$
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC , если:
 O – точка пересечения
диагоналей $ABCD$,
 $(PO) \perp (ABC)$.

$\angle OCDP$ - ?



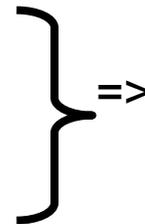
$PO \perp ABC$



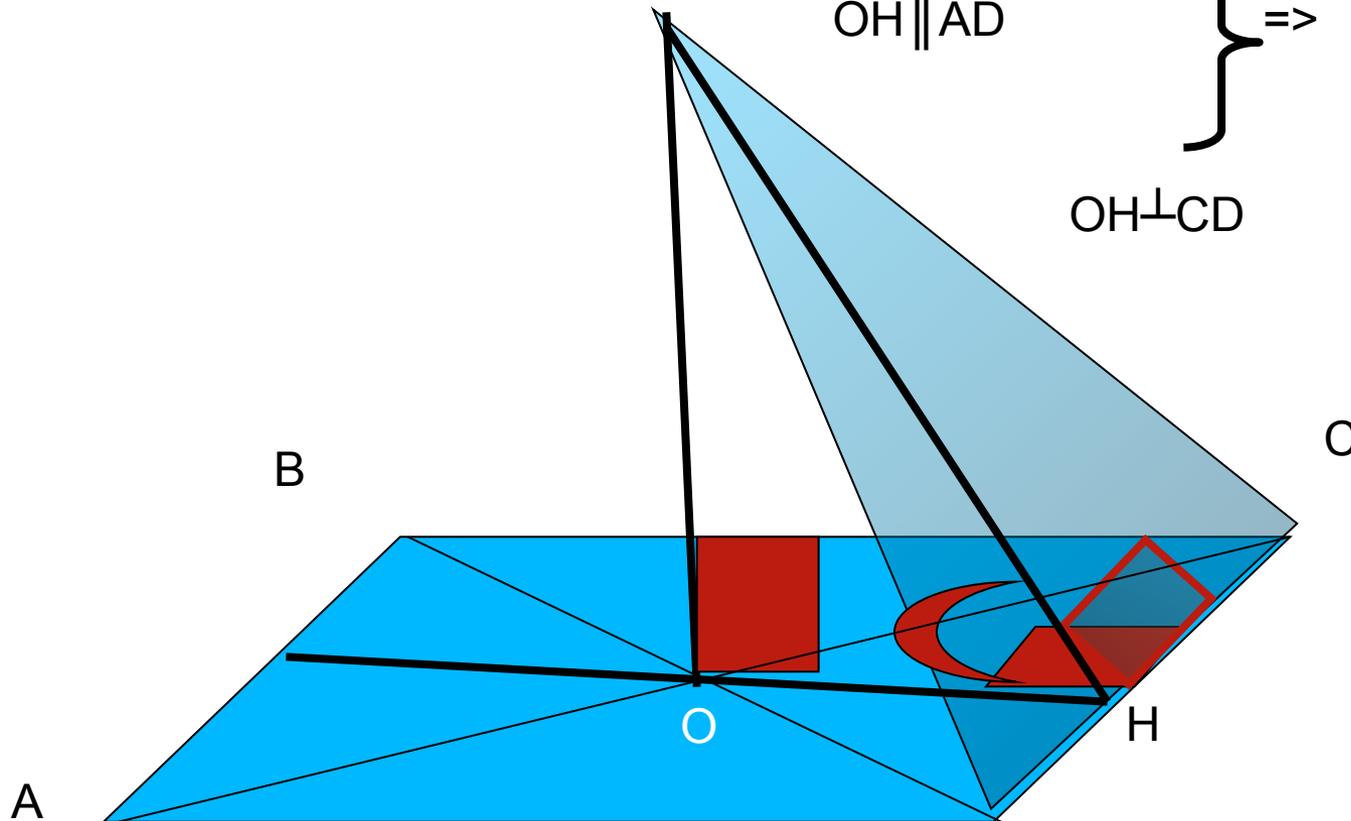
$PH \perp CD$

P

$AD \perp CD$
 $OH \parallel AD$



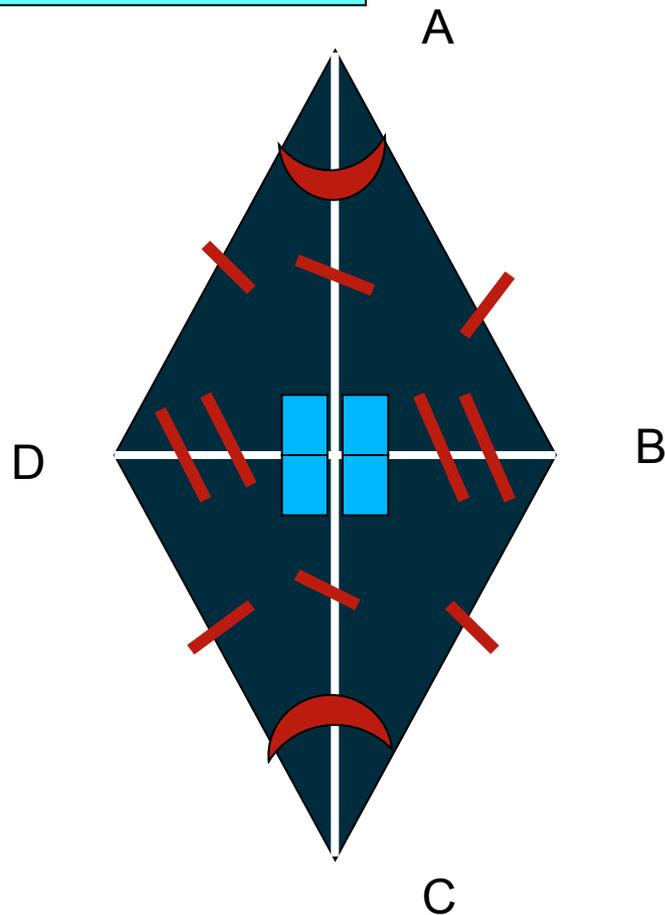
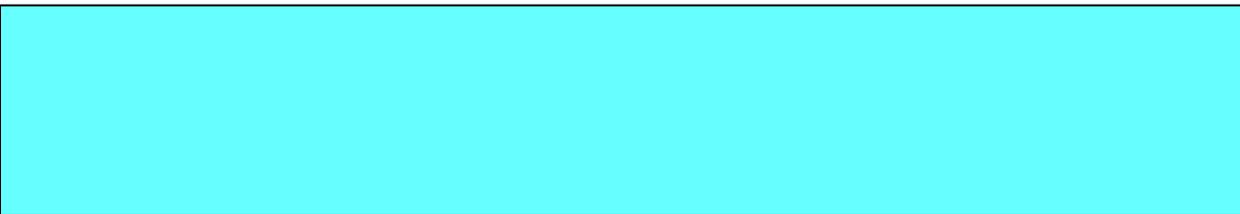
$OH \perp CD$



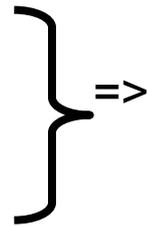
Значит:
 $\angle OCP = \angle PHO$



g) Дан ромб $ABCD$; $(PC) \perp (ABC)$.

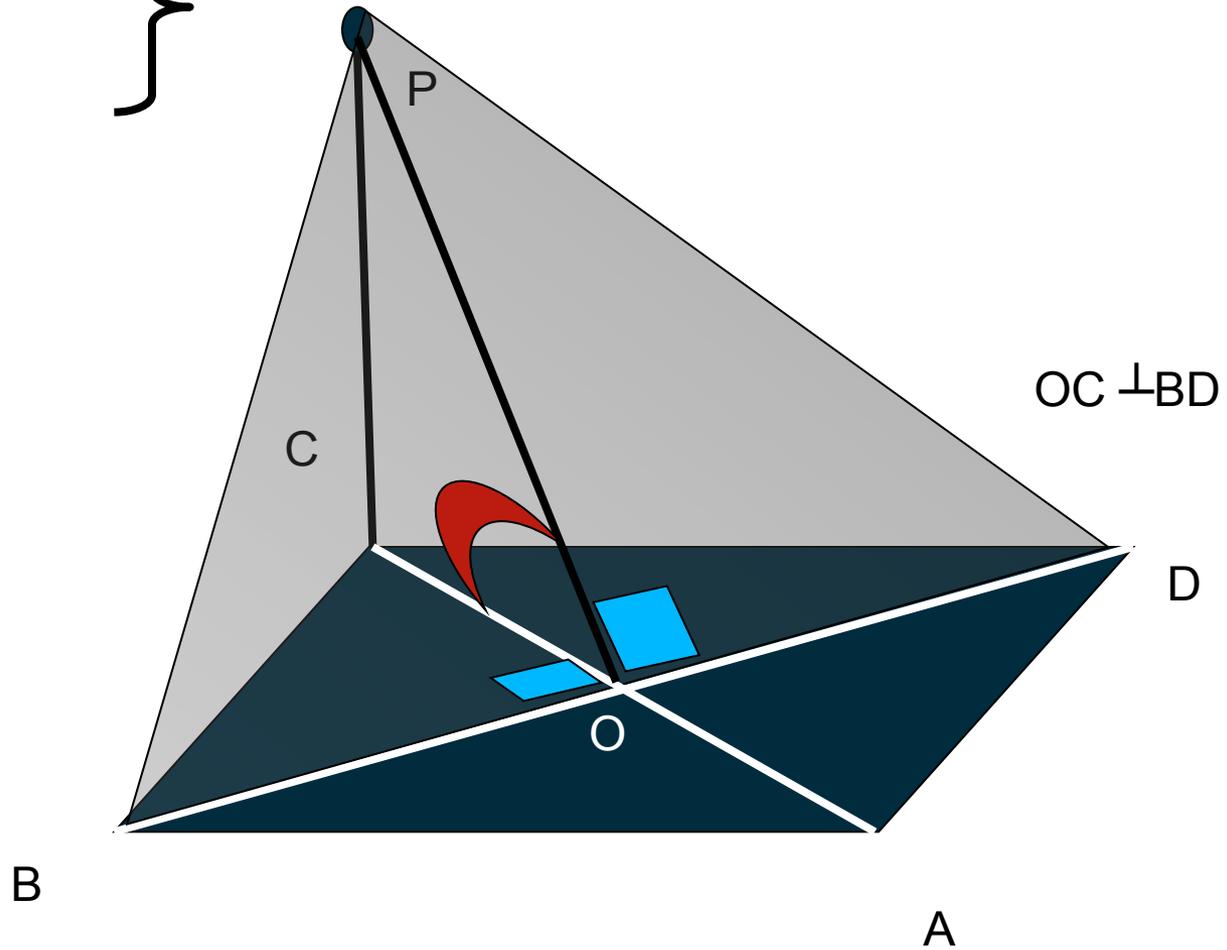


$PC \perp ABC$



$PO \perp BD$

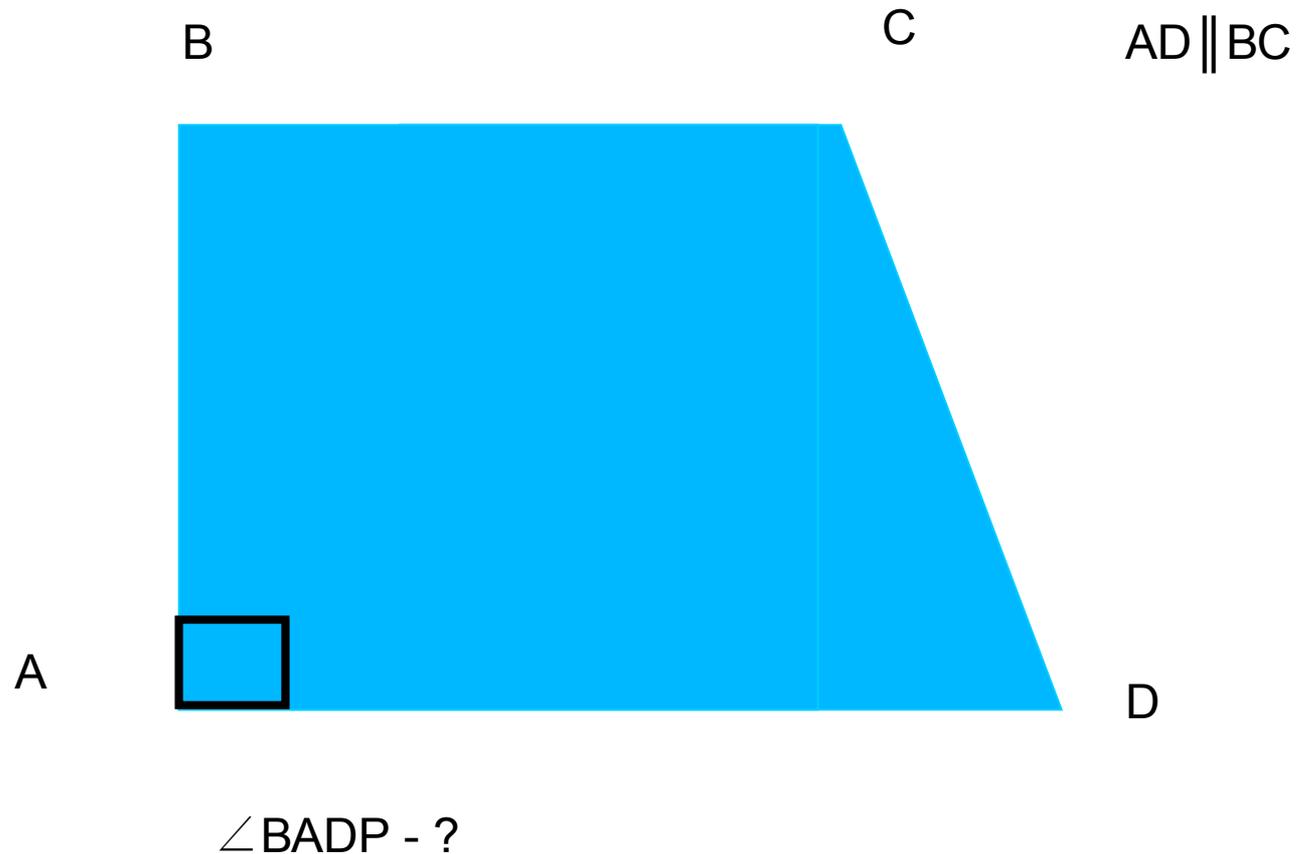
$ABCD$ - ромб $\Rightarrow CA \perp BD,$
 $CA \cap BD = O \Rightarrow$



Значит:
 $\angle PBDC = \angle POC$



i) Дана трапеция $ABCD$; $\angle \underline{BAD} = 90^\circ$;
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AD ,
если: $(PB) \perp (ABC)$.

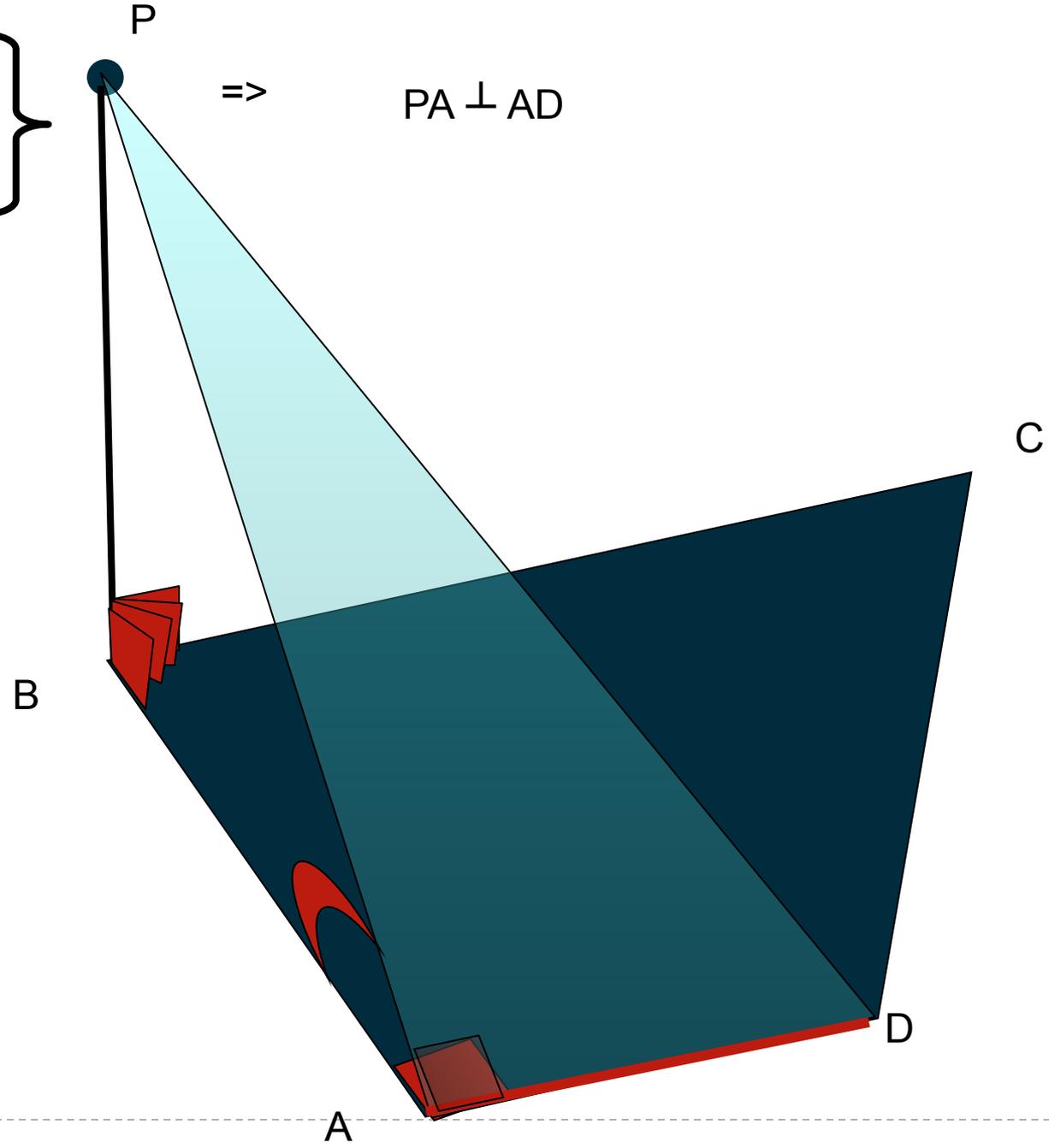


$BA \perp AD$
 $PB \perp ABC$



\Rightarrow

$PA \perp AD$



Значит:
 $\angle BADP = \angle BAP$



к) Дана трапеция ABCD;

$$\angle BAD = 90^\circ;$$

Построить линейный угол

двугранного угла с

ребром AD, если:

