Двугранный угол, решение задач

Урок по геометрии в 10 классе разработан по учебнику Л.С. Атанасяна.

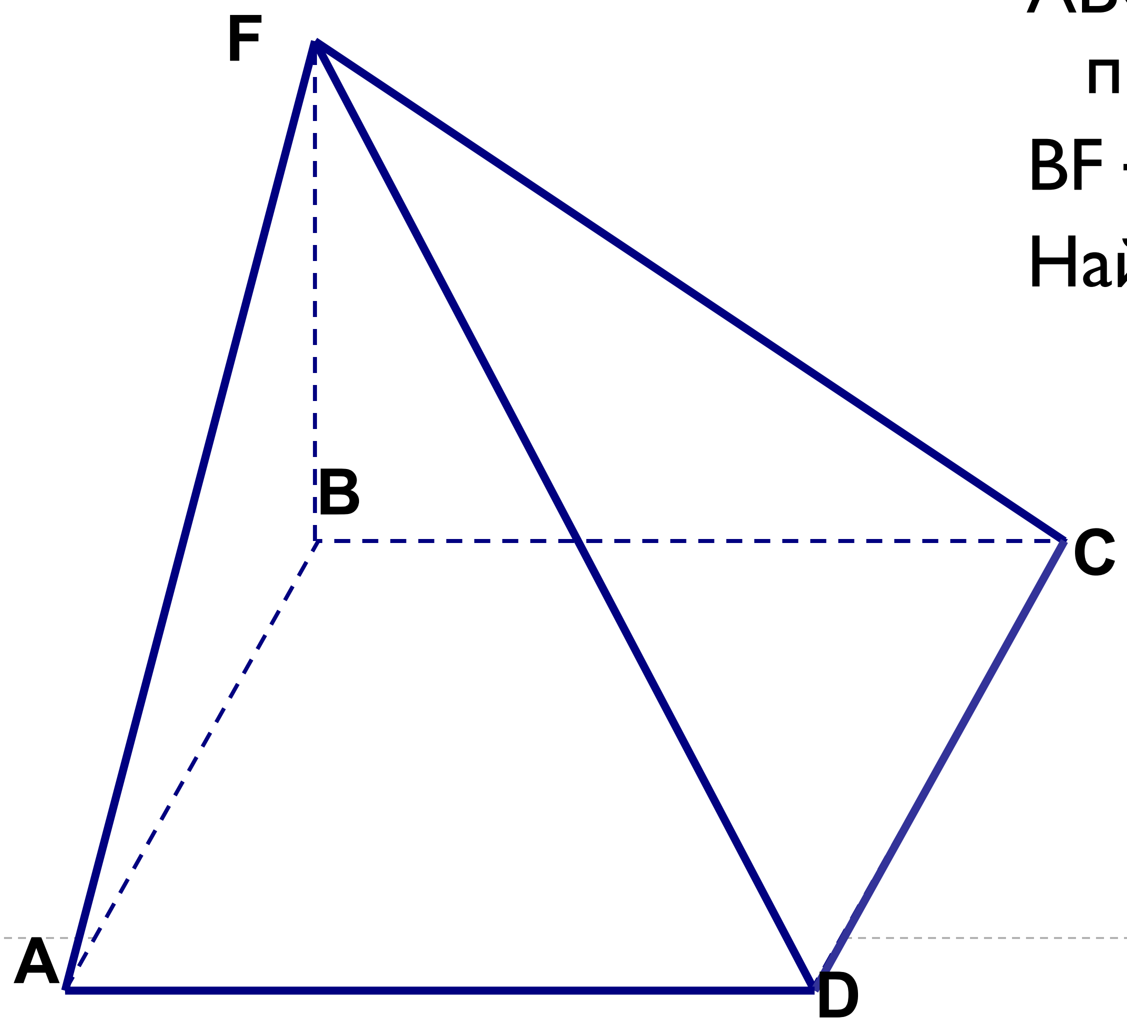
Цель урока:

- Сформировать у обучающихся конструктивный подход по выработке умений и навыков находить угол между плоскостями.

Вид урока: изучение и первичное закрепление новых знаний

Оборудование: компьютер, проектор, слайды, чертежные инструменты, цветные мелки.