$$O \in BC; (PO) \perp (ABC).$$

$$\angle BADP - ?$$



$PO \perp ABC$

$PK \perp AD$

$AB \perp AD$
 $OK \parallel AB$

$OK \perp AD$

B

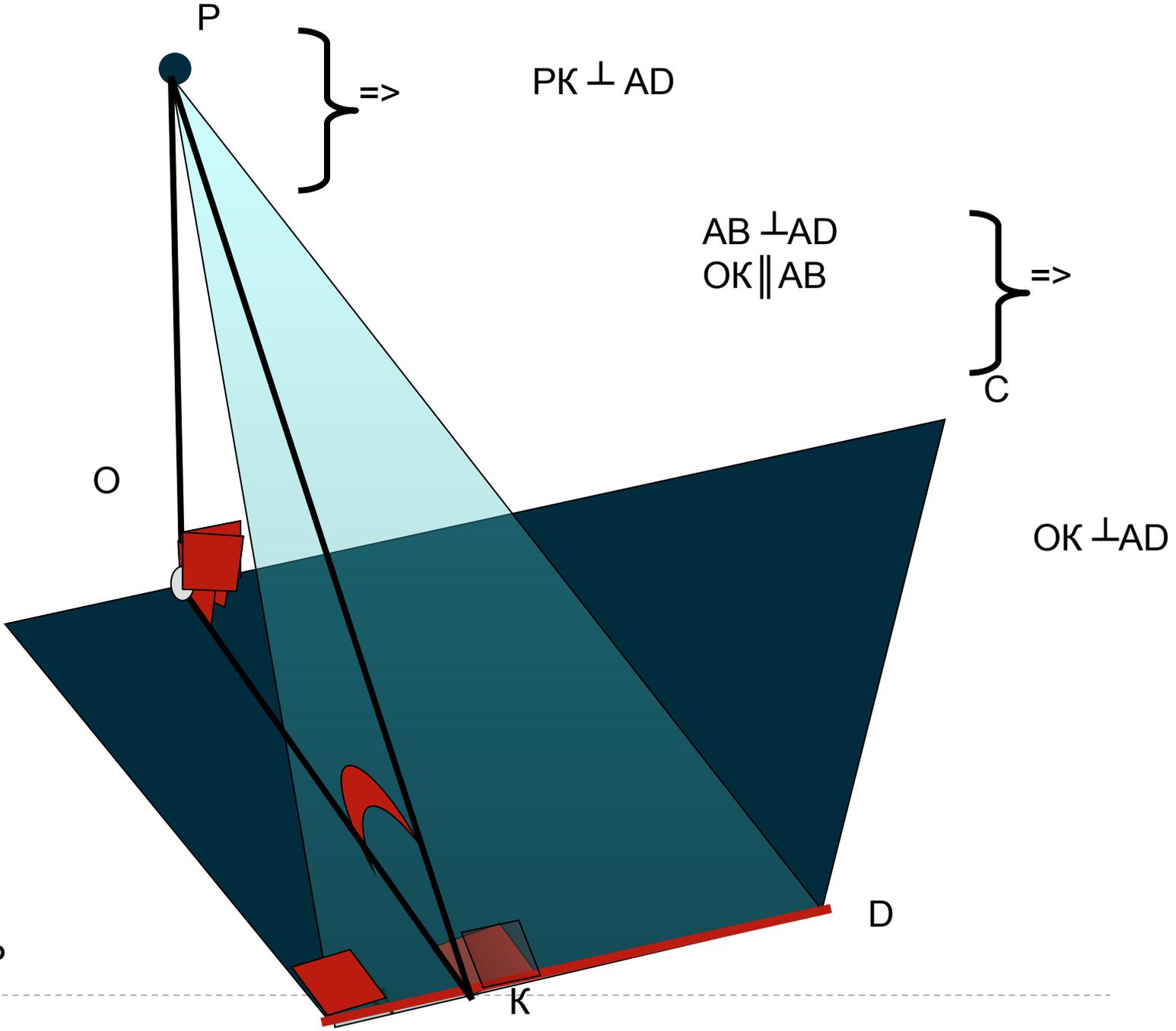
O

P

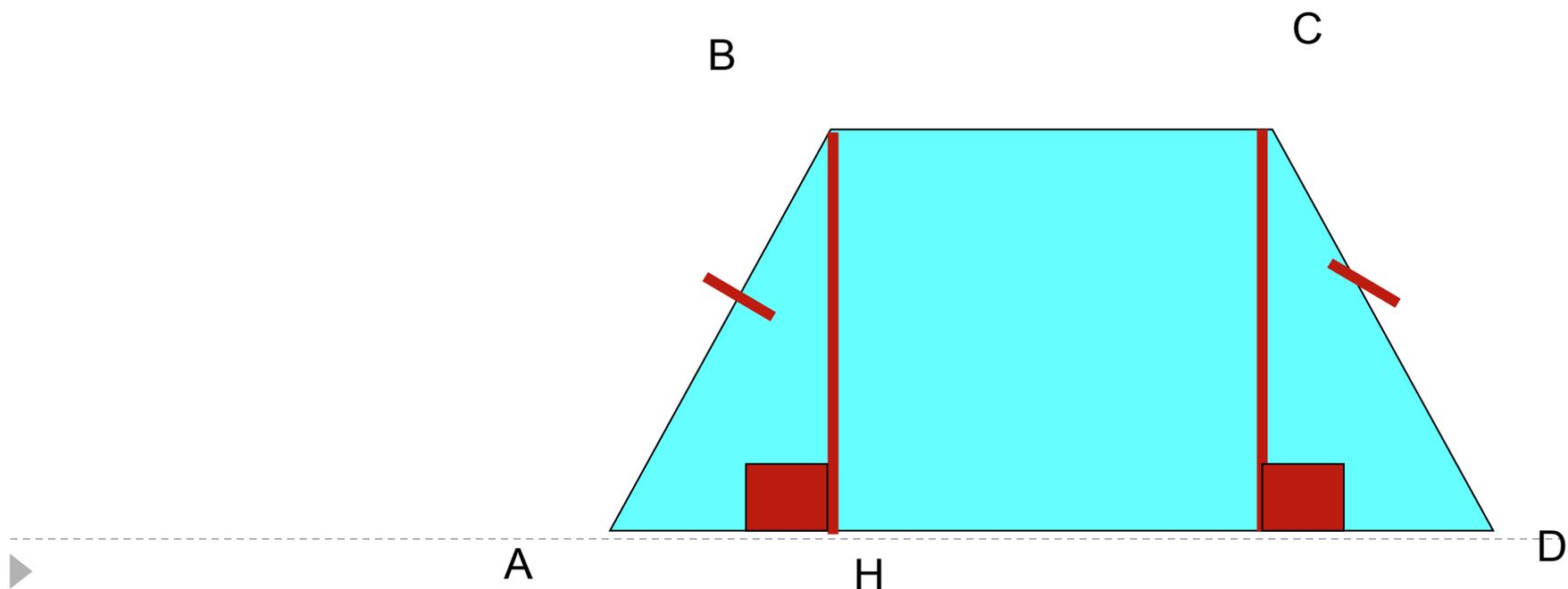
D

K

Значит:
 $\angle BADP = \angle OKP$



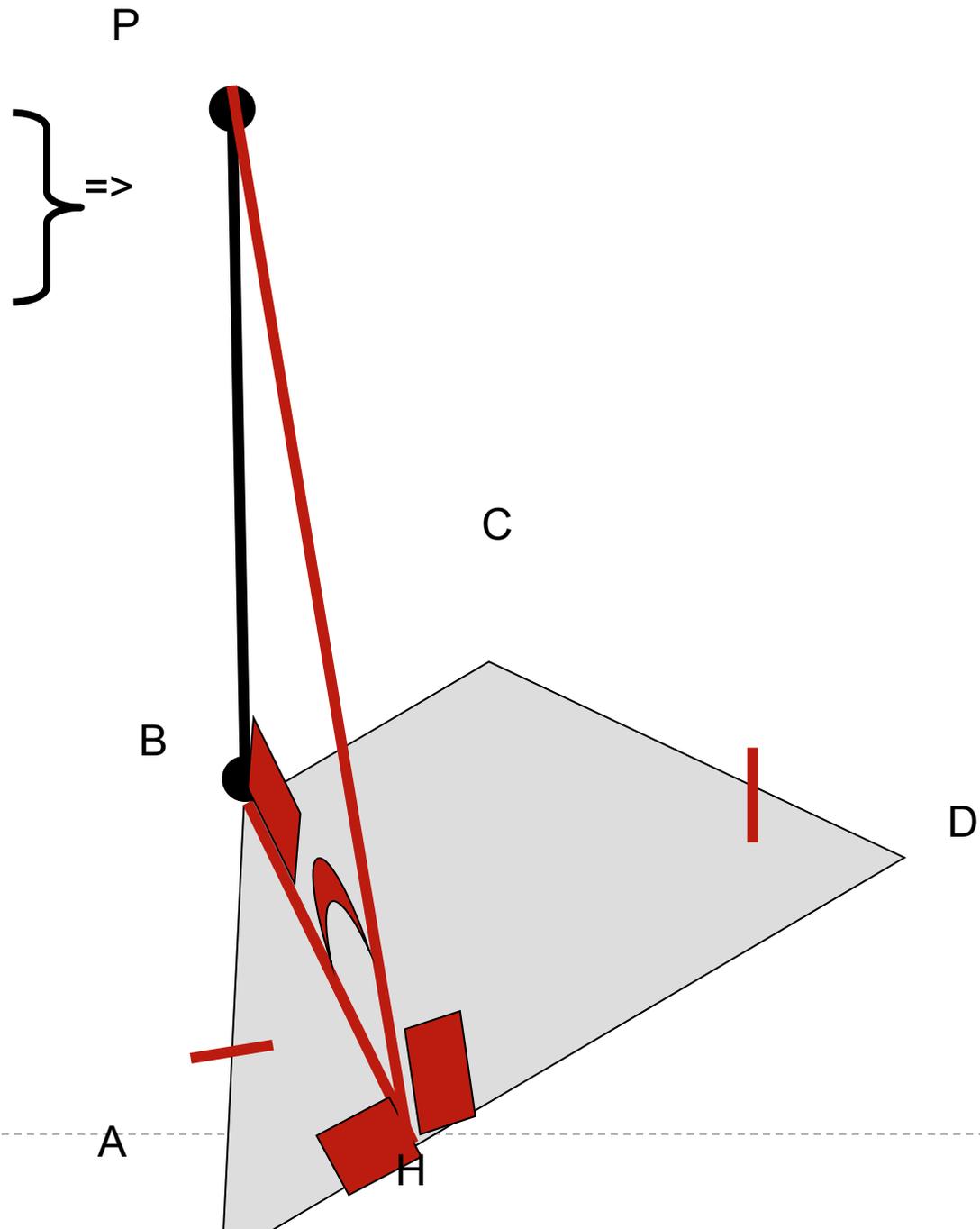
I) Дана трапеция ABCD.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AD ,
если: $AB=CD$,
 $(PB) \perp (ABC)$.



$BH \perp AD$
 $PB \perp ABC$

$PH \perp AD$

Значит:
 $\angle BADP = \angle BHP$



m) Дана трапеция ABCD.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром AD ,
если:

ABCD — равнобокая трапеция;
 $AB=CD$, $(PC) \perp (ABC)$;



4. Вычислительные задачи.



а) $PABC$ — пирамида;
найти величину двугранного угла
с ребром AC , если:

$$(PB) \perp (ABC); \angle ACB = 90^\circ;$$

$$BC = PB = 4$$



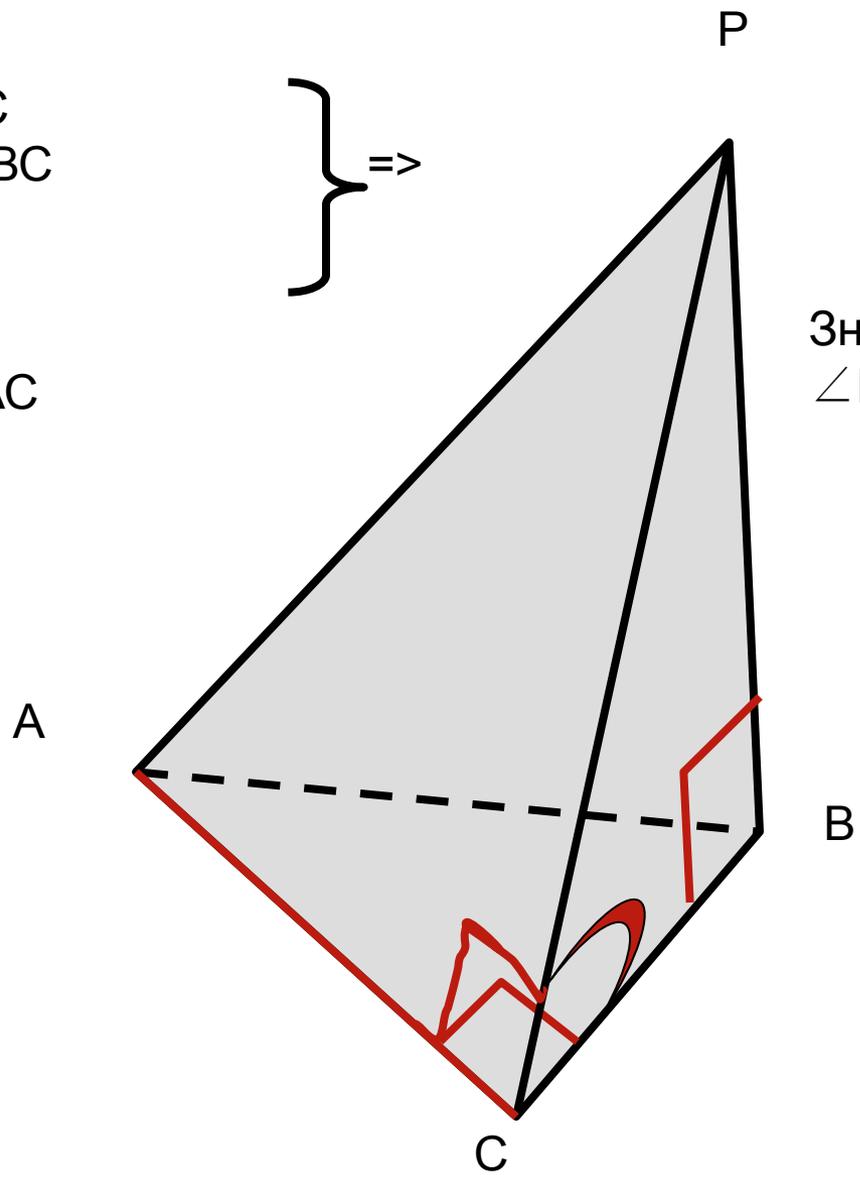
1)