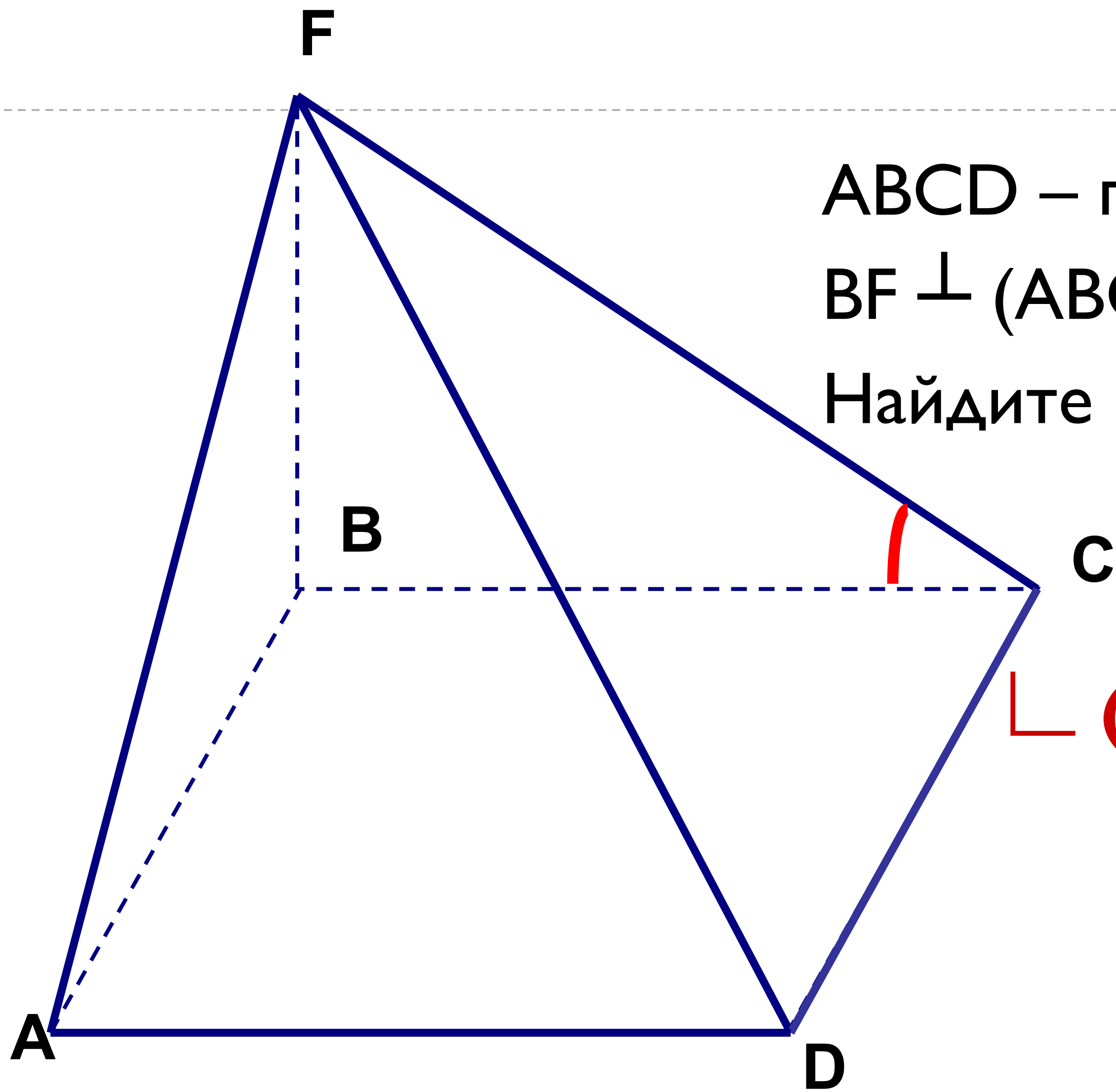
Решение задач по готовым чертежам на слайдах:



ABCD – прямоугольник,

BF ⊥ (ABC).

Найдите ∟(DC).

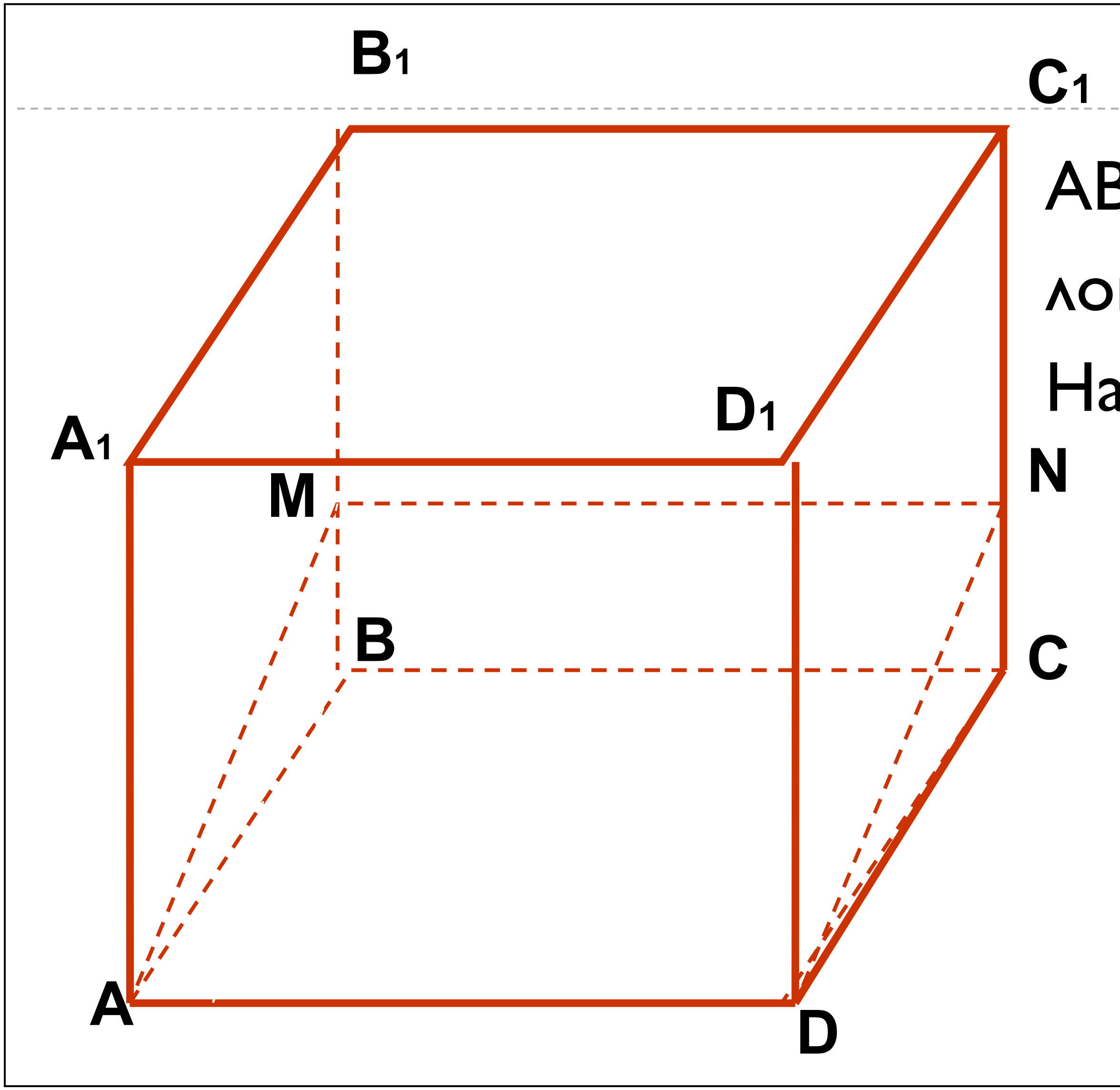


ABCD – прямоугольник,

BF ⊥ (ABC).