$AC \perp BC$
 $PB \perp ABC$

} \Rightarrow

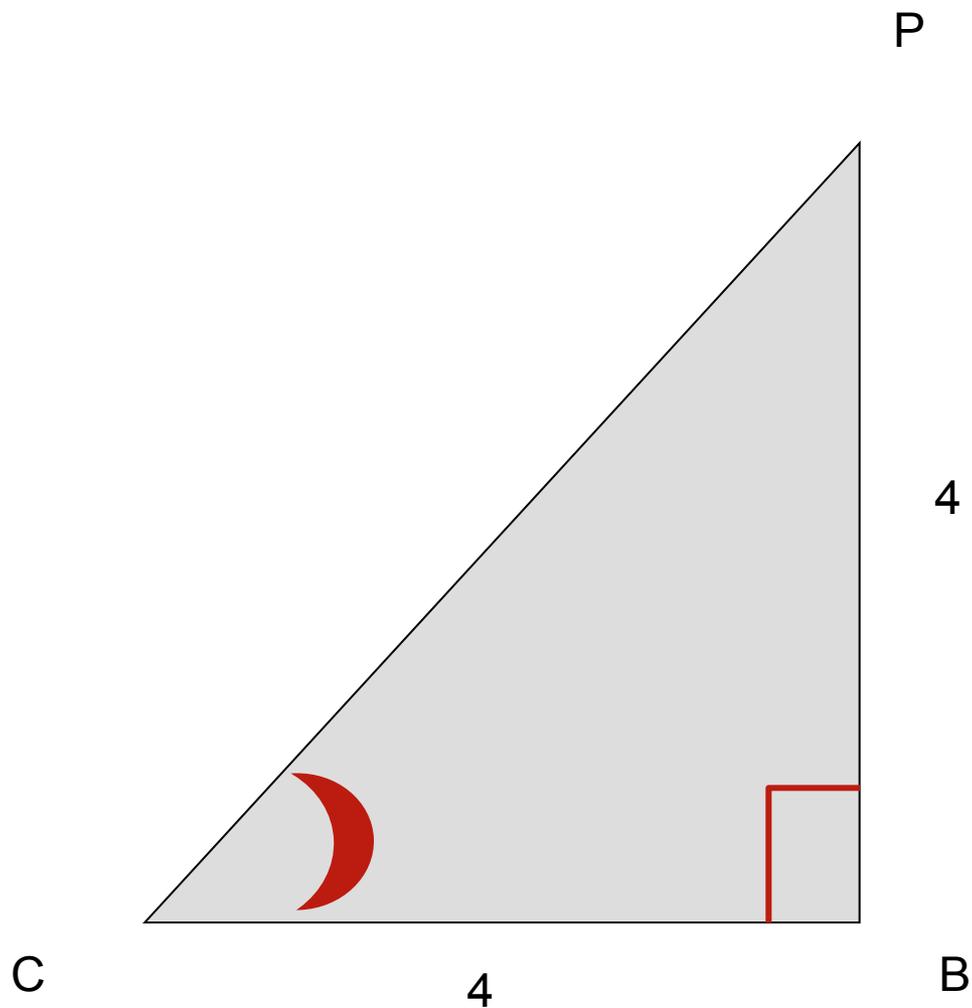
$PC \perp AC$

Значит:
 $\angle BACP = \angle BCP$



2) $BP=BC \Rightarrow \triangle CBP$ - равнобедренный,

$$\angle C = \angle P = 45^\circ$$



Ответ: $\angle BCP = 45^\circ$



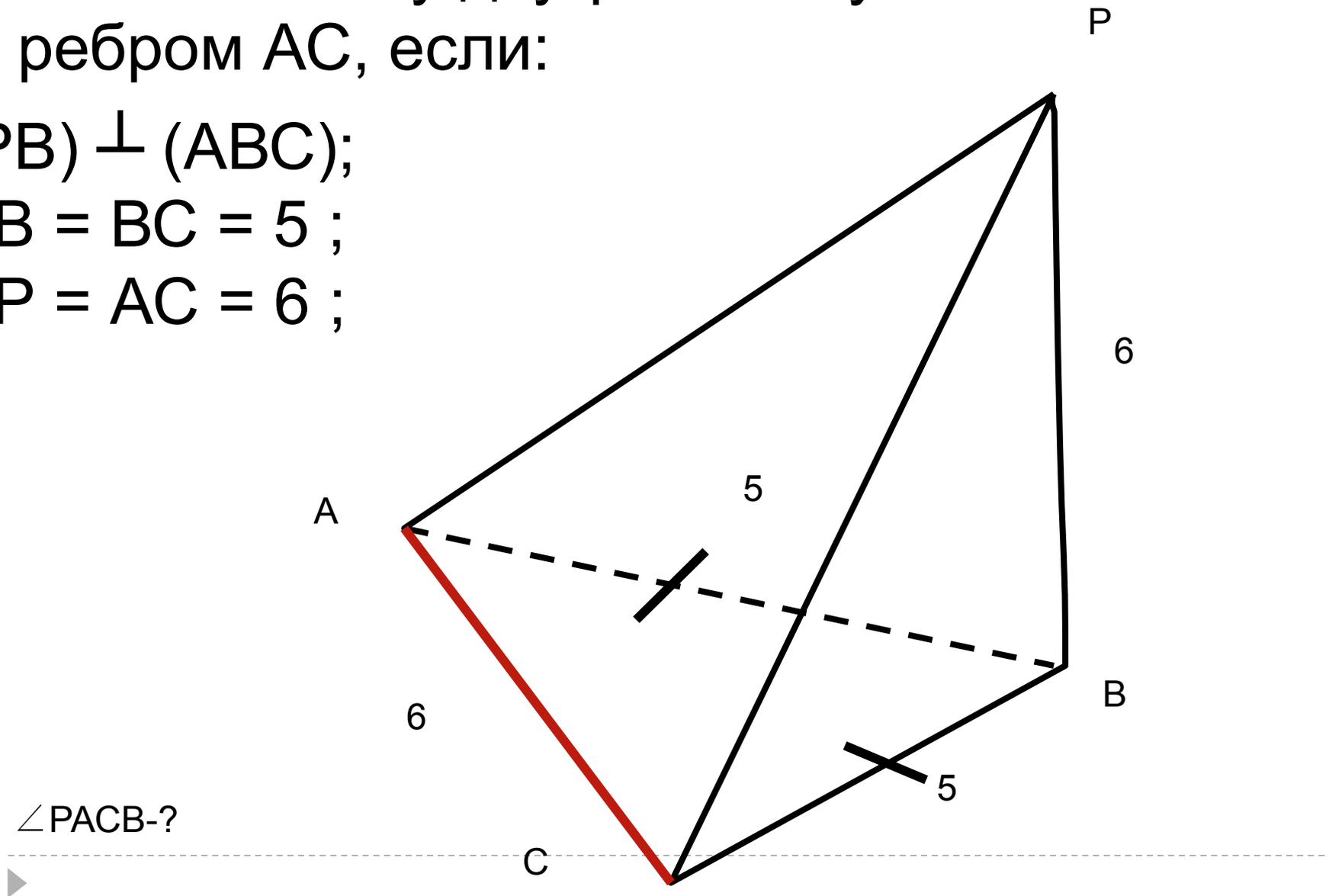
в) $PABC$ — пирамида;

найти величину двугранного угла
с ребром AC , если:

$$(PB) \perp (ABC);$$

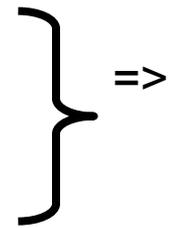
$$AB = BC = 5;$$

$$BP = AC = 6;$$



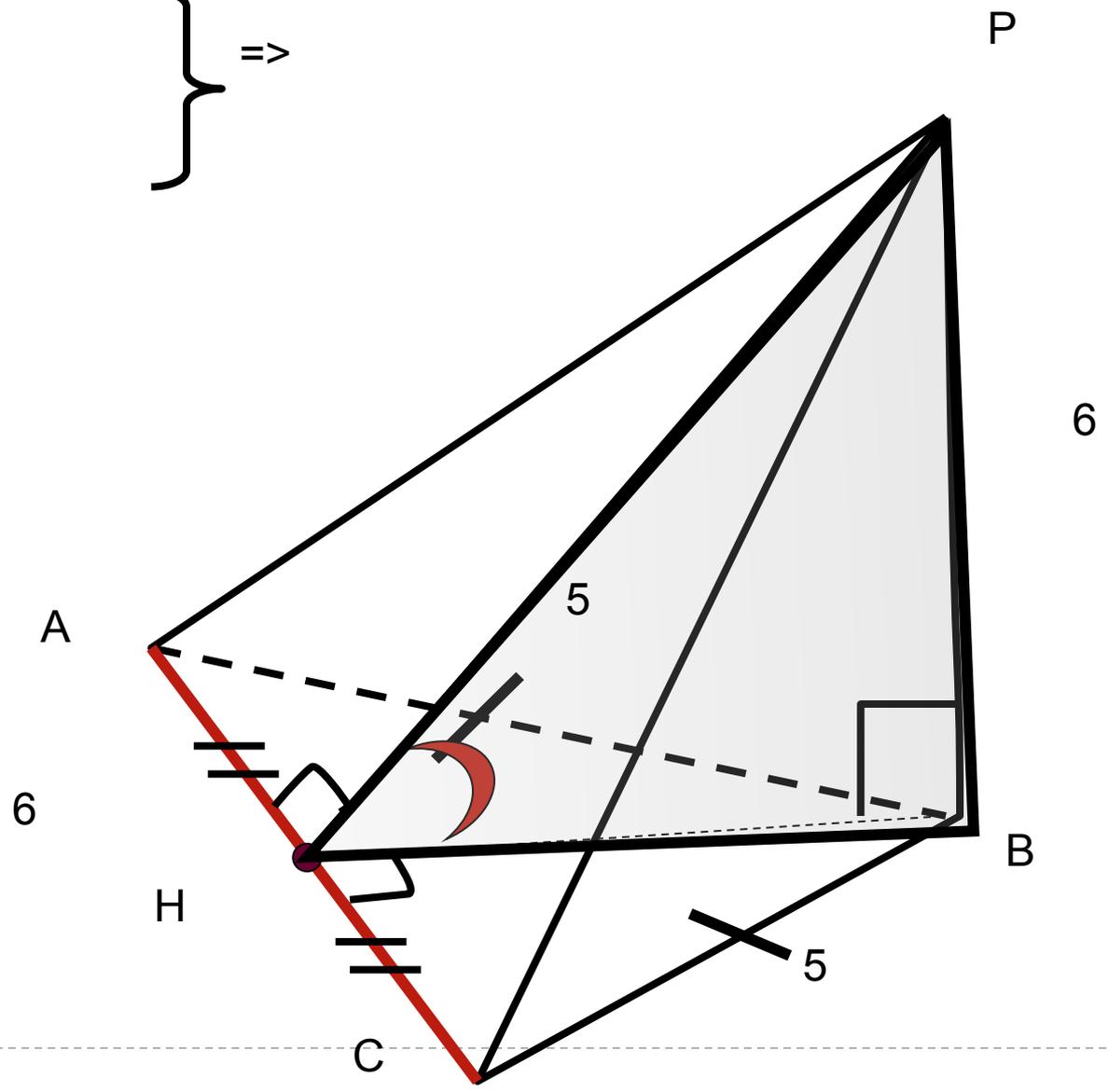
1)

$$\begin{aligned} AC &\perp BH \\ PB &\perp ABC \end{aligned}$$



$$PH \perp AC$$

Значит:
 $\angle BACP = \angle BHP$



2)

$\triangle ABC$ - равнобедренный,

BH - высота,

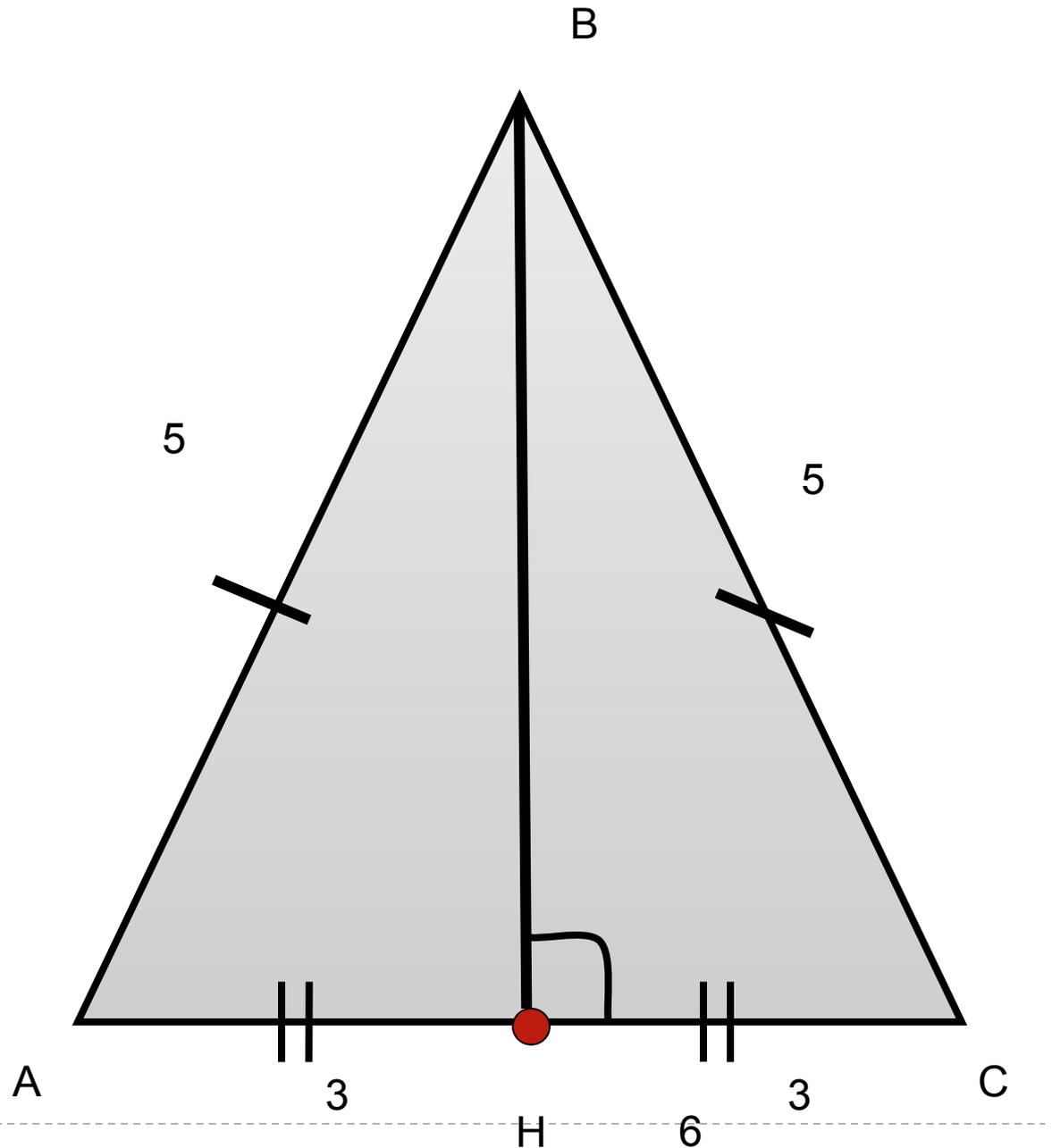
значит: BH - медиана,

$AH=HC=3$,

$\triangle BHC$ - прямоугольный,

$BH^2=BC^2-HC^2$,

$BH=4$



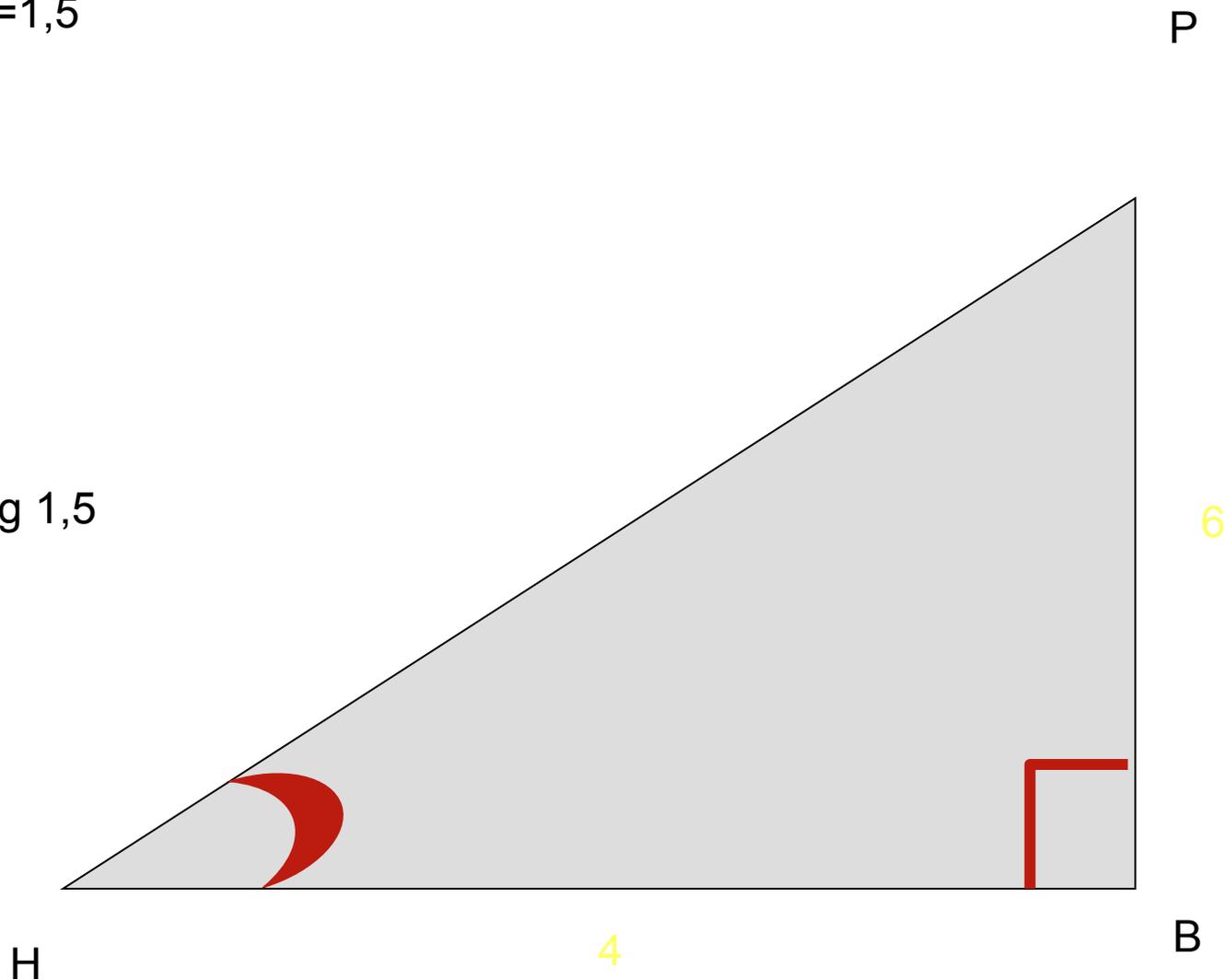
3) $\triangle PBN$ - прямоугольный,

$$\operatorname{tg} \angle N = PB / BN,$$

$$\operatorname{tg} \angle N = 6/4 = 1,5$$

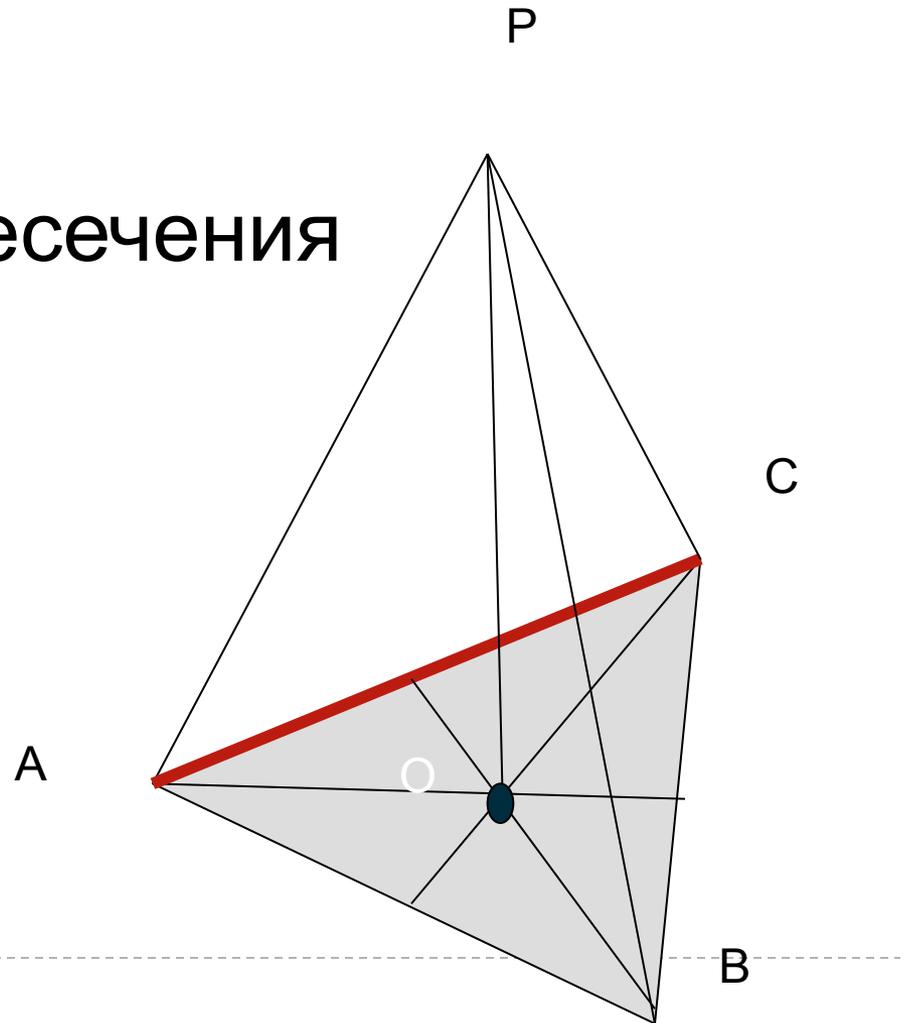
Ответ:

$$\angle PACB = \operatorname{arctg} 1,5$$



с) $PAVC$ — пирамида;
найти величину двугранного угла
с ребром AC , если:

$\triangle ABC$ — правильный
треугольник;
 $AB = 6$; O — точка пересечения
медиан ABC ;
 $(PO) \perp (ABC)$;
 $PO = \sqrt{3}$



$\angle PACB = ?$

2) $\triangle ABC$ - правильный,
O - точка пересечения
медиан, значит:
 $OB=2OK$.