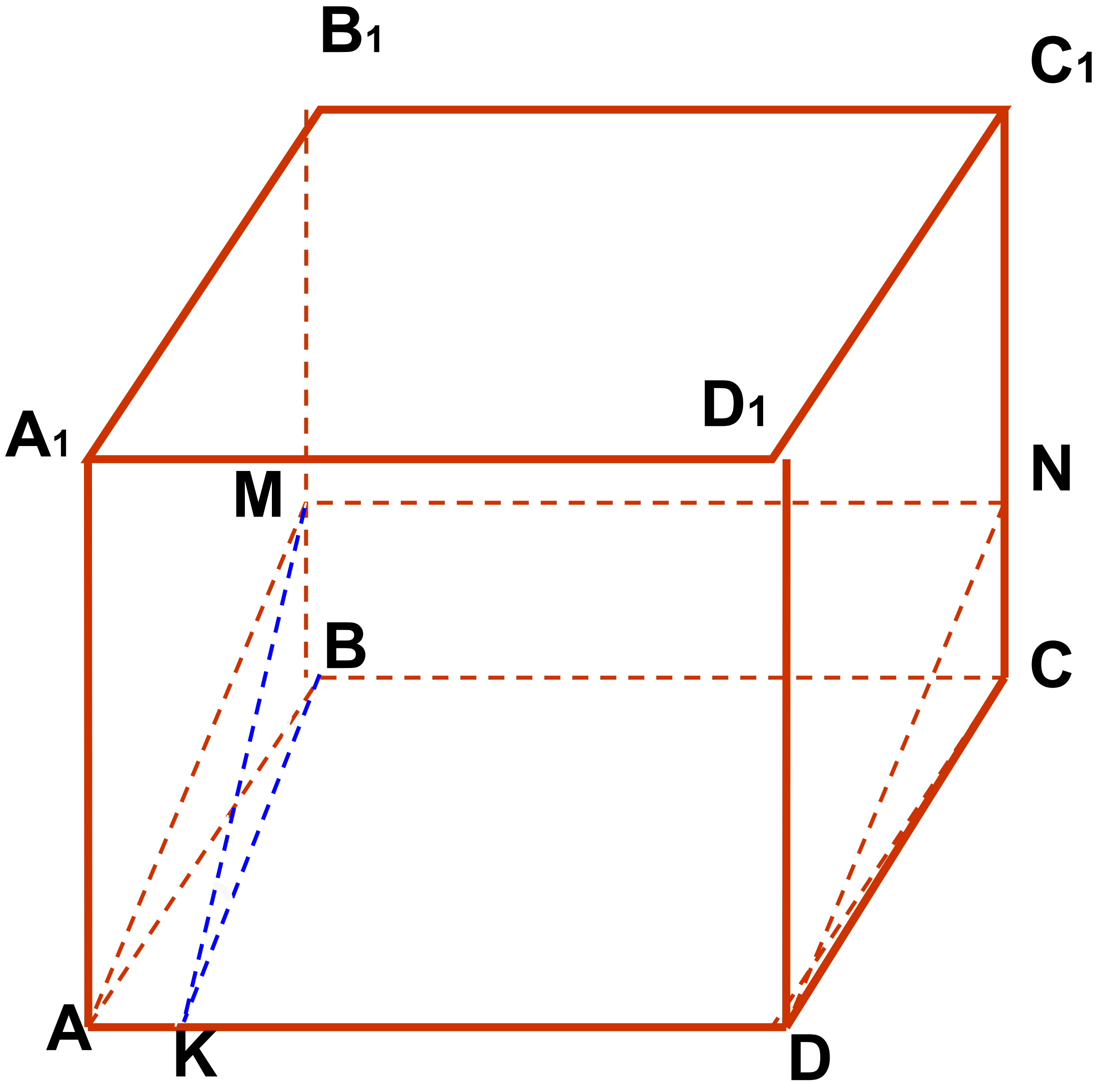
Найдите ∟(DC).