Найдем BK.

$\triangle BKC$:

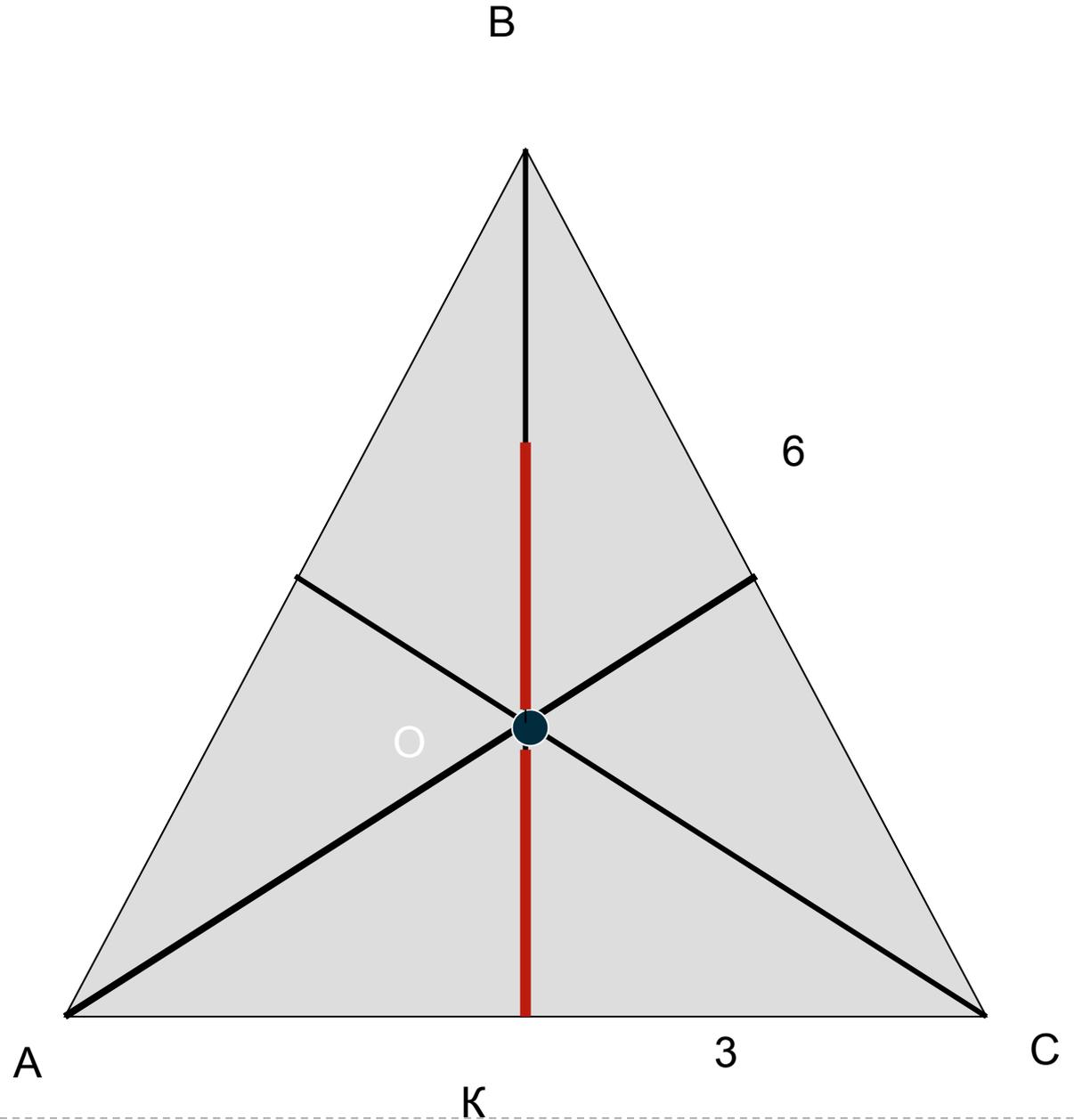
$$BK^2 = BC^2 - KC^2;$$

$$BK^2 = 27;$$

$$BK = 3\sqrt{3}$$

$$BK = 3OK,$$

$$OK = \sqrt{3}$$



1)

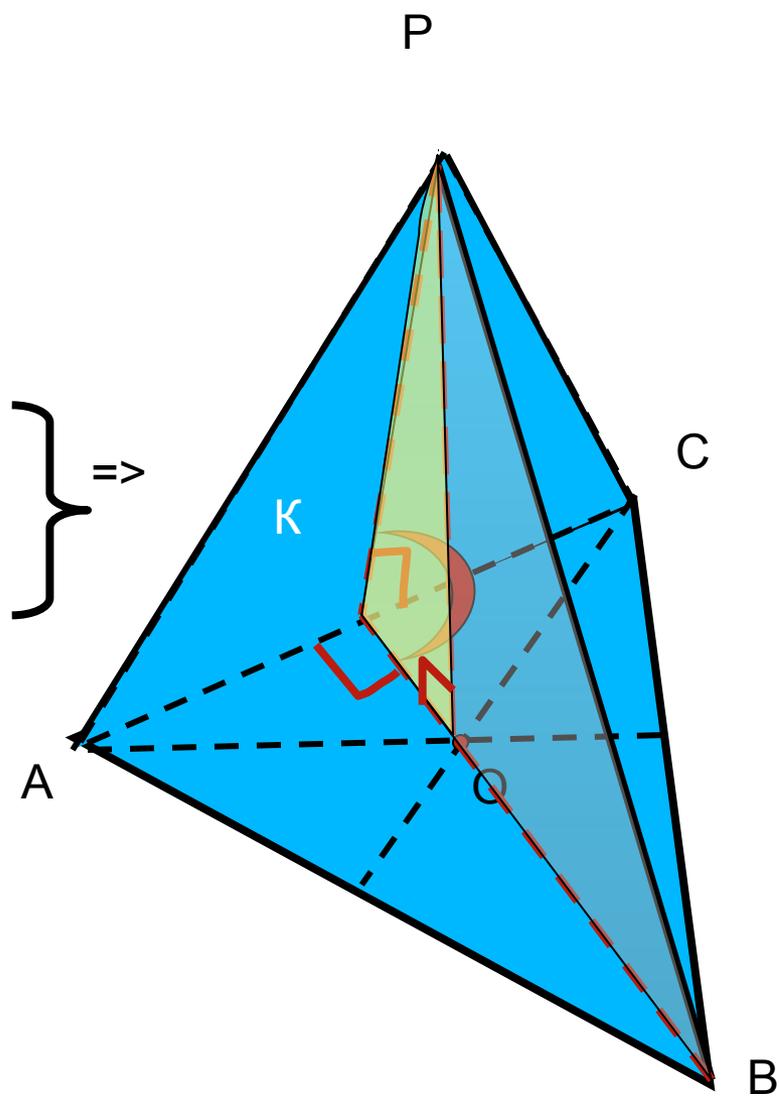
ВК - медиана,

$\triangle ABC$ - правильный

\Rightarrow ВК - высота

$BO \perp AC$
 $PO \perp ABC$

$PK \perp AC$



$$PO = \sqrt{3}$$

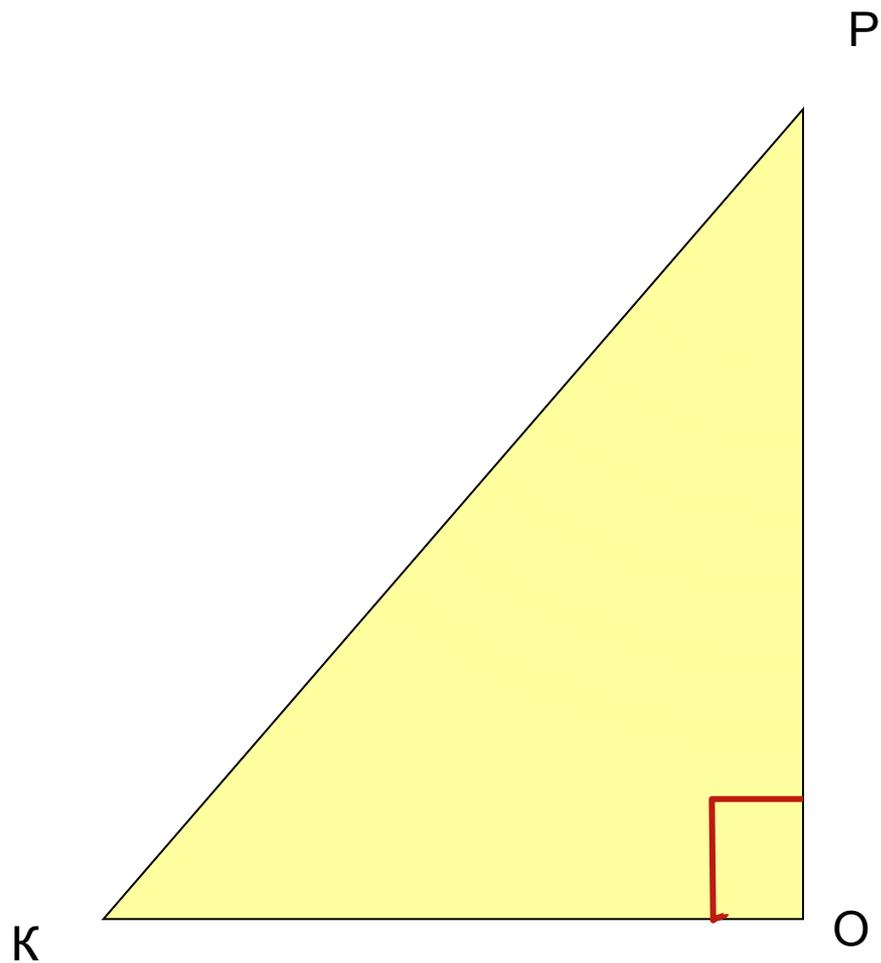
$$KO = \sqrt{3}$$

$$\angle PACB = \angle PKB$$



3) $\triangle POK$ - прямоугольный,
 $\angle O = 90^\circ$, $PO = OK$,
значит $\angle P = \angle K = 45^\circ$.

Ответ:
 $\angle PACB = 45^\circ$



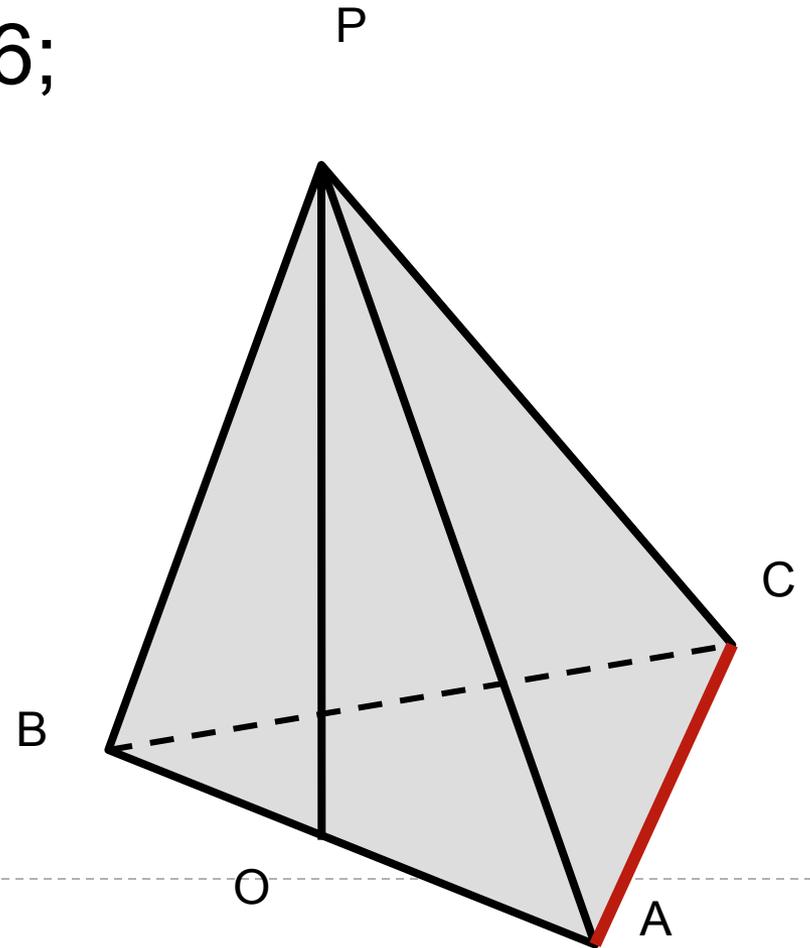
D) $PAVC$ — пирамида;
найти величину двугранного угла
с ребром AC , если:

ABC — правильный треугольник;

O — середина AB ; $AB = 6$;

$(PO) \perp (ABC)$;

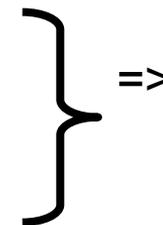
$PO = 4$;



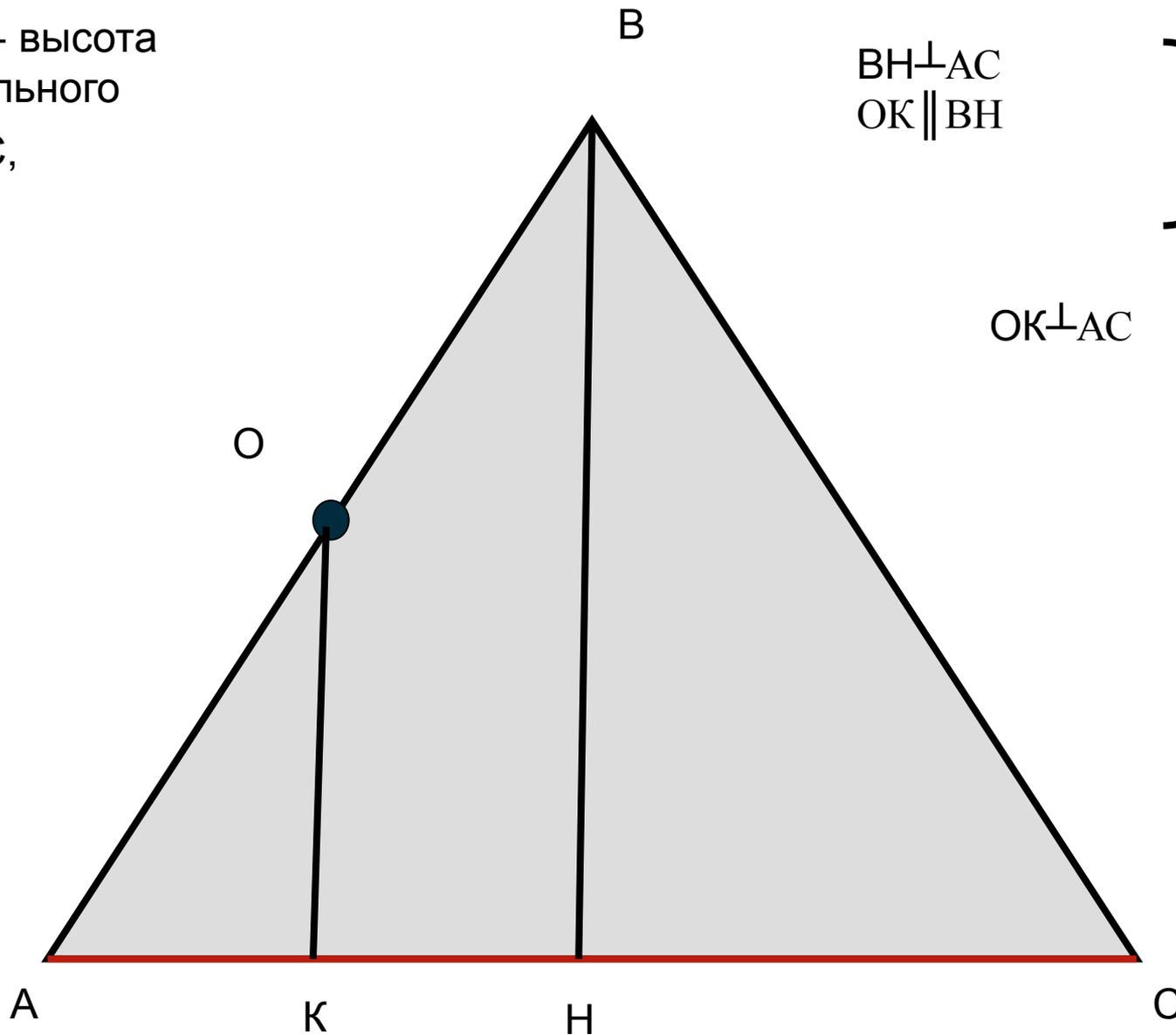
$\angle PACB = ?$

1) BH - высота
правильного
 $\triangle ABC$,

$BH \perp AC$
 $OK \parallel BH$

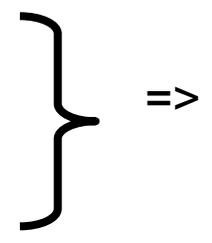


$OK \perp AC$

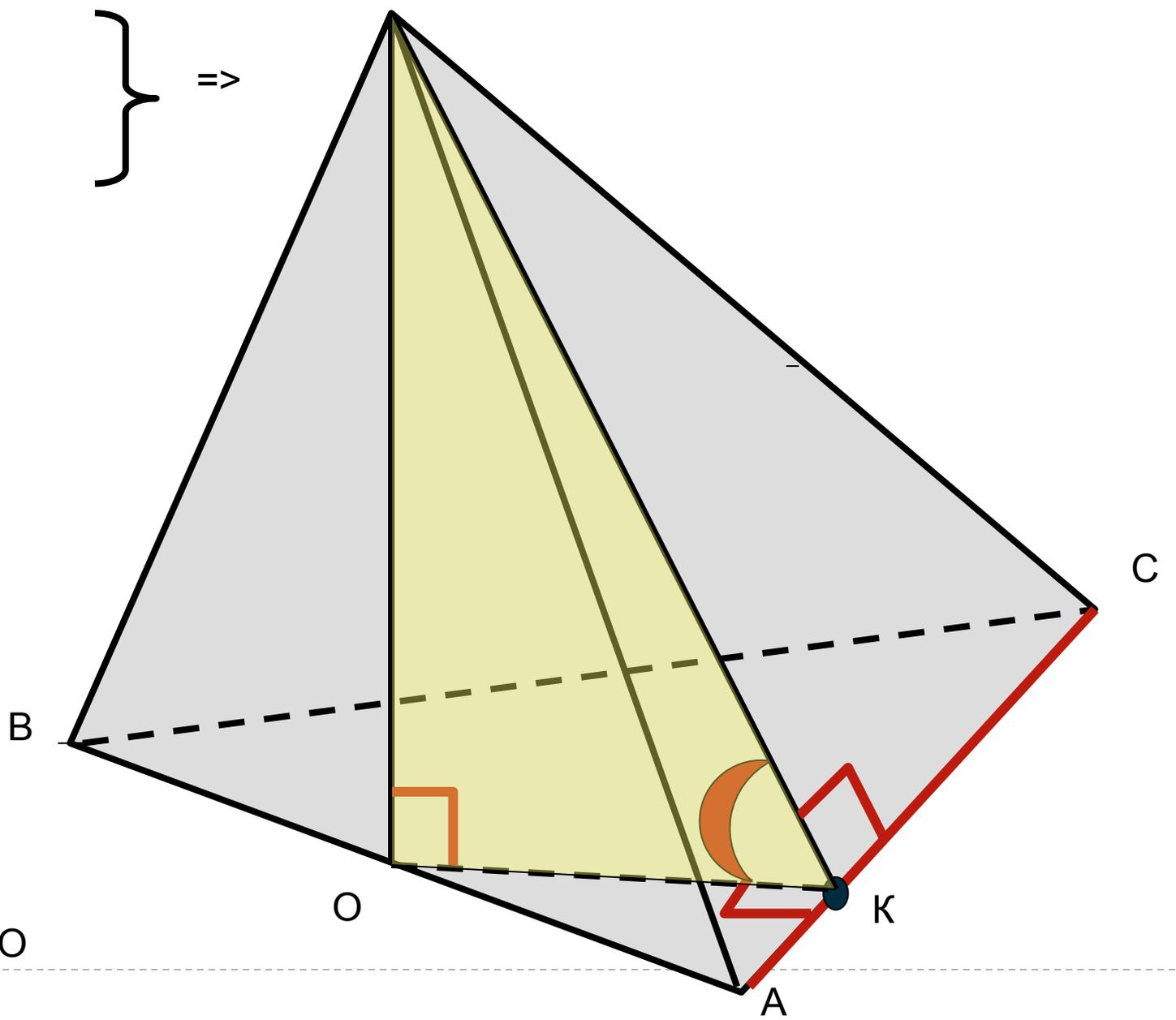


2)