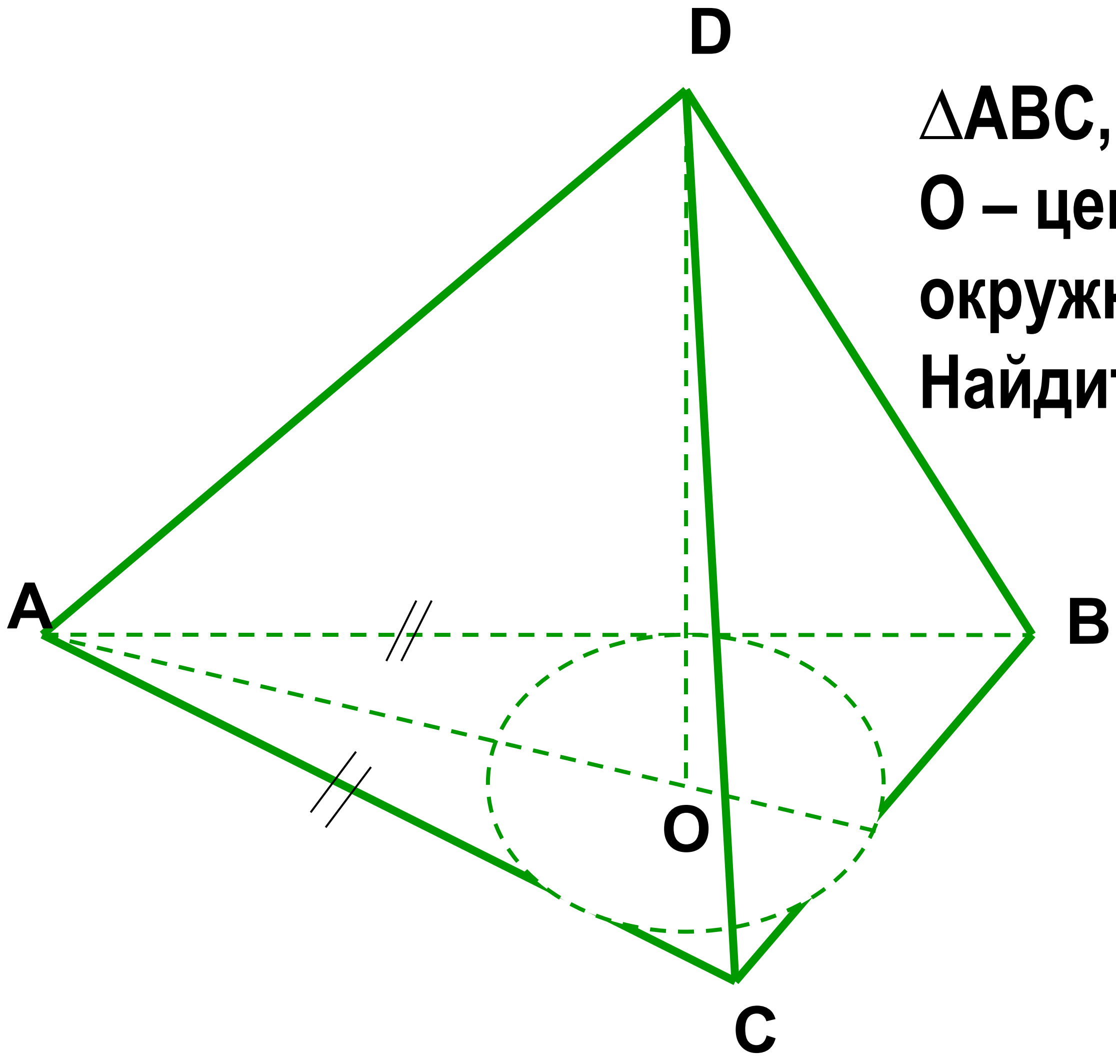
∟ (CD)= ∟ FCB



ABCD – паралле-
лограмм, $AA_1 \perp (ABC)$.
Найдите $\angle(CDAM)$.