$OK \perp AC$
 $PO \perp ABC$



$PK \perp AC$



$\angle PACB = \angle PKO$



3) BH - высота
правильного
 $\triangle ABC$,

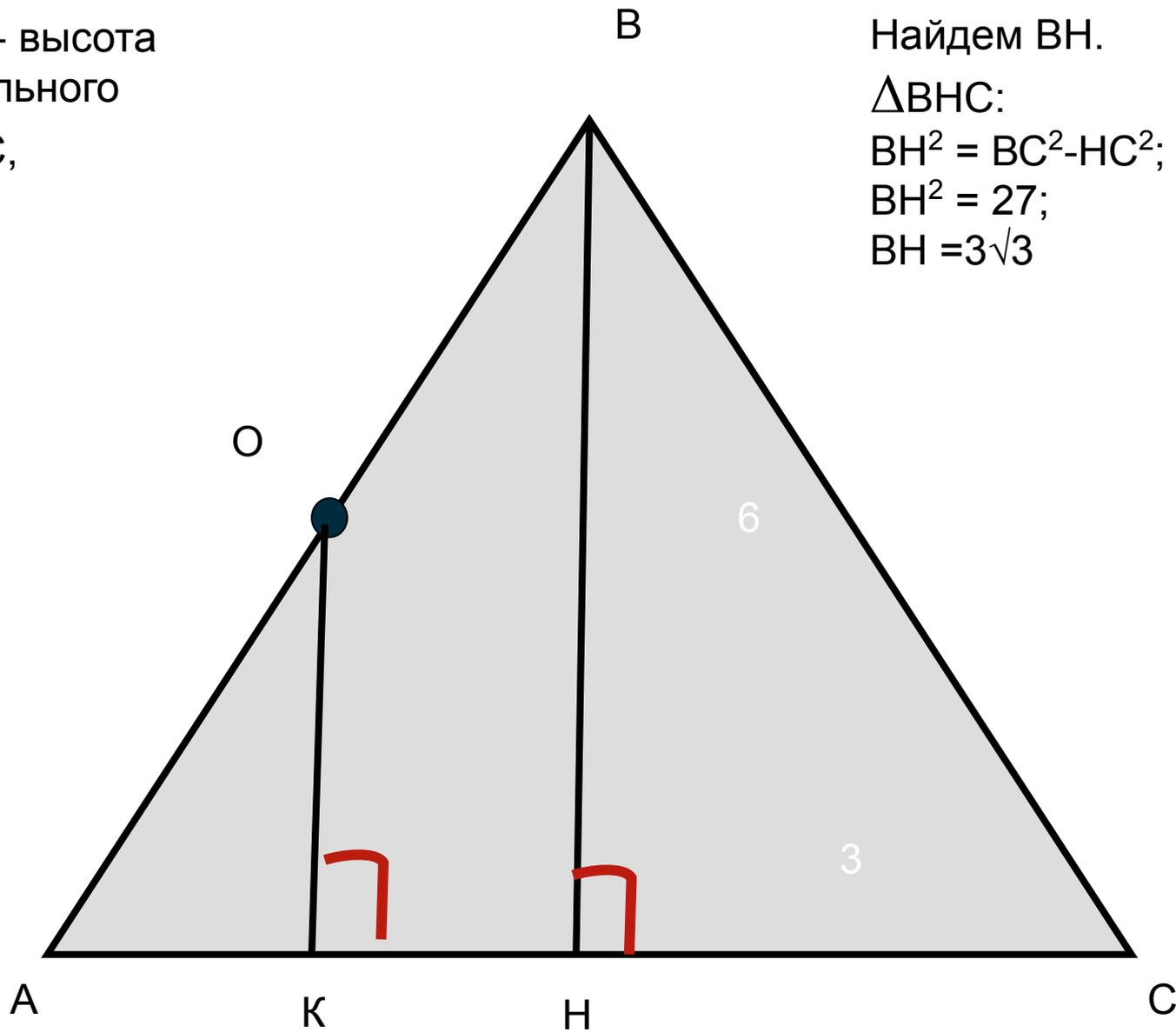
Найдем BH .

$\triangle BHC$:

$$BH^2 = BC^2 - HC^2;$$

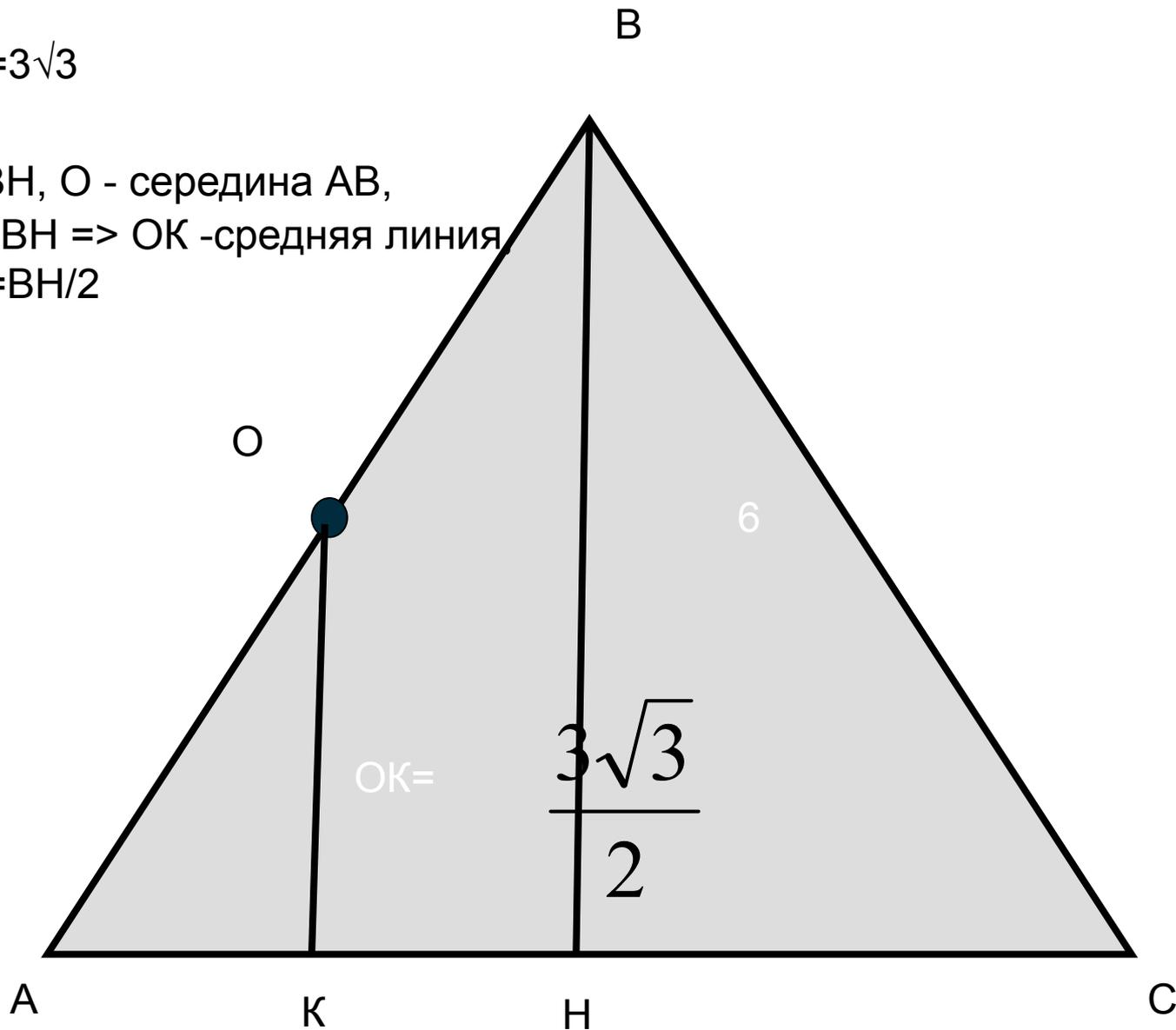
$$BH^2 = 27;$$

$$BH = 3\sqrt{3}$$



$$BH = 3\sqrt{3}$$

$\triangle ABH$, O - середина AB ,
 $OK \parallel BH \Rightarrow OK$ - средняя линия,
 $OK = BH/2$



4) $\triangle POK$; $\angle C = 90^\circ$,
 $\operatorname{tg} \angle K = PO/OK$,
 $\operatorname{tg} \angle K = 4/\sqrt{3}$

P

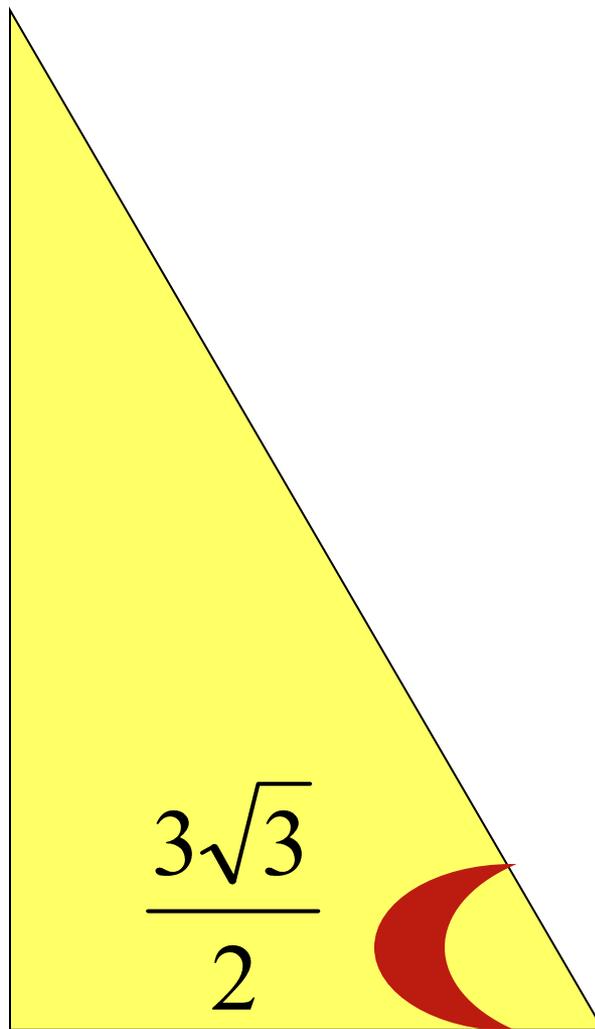
6

Ответ:

$\angle PACB = \operatorname{arctg} 4/\sqrt{3}$

O

K



е) ABCD —

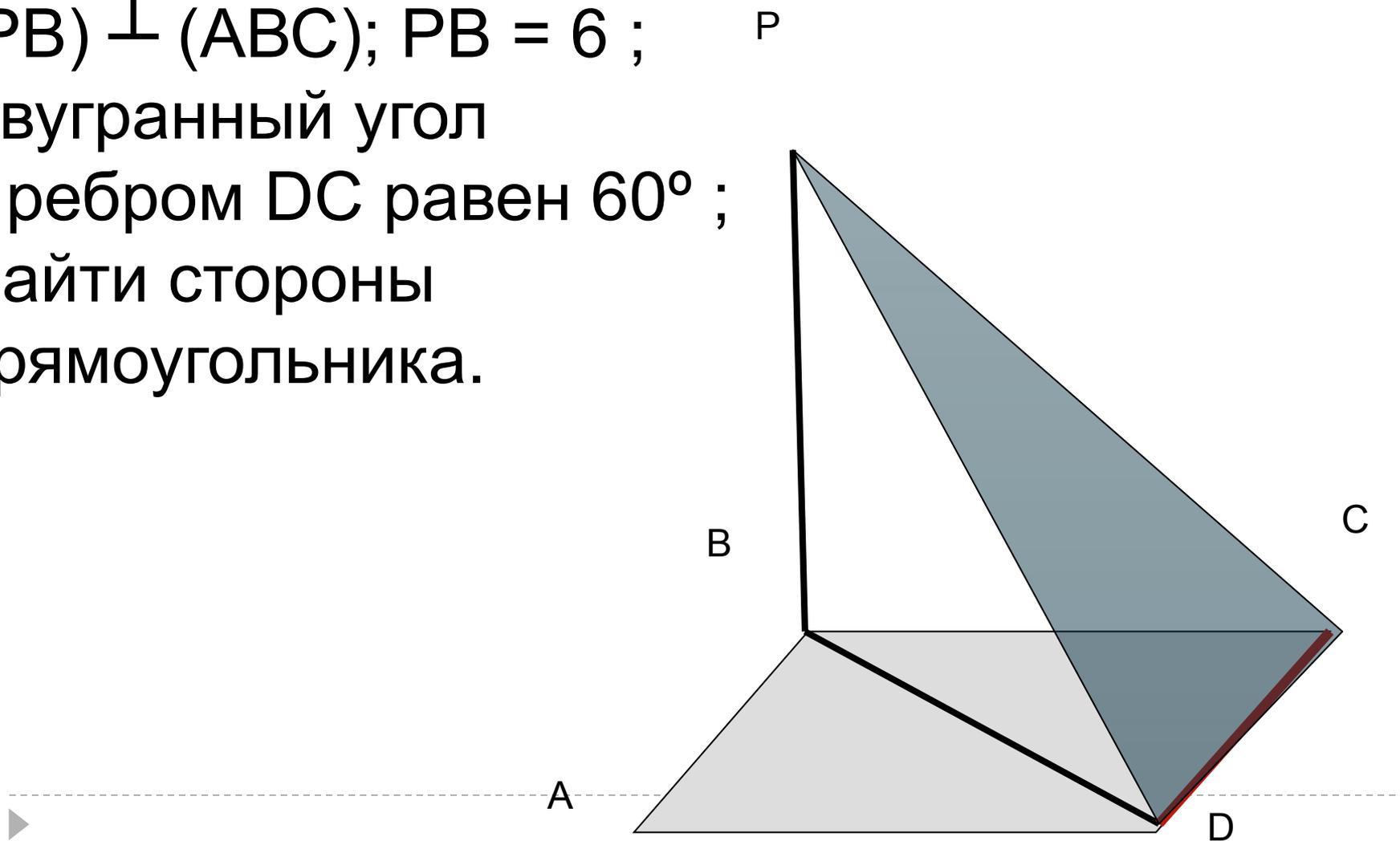
прямоугольник;

$$BD = 4\sqrt{3};$$

$$(PB) \perp (ABC); PB = 6;$$

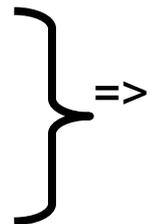
Двугранный угол
с ребром DC равен 60° ;

Найти стороны
прямоугольника.



1) $\angle PDCB = 60^\circ$

$BC \perp CD$
 $PB \perp ABC$



$BD = 4\sqrt{3}$;

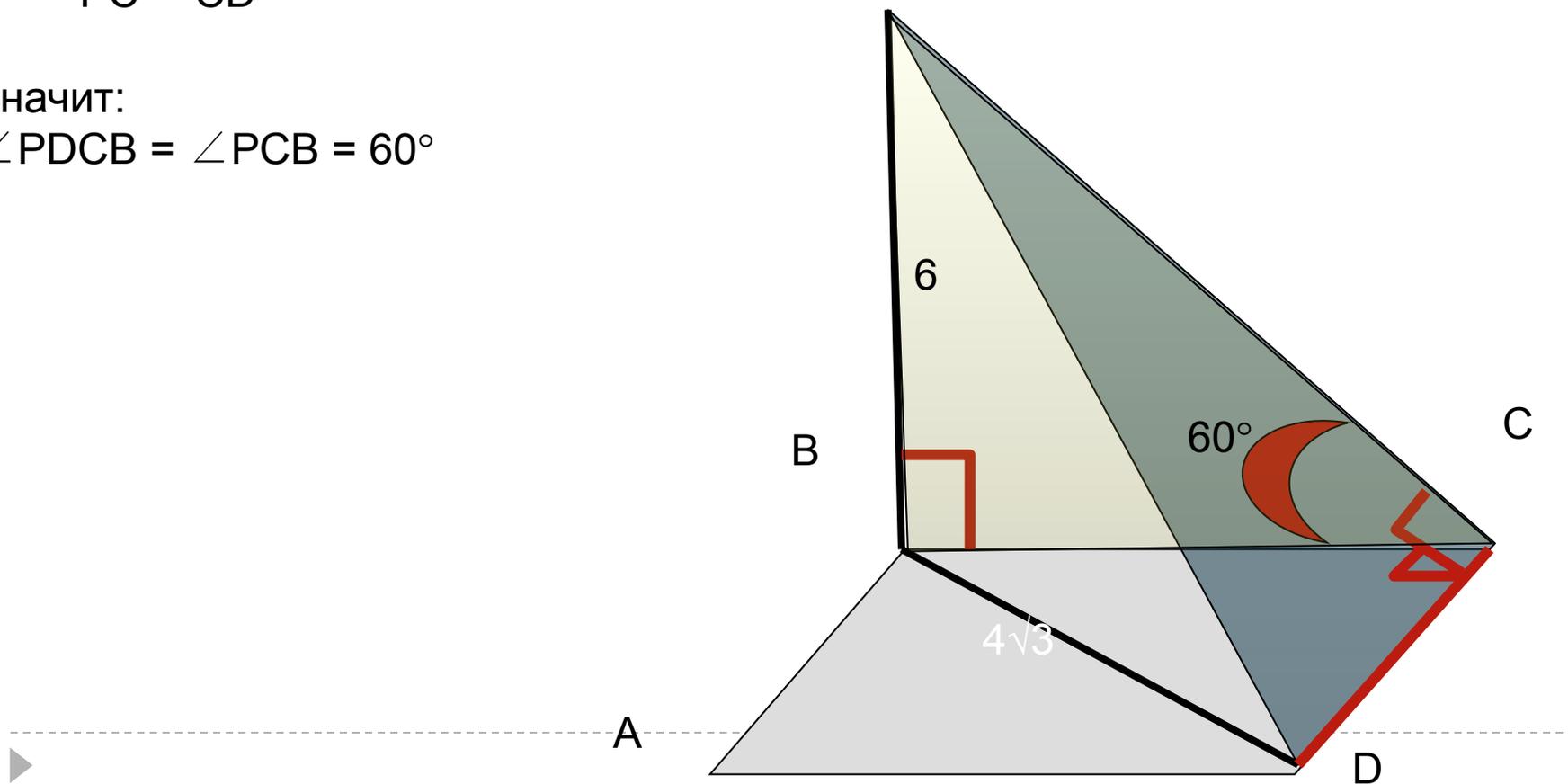
$PB = 6$;

$\angle PCB = 60^\circ$

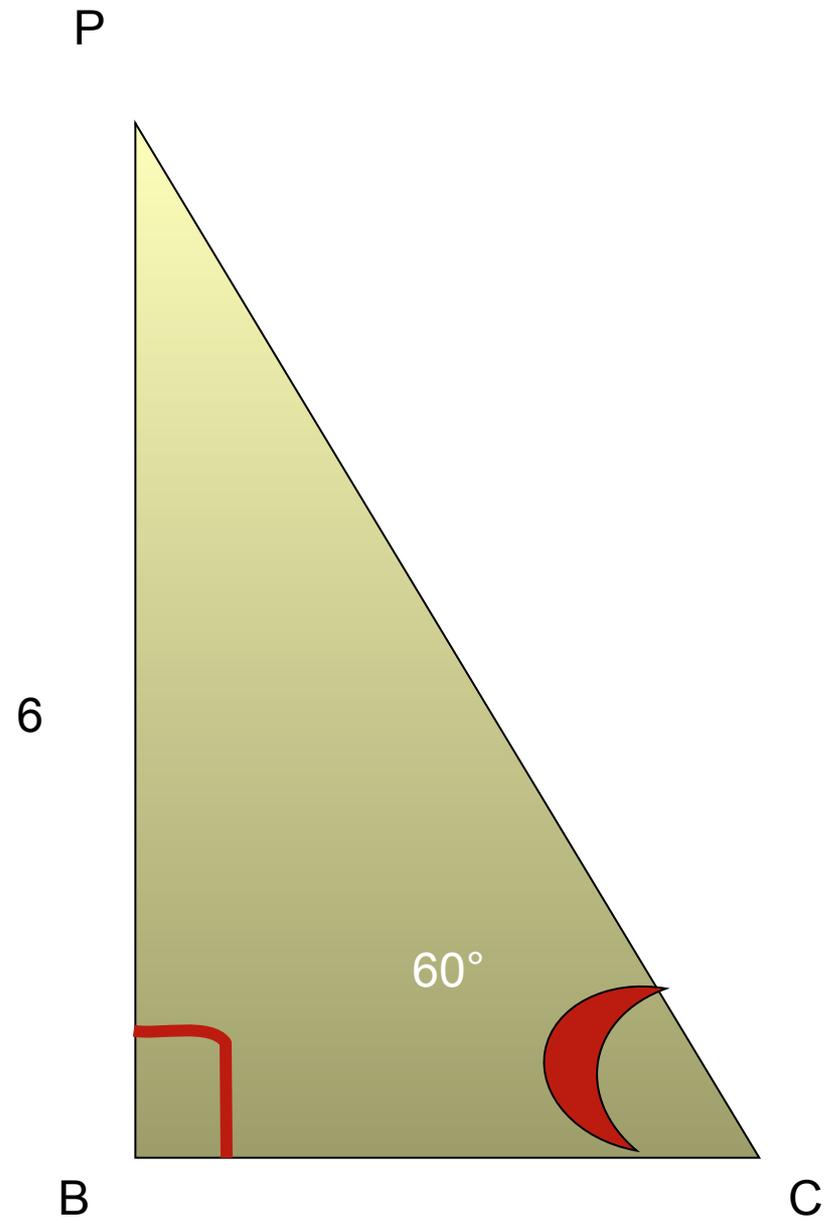
$PC \perp CD$

Значит:

$\angle PDCB = \angle PCB = 60^\circ$



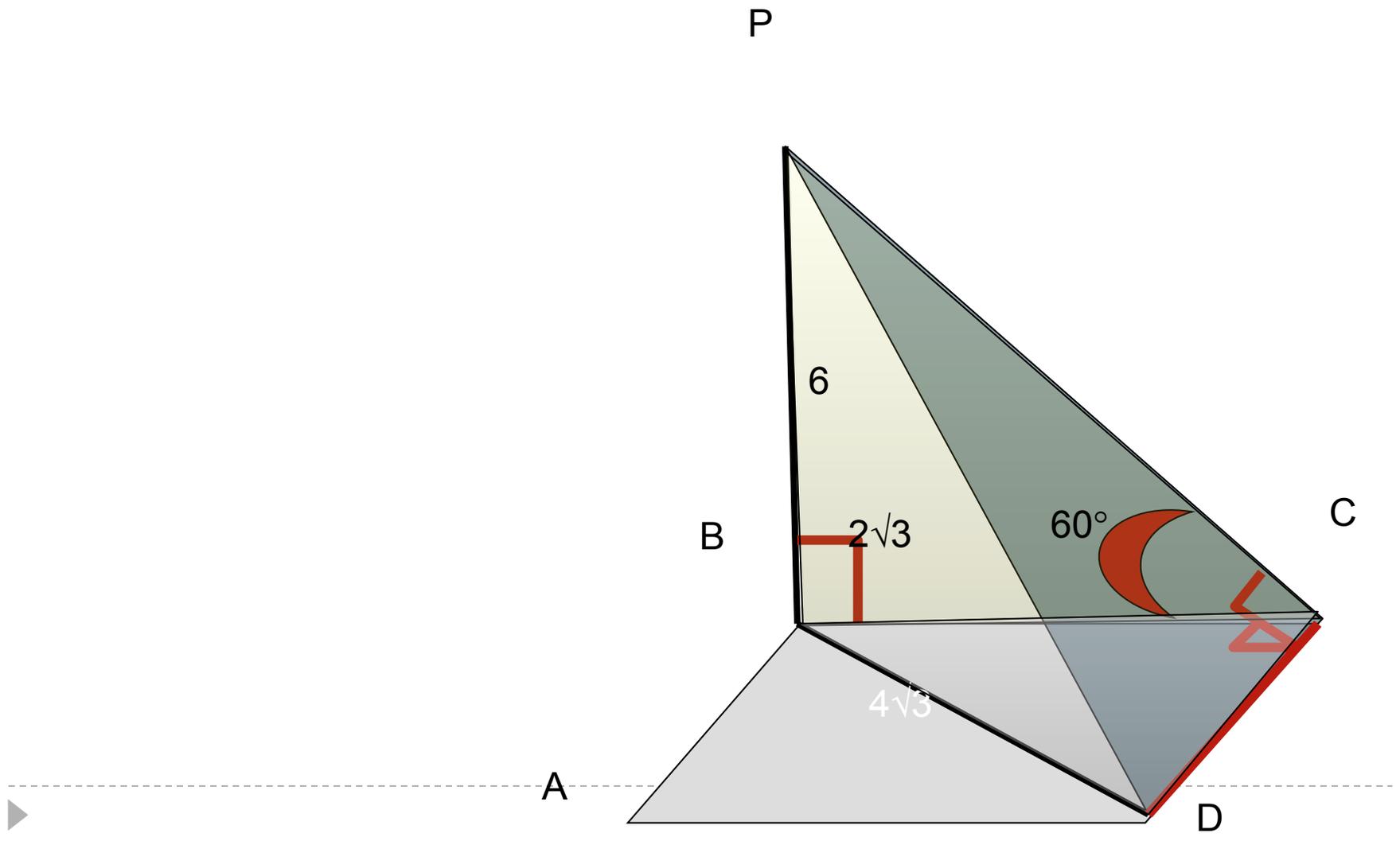
2) $\Delta PBC, \angle B = 90^\circ,$
 $\text{tg } \angle C = PB/BC,$
 $\sqrt{3} = 6/BC,$
 $BC = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$



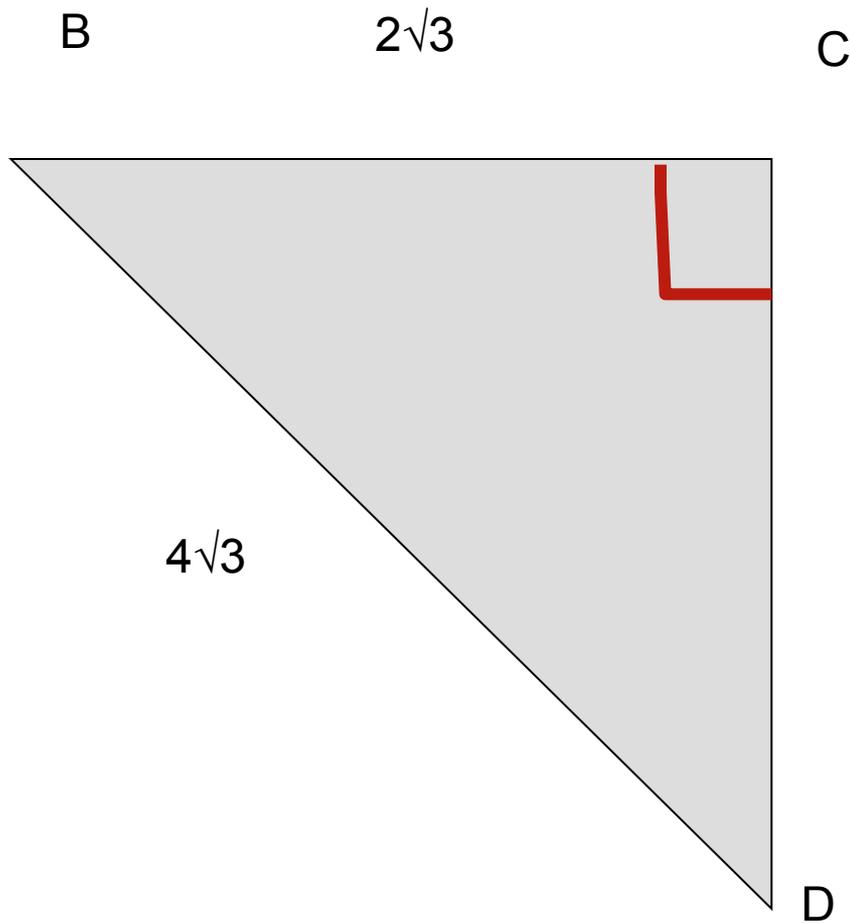
$$BD = 4\sqrt{3} ;$$

$$PB = 6 ;$$

$$\angle PCB = 60^\circ$$



3) $\triangle BCD$; $\angle C = 90^\circ$,
 $CD^2 = BD^2 - BC^2$;
 $CD^2 = 16 \cdot 3 - 4 \cdot 3$;
 $CD^2 = 36$; $CD = 6$



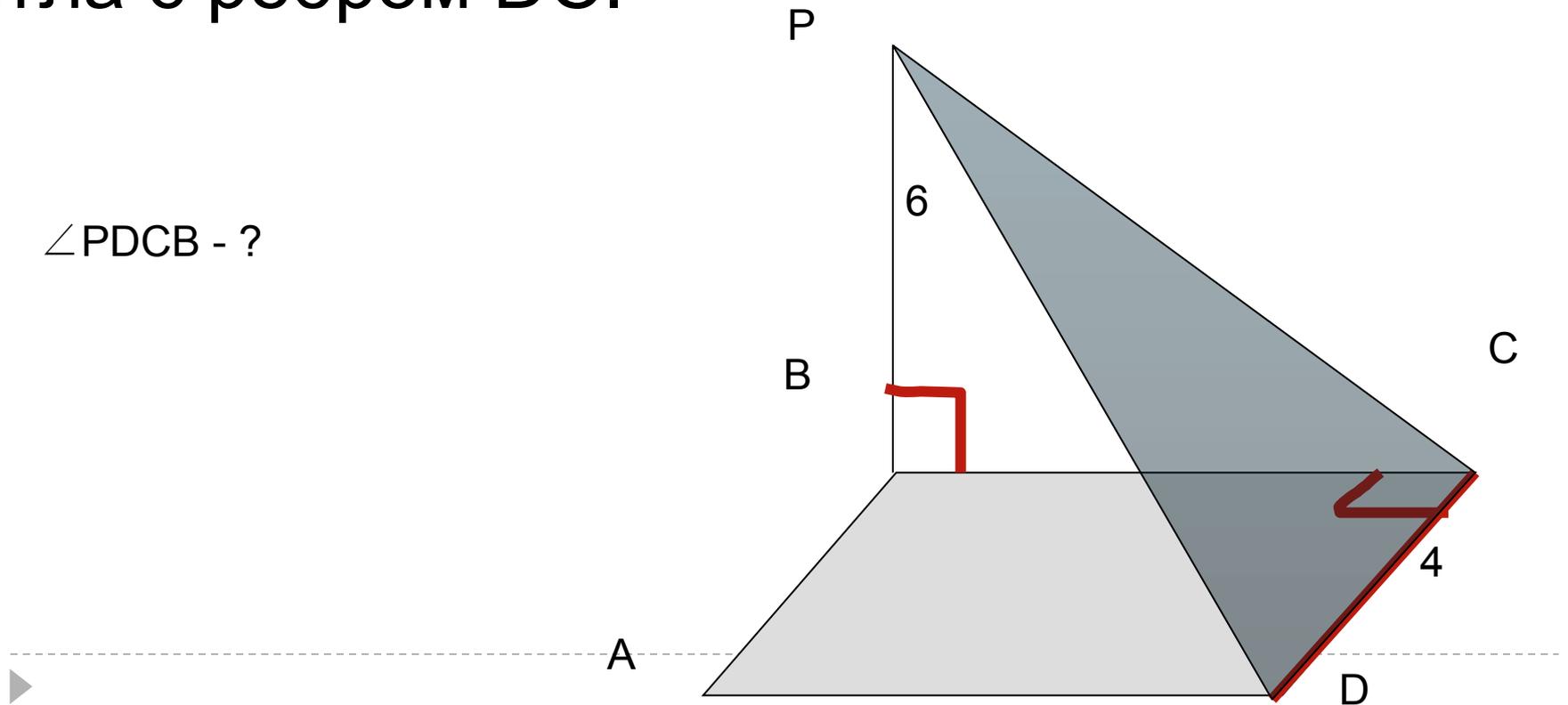
Ответ: $AB = CD = 6$;
 $BC = AD = 2\sqrt{3}$.



f) ABCD — прямоугольник;
площадь ABCD равна 48 ;
(PB) \perp (ABC); PB = 6 ;
DC = 4 ;

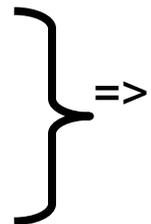
Найти величину двугранного
угла с ребром DC.