∟ CDAM= ∟ MKB



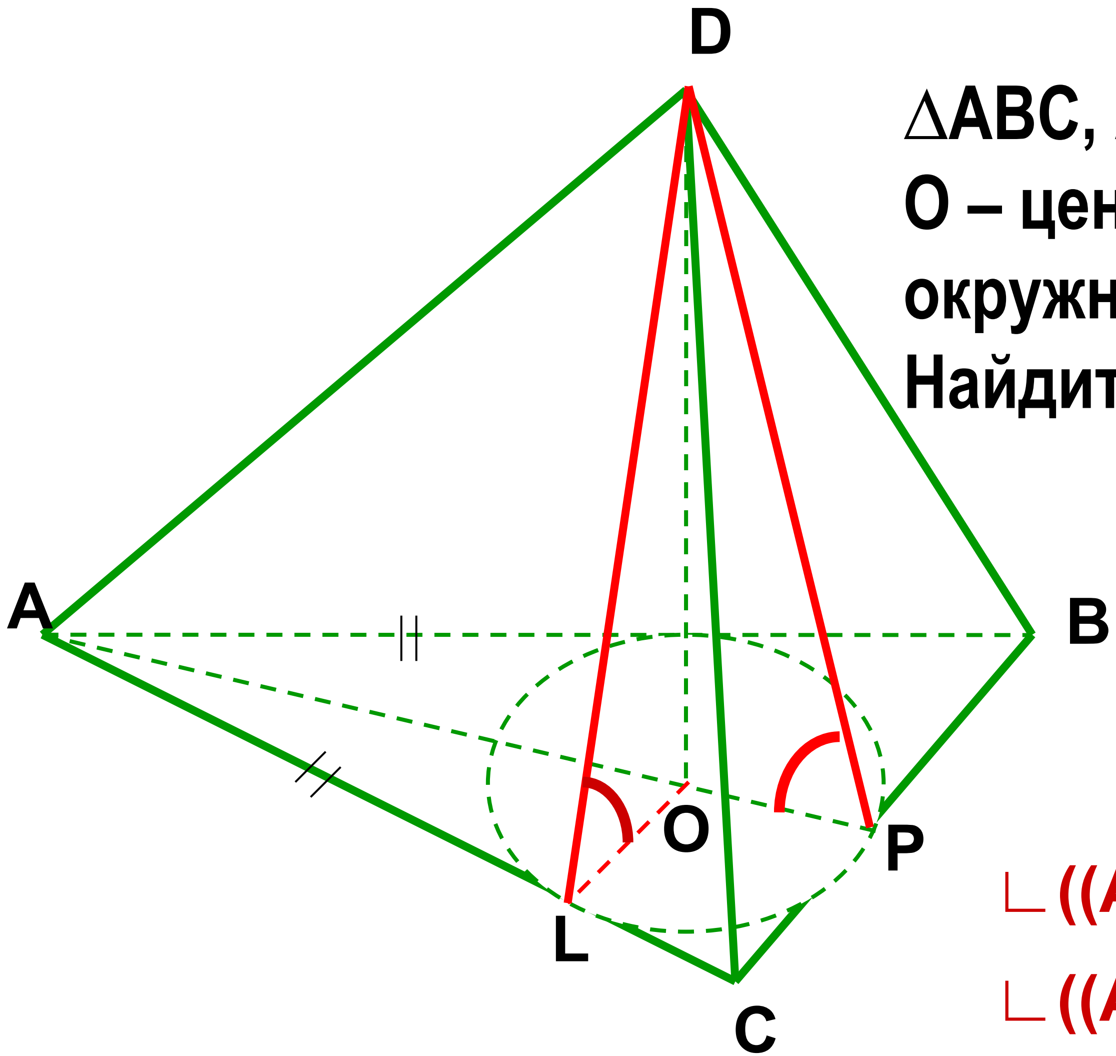


ΔABC, AC=AB,

O – центр вписанной окружности.

Найдите $\angle$ ((ABC),(BCD)),

$\angle$ ((ABC),(ACD)).

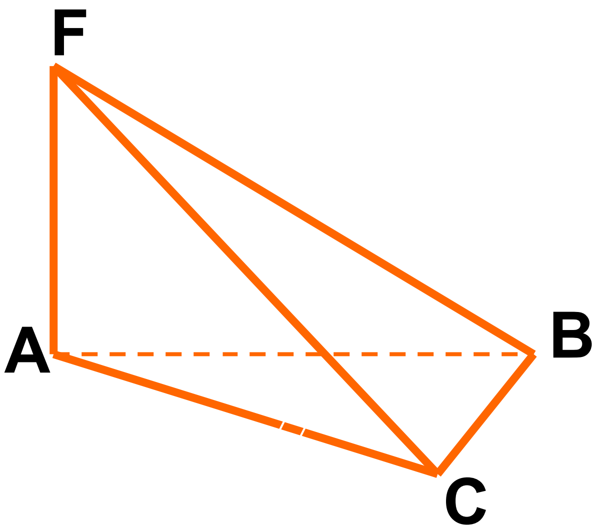


ΔABC, AC=AB,
O – центр вписанной окружности.
Найдите ∟ ((ABC),(BCD)),
∟ ((ABC),(ACD)).

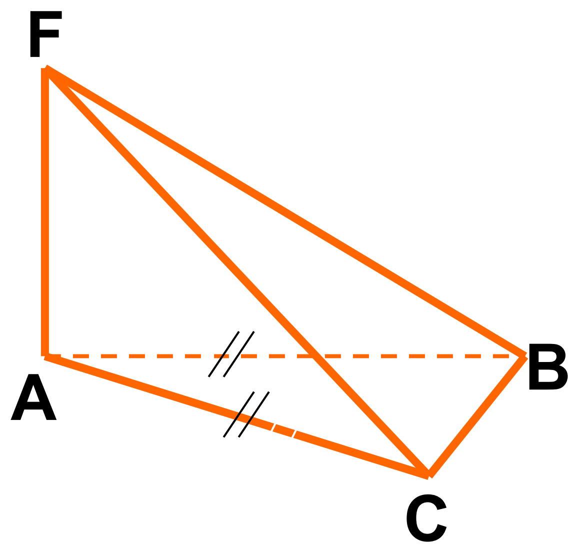
∟((ABC),(BCD))= ∟ DPO

∟((ABC),(ACD))= ∟ DLO

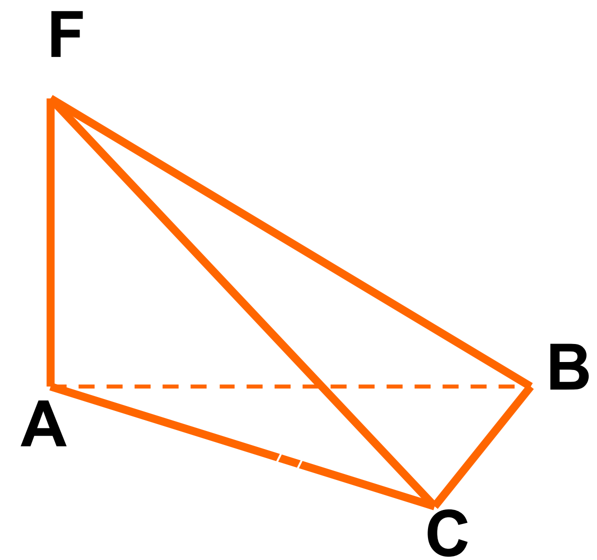
Работа по вариантам:



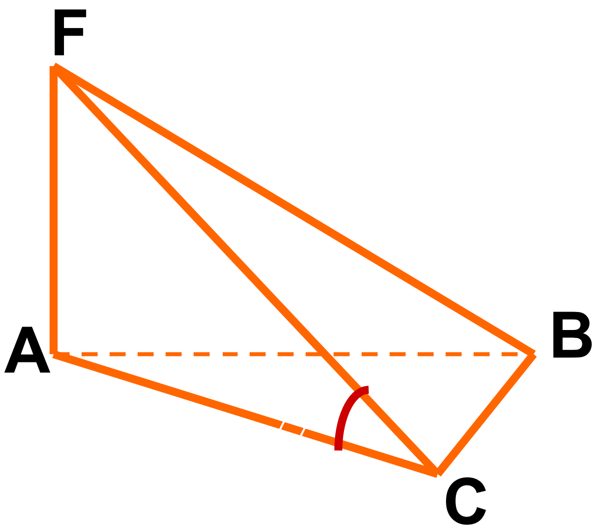
∆ABC прямоугольный (C= 90º)



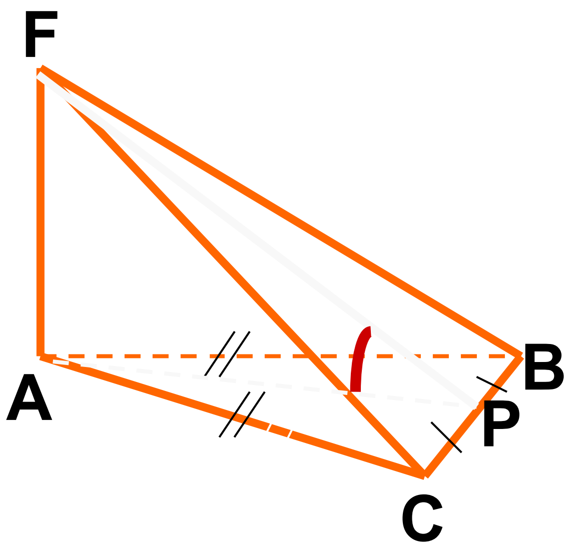
∆ABC равнобедренный



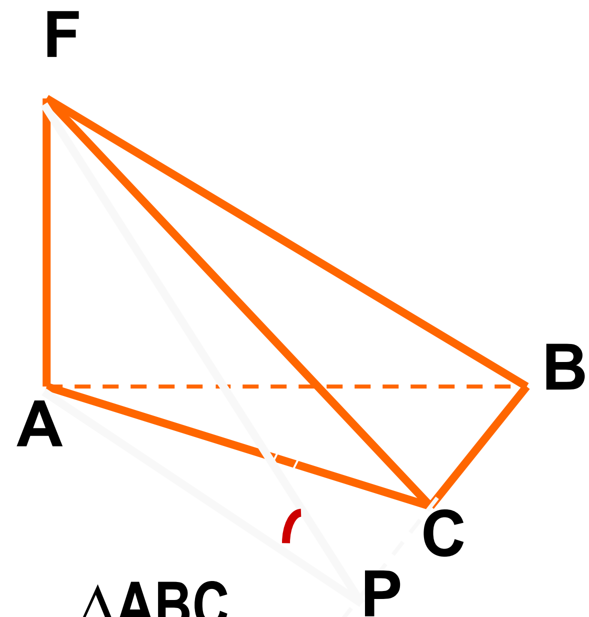
∆ABC тупоугольный (C> 90º)