$\angle PDCB - ?$



1)

$$\begin{aligned} BC &\perp CD \\ PB &\perp ABC \end{aligned}$$

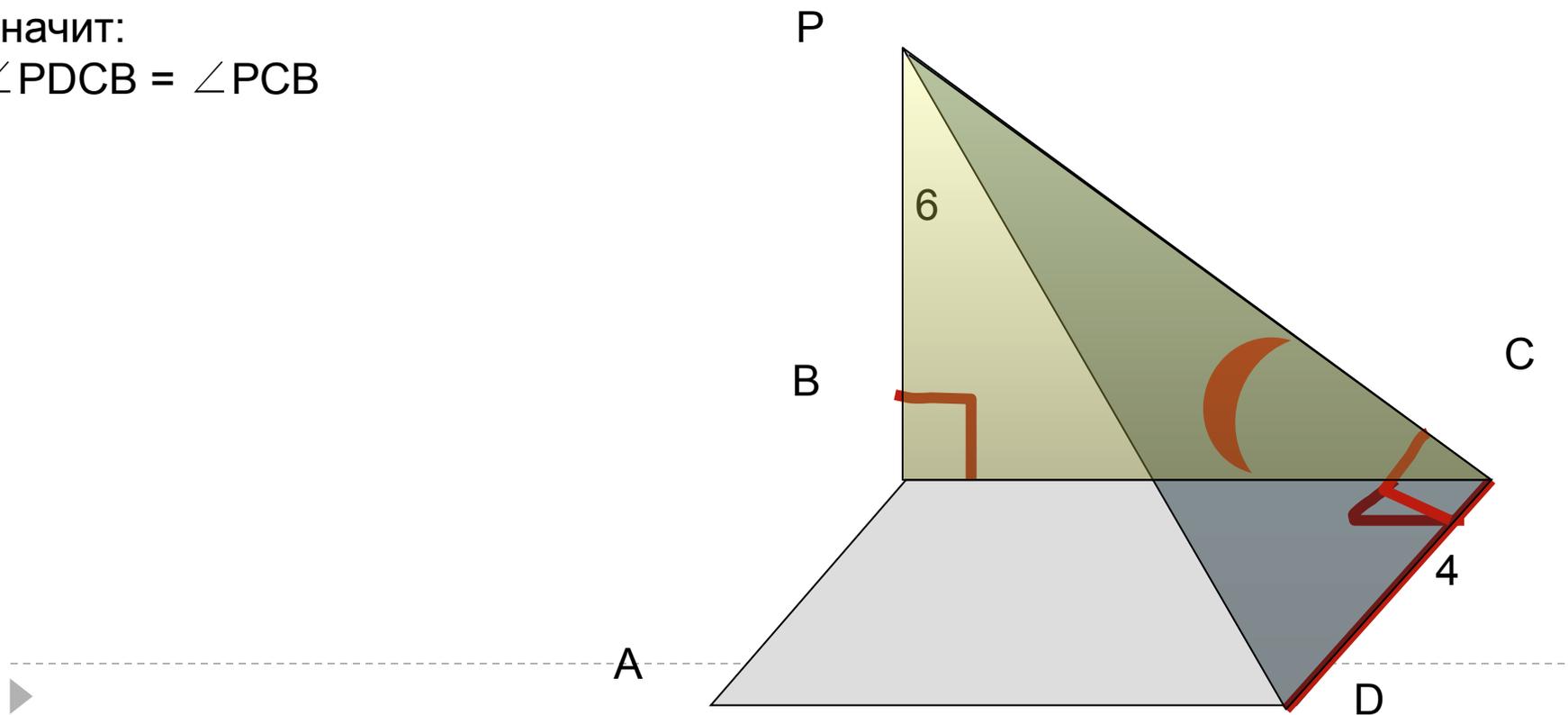


$$PC \perp CD$$

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= 48, \\ PB &= 6, \\ CD &= 4. \end{aligned}$$

Значит:

$$\angle PDCB = \angle PCB$$



2) ABCD - прямоугольник

$$S(ABCD) = AB \cdot BC = 48,$$

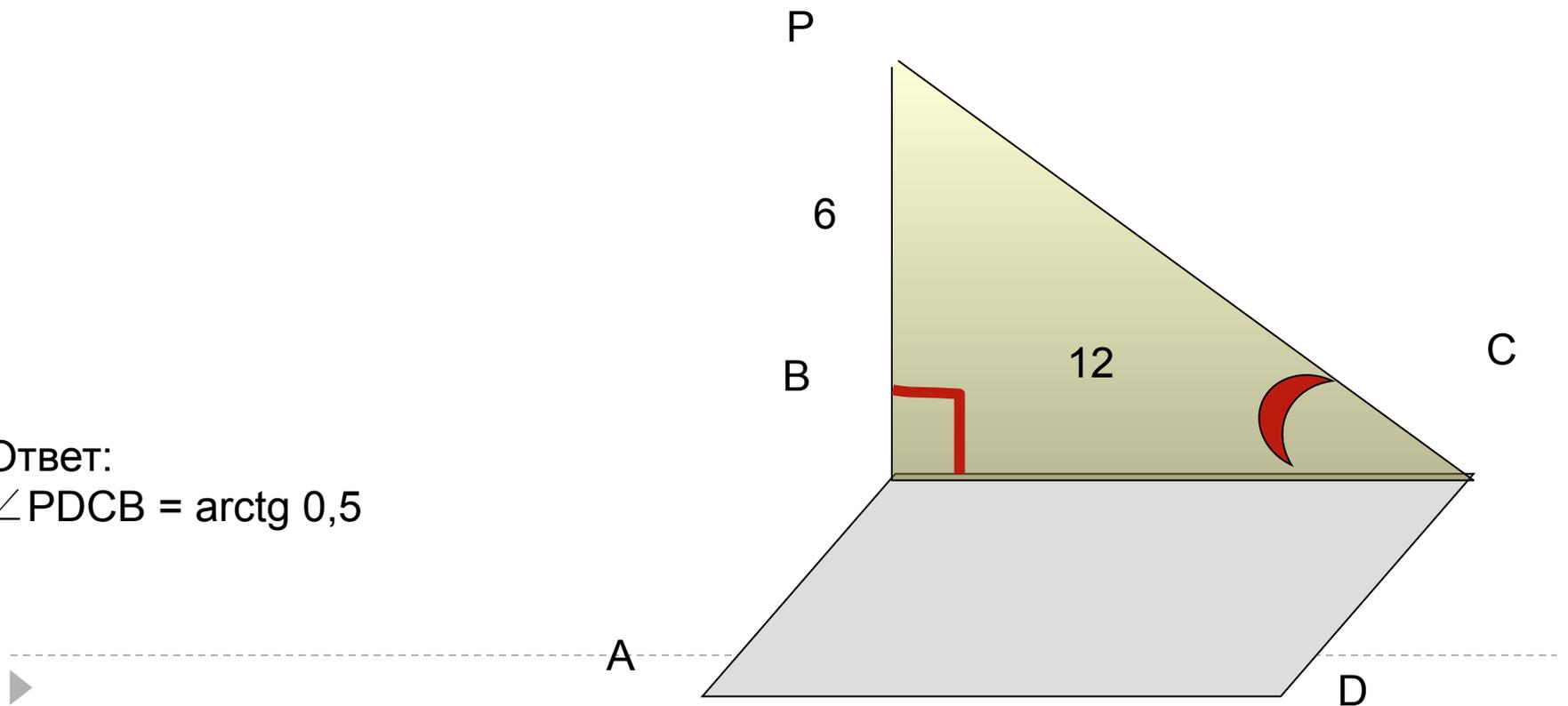
$$AB = CD = 4,$$

$$4 \cdot BC = 48, BC = 12.$$



3) $\triangle PBC$; $\angle B = 90^\circ$,
 $\operatorname{tg} \angle C = PB/BC$,
 $\operatorname{tg} \angle C = 0,5$

Ответ:
 $\angle PDCB = \operatorname{arctg} 0,5$

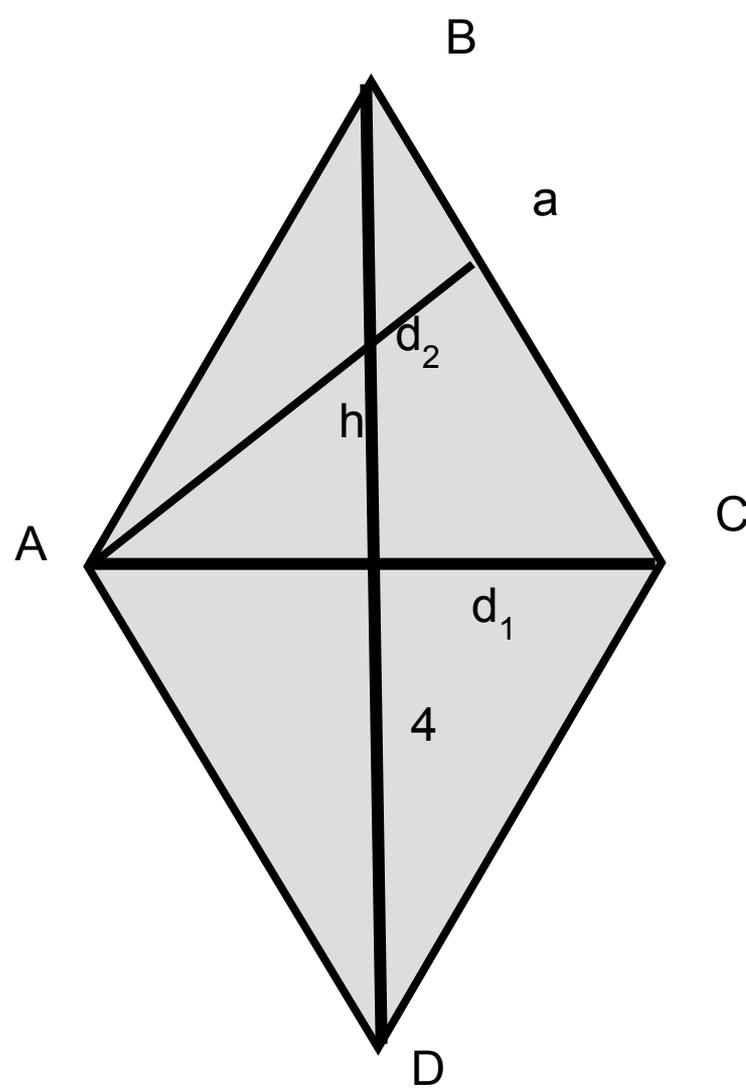


g) ABCD — ромб;

$BD = 4$;

$(PC) \perp (ABC)$; $PC = 8$;

Двугранный угол с
ребром BD равен 45° ;
Найти площадь ромба



$$S_{\text{ромба}} = a \cdot h ,$$

$$S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$$



2)

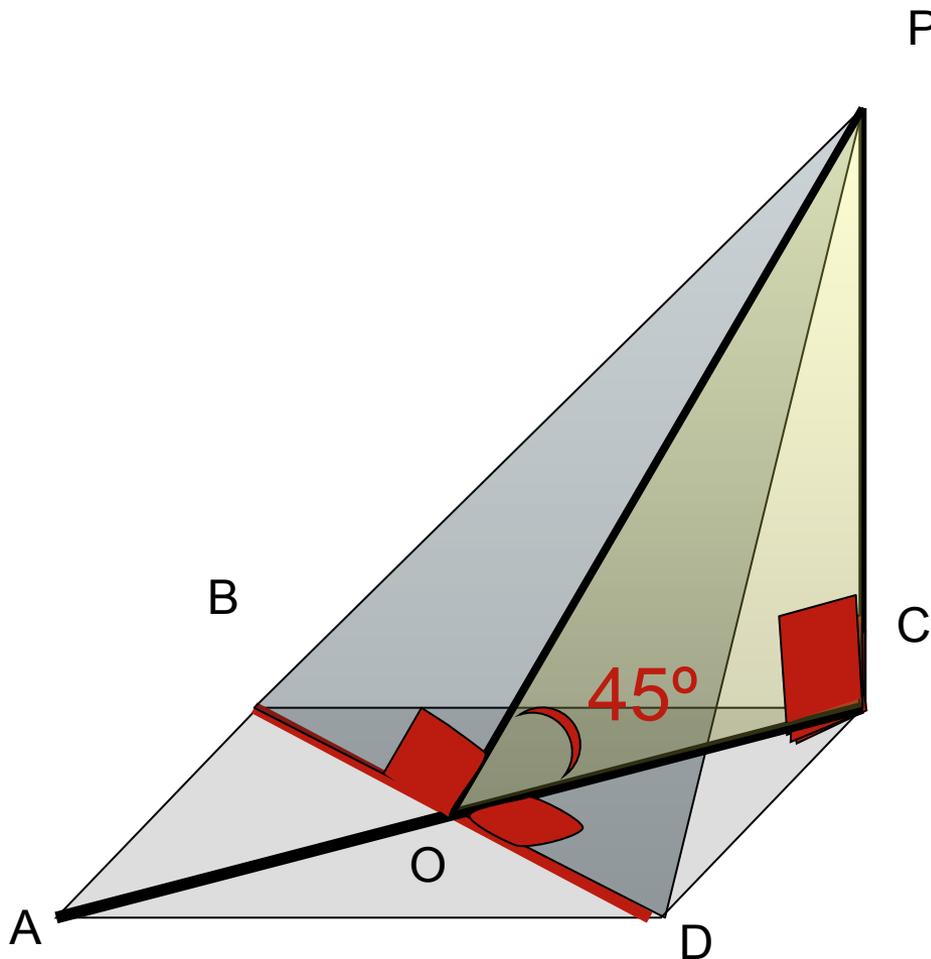
$$\left. \begin{array}{l} AO \perp BD \\ PC \perp ABC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$PO \perp CD$$

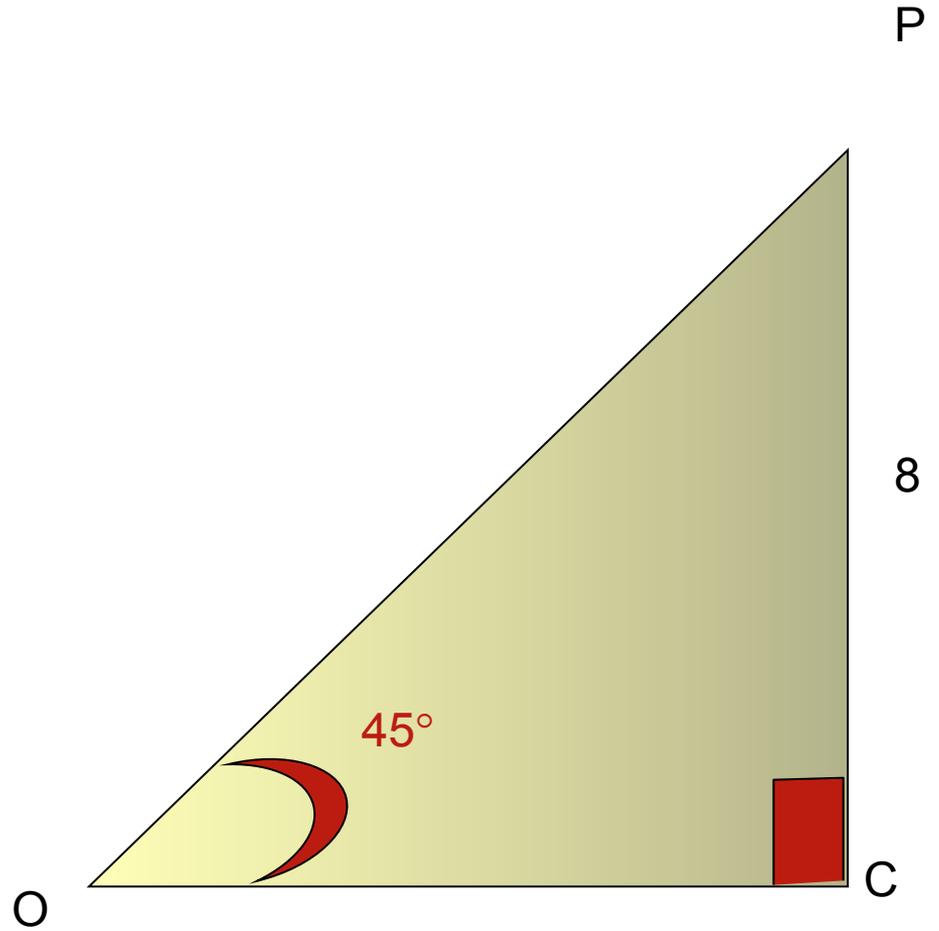
Значит:

$$\angle PBDC = \angle POC = 45^\circ$$

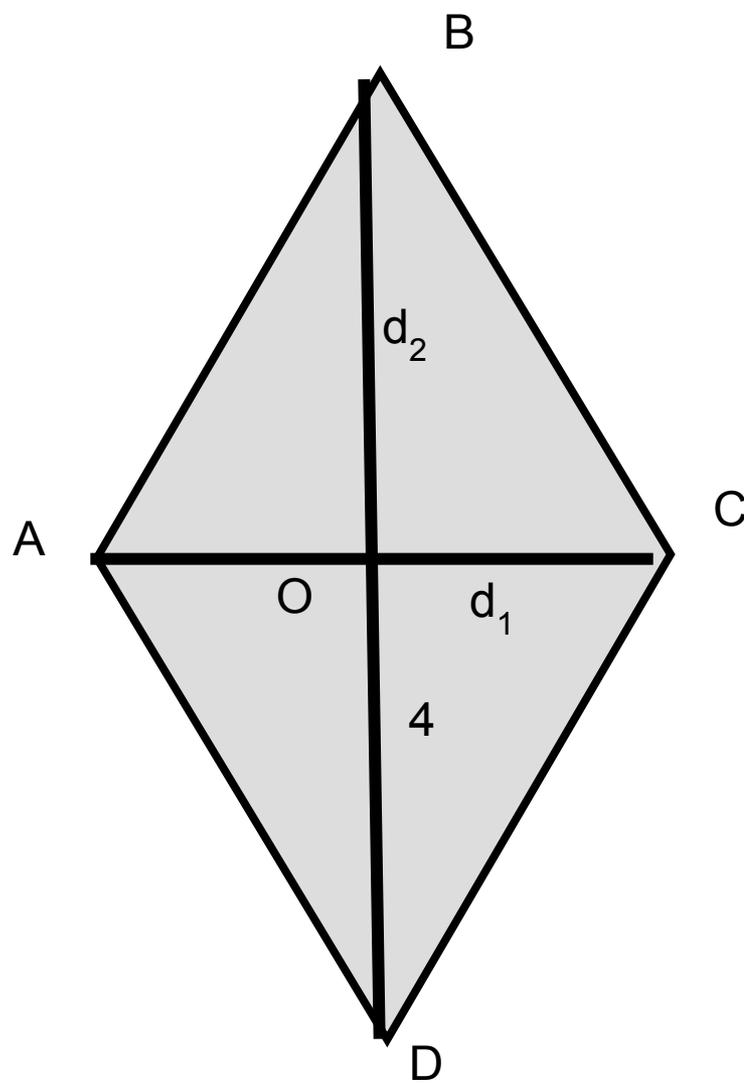
$(PC) \perp (ABC); PC = 8;$
Двугранный угол с
ребром BD равен $45^\circ;$



3) $\triangle PCO$; $\angle C = 90^\circ$,
 $\angle O = 45^\circ \Rightarrow \angle P = 45^\circ$,
 $OC = PC = 8$.



4) $d_1 = 2OC = 16,$
 $d_2 = 4,$
 $S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$
 $S = 32$



Ответ: 32

$S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$



к) ABCD- параллелограмм;

$\angle ADC = 120^\circ$; $AD = 8$;

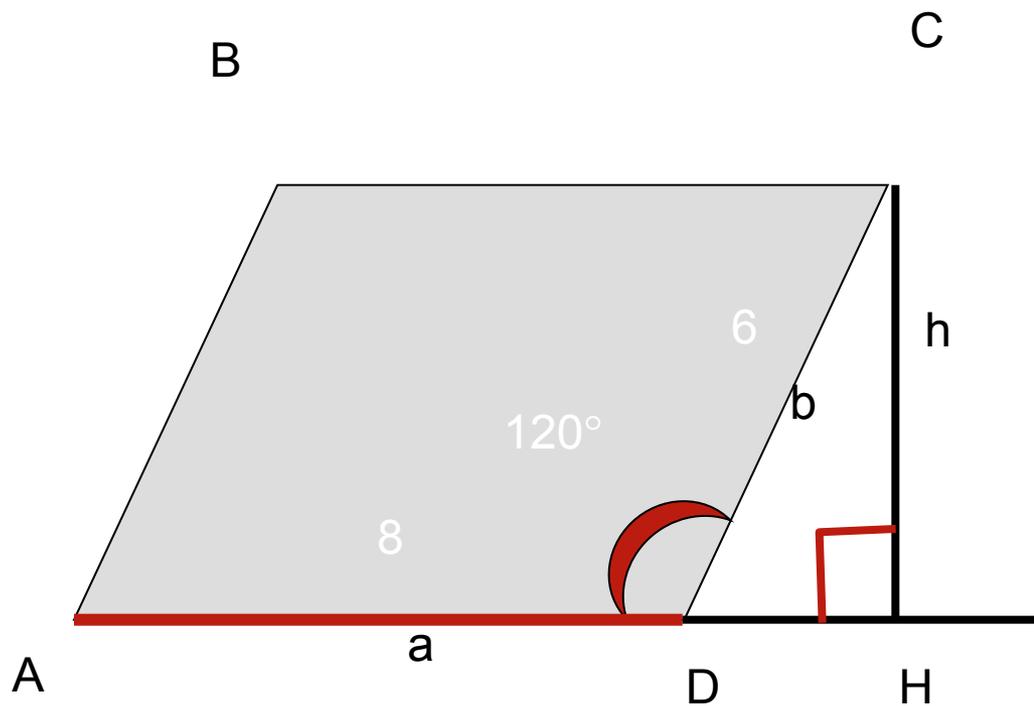
$DC = 6$; $(PC) \perp (ABC)$;

$PC = 9$;

Найти величину двугранного
угла с ребром AD и
площадь ABCD .

$$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot b \cdot \sin \angle(a,b)$$

$$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot h$$



$$1) \quad S_{\text{парал-ма}} = a \cdot b \cdot \sin \angle (a,b)$$

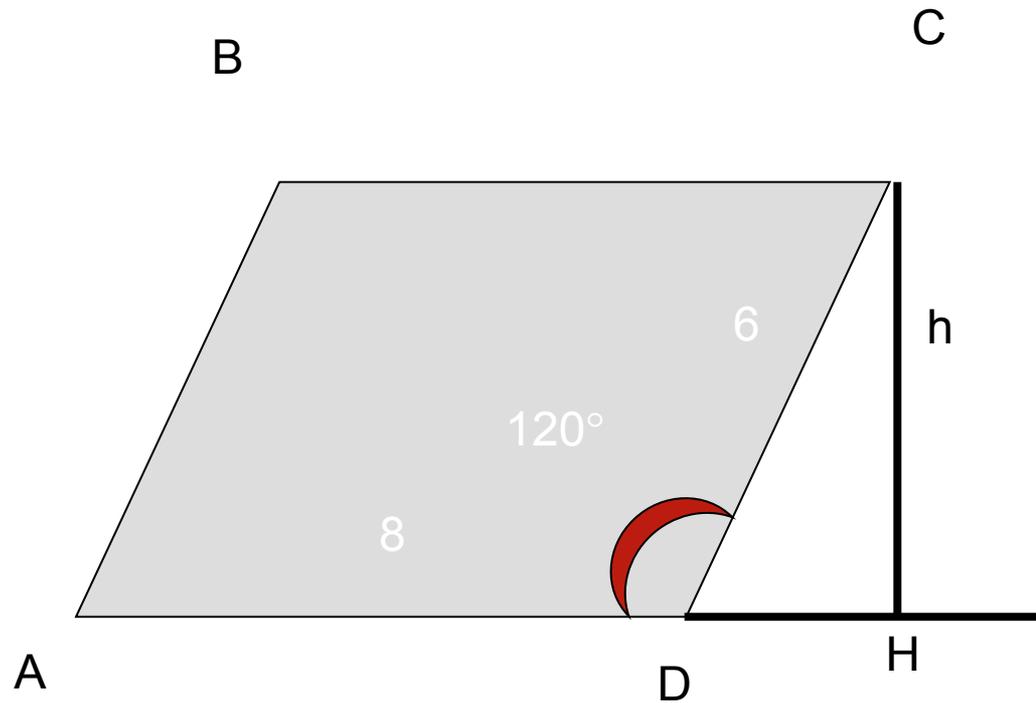
$$S(ABCD) = 8 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 24\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot h$$

$$h = S_{\text{парал-ма}} / a$$

$$h = 24\sqrt{3} / 8$$

$$h = 3\sqrt{3}$$



2)

$(PC) \perp (ABC); PC = 9$;

Найти величину двугранного

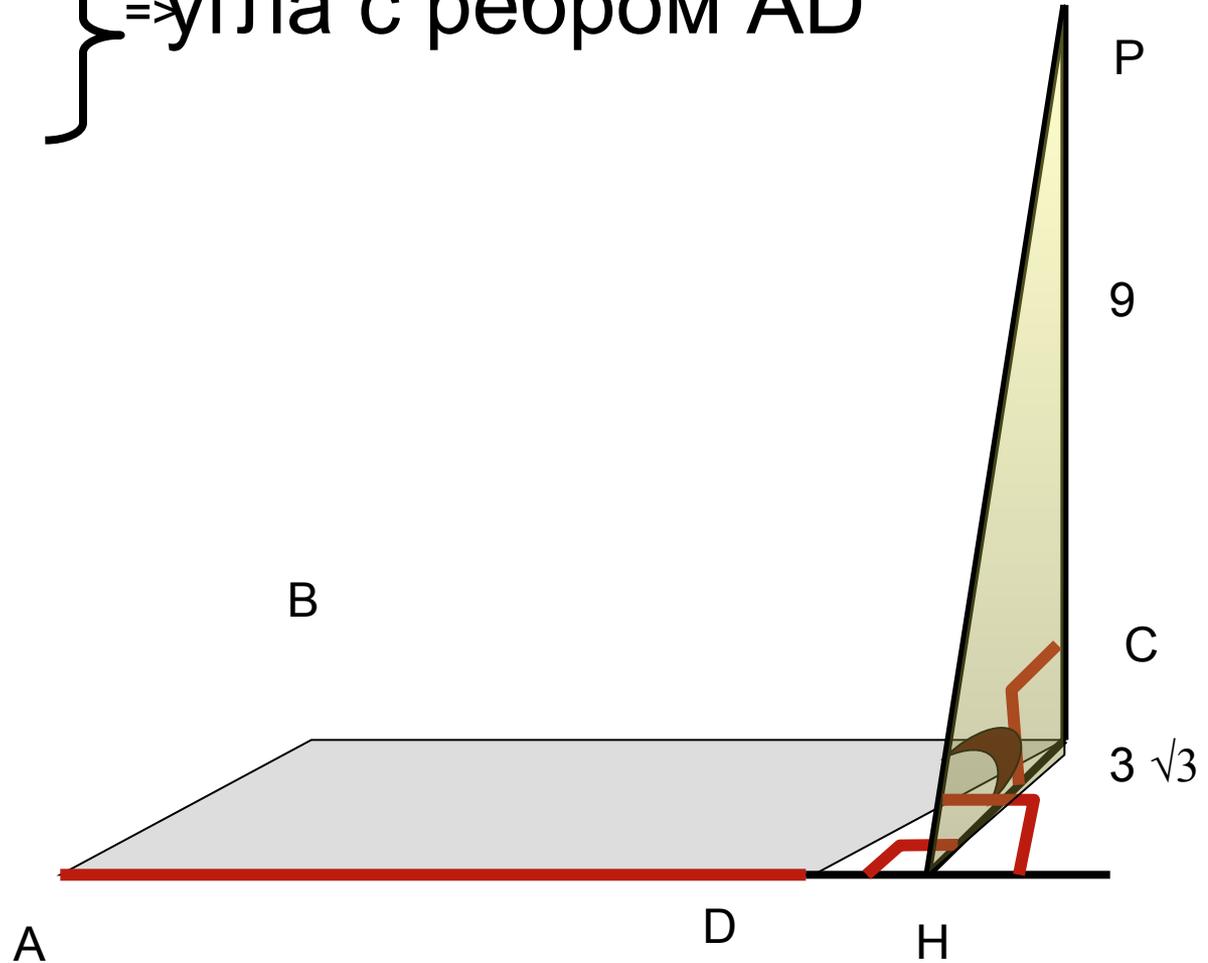
\Rightarrow угла с ребром AD

$CH \perp AD$
 $PC \perp ABC$

$PH \perp CD$

Значит:

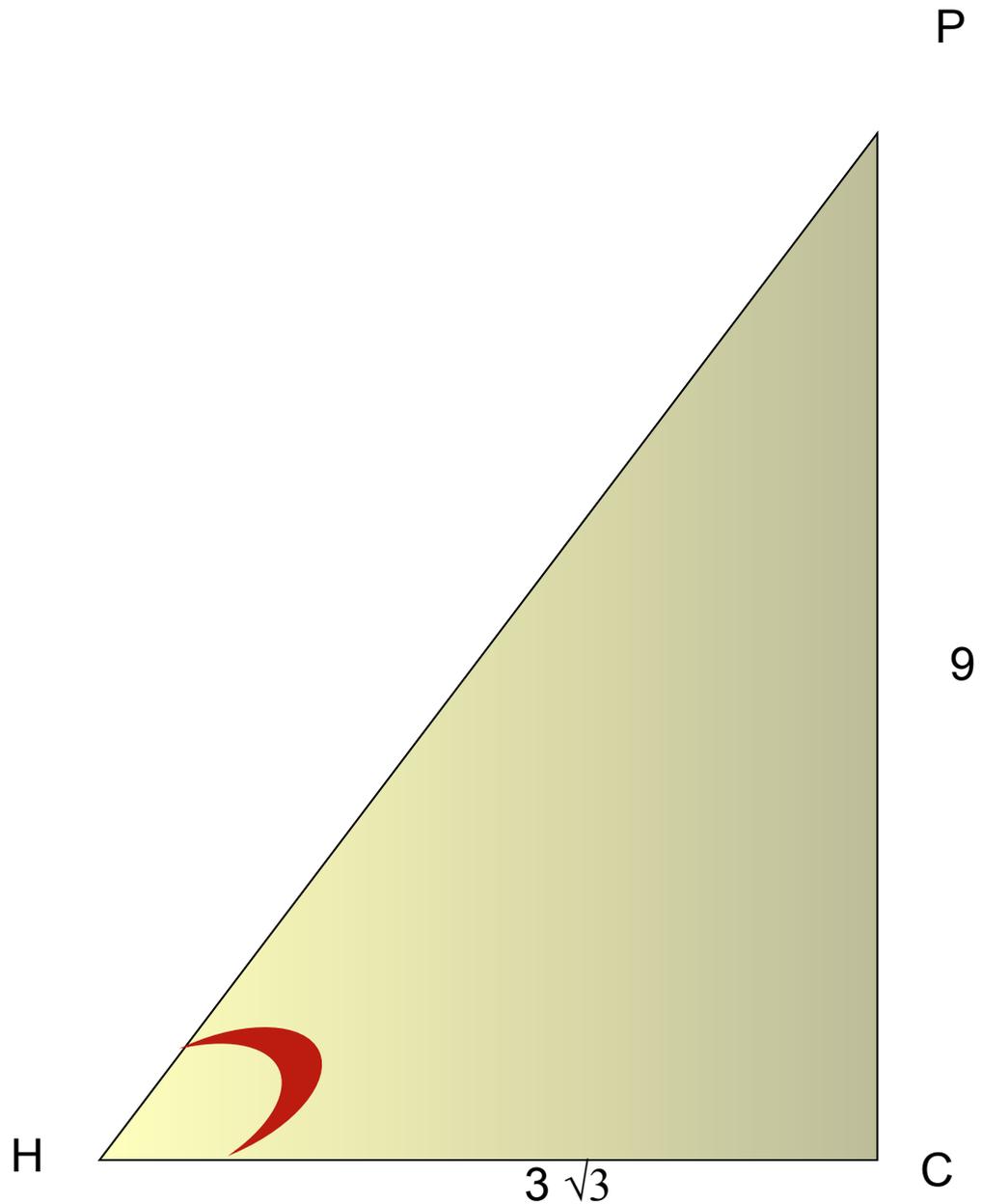
$\angle PADC = \angle PHC$



3) $\triangle PCH$; $\angle C = 90^\circ$,
 $\operatorname{tg} \angle H = PC/HC$,
 $\operatorname{tg} \angle H = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$
 $\angle H = 60^\circ$

Ответ:
 $\angle PADC = 60^\circ$,

$S(ABCD) = 24\sqrt{3}$.

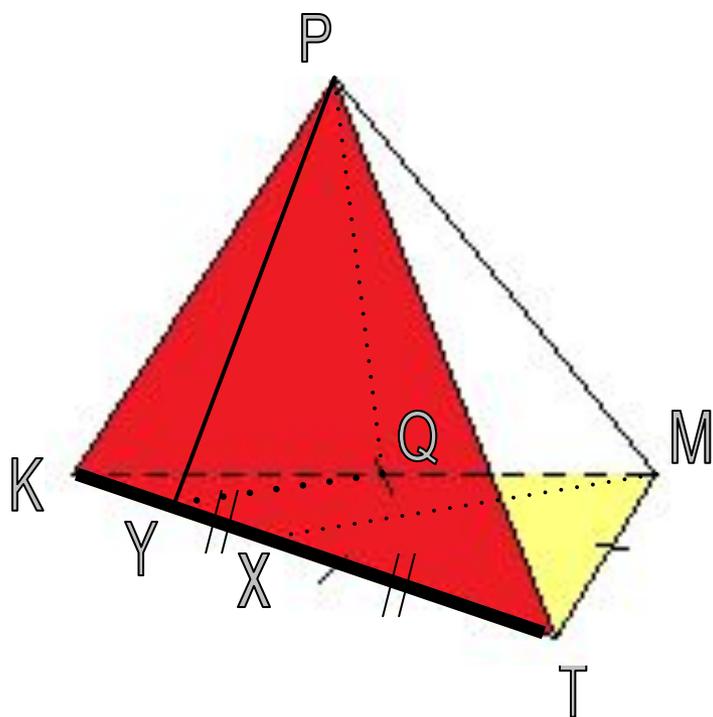


Тема №5 "Перпендикулярность плоскостей. Двугранный угол"

Задача №2 (в)

Дано: КМРТ-тетраэдр; $\triangle ТМК$ правильный; Q-середина КМ, Q-проекция Р на ТМК

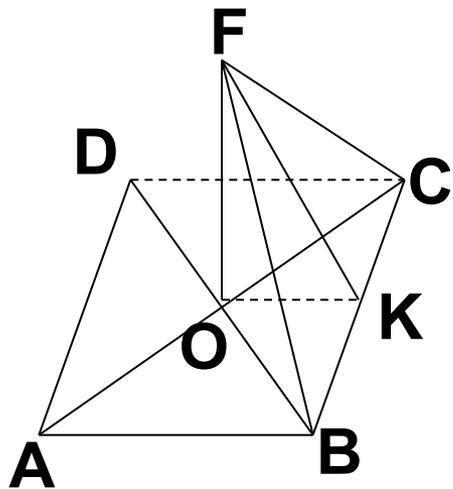
Указать: линейный угол для двугранного угла РКТМ



- Ребро - КТ, грани: РКТ, КТМ;
- В грани МКТ: $МХ \perp КТ$, где Х-середина КТ (по свойству $p \setminus b \Delta$)
 $QY \parallel MX$ (по построению)
 $МХ \perp КТ$ (по доказанному)
 $\Rightarrow YQ \perp КТ$ (по лемме)
- В грани КТР:
 $РУ \perp КТ$ (по т. о $3^x \perp$)
 $\sphericalangle(PY; YQ) = \sphericalangle PYQ$ линейный для РКТМ

Ответ: $\sphericalangle PYQ$ – линейный для двугранного РКТМ

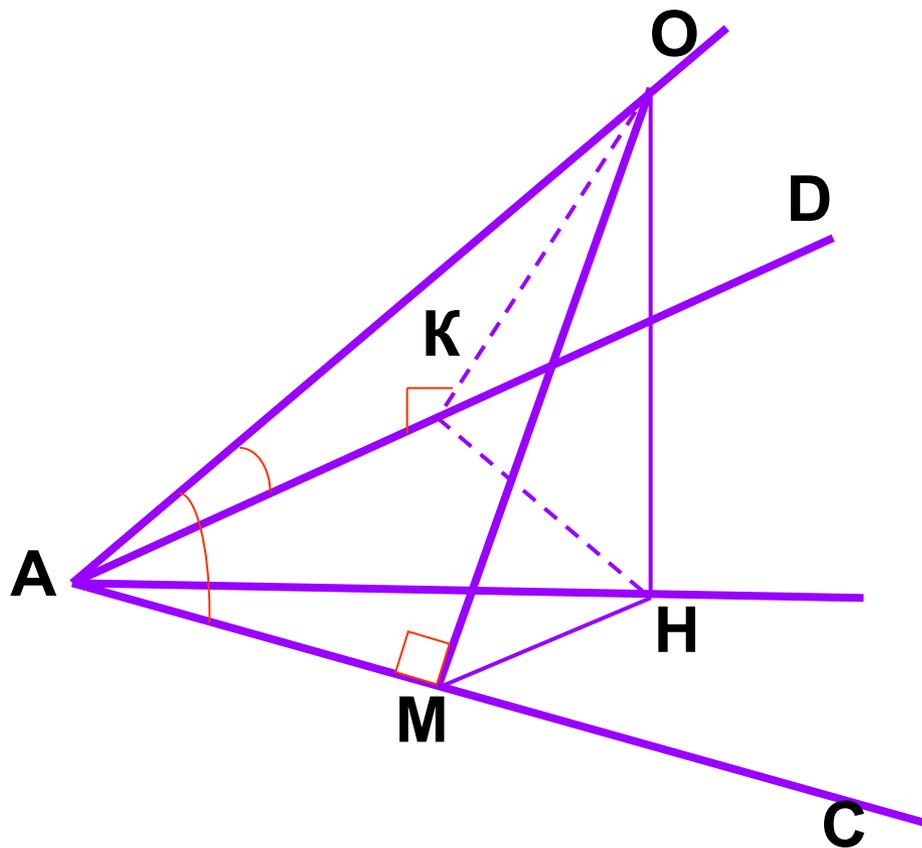
Дополнительная задача:



$$\cos \angle FBCD = \cos \angle OKF$$

$$BF = 5, BC = 6$$

- 1) $\triangle BFK; \angle BKF = 90^\circ$
 $FK = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$
- 2) $\cos \angle OKF = OK / FK = 3 / 4 = 0,75$
 $\triangle OFK; \angle FOK = 90^\circ$



Если два плоских угла трехгранного угла равны, то их общее ребро проектируется на биссектрису третьего плоского угла .



Решение задач:

Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S , а каждое из боковых ребер l . Найдите плоские углы при вершине, зная, что они образуют арифметическую прогрессию $\Pi/3$.



Проверка:

$L, B, Y;$

$$B = L + \pi/3; Y = B + \pi/3 = L + 2\pi/3$$

$$Y < L + B \quad L + 2\pi/3 < L + L + \pi/3;$$

$$L > \pi/3$$

Итак, $L > \pi/3$, но $B = L + \pi/3 > 2\pi/3$;

$$Y = L + 2\pi/3 > \pi/3 + 2\pi/3$$

Вывод: такого угла не существует.



Дополнительная задача:

Все грани параллелепипеда равные ромбы со стороной a и острым углом 60° . Найдите высоту параллелепипеда.



Домашнее задание:

1. п. 22,23.
2. Изучить определение перпендикулярных плоскостей, теорему