ΔABC
прямоугольный
(C= 90º)
∟(BC)= ∟ ACF

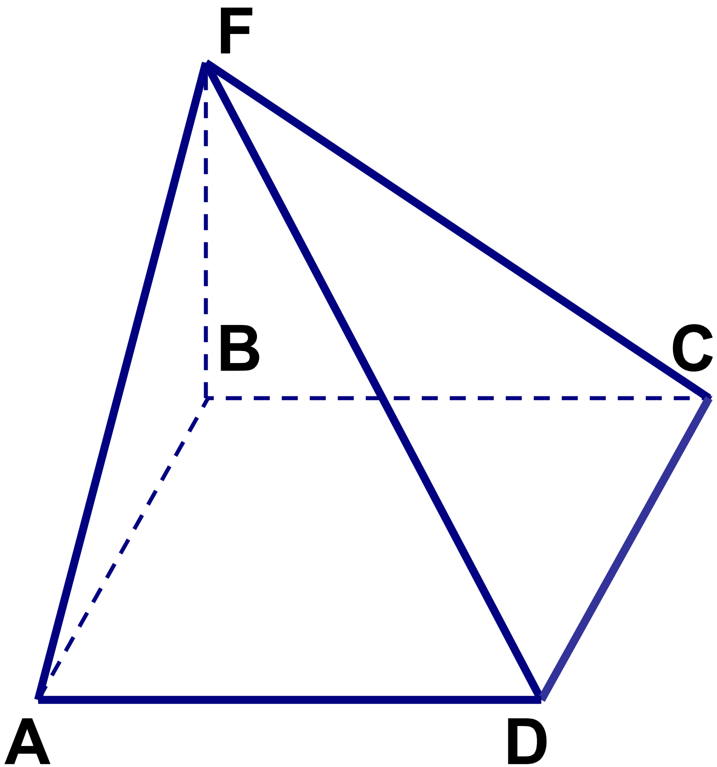


ΔABC
Равнобедренный
∟(BC)= ∟ FPA

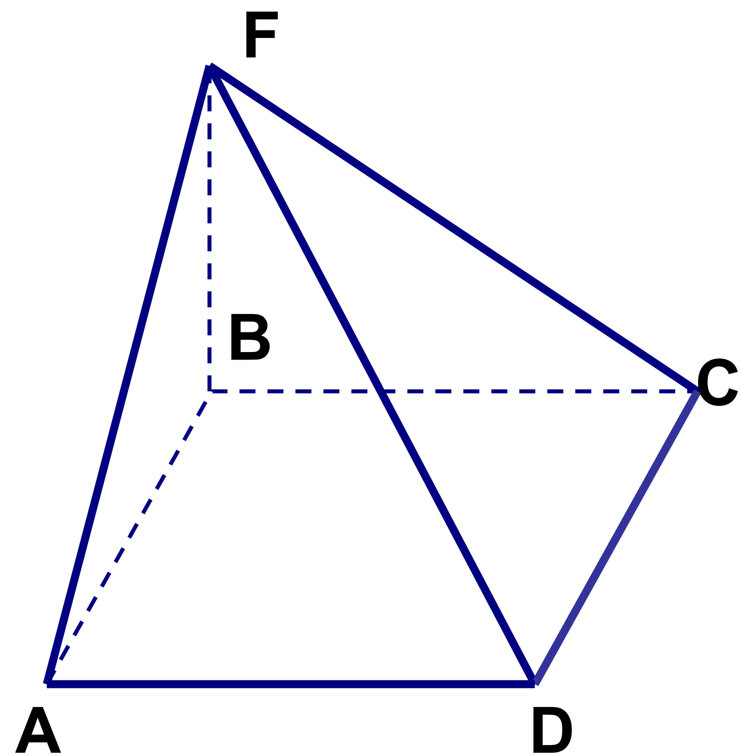


ΔABC
тупоугольный
(C> 90º)
∟(BC)= ∟ APF

FB⊥(ABC)
ABCD - прямоугольник

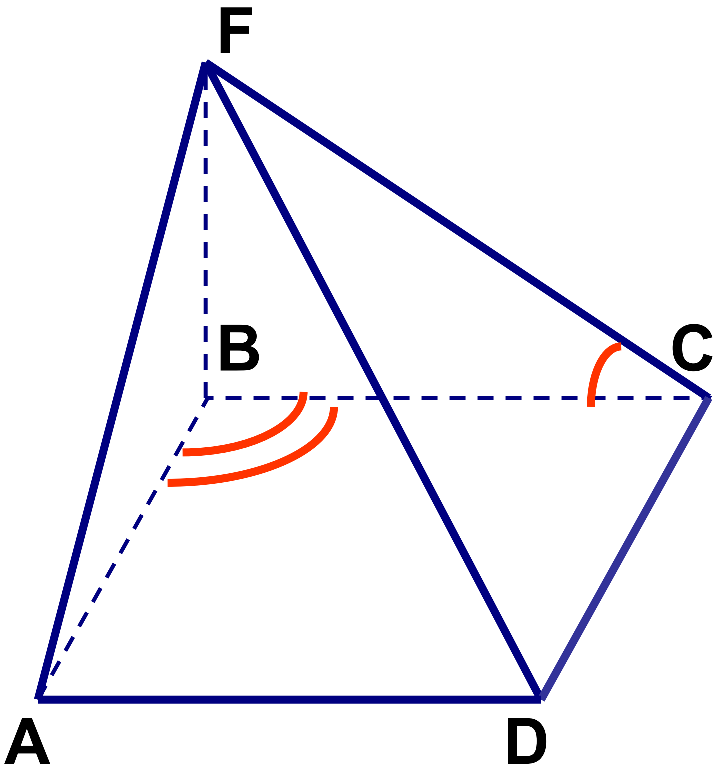


FB⊥(ABC)
ABCD - параллелограмм



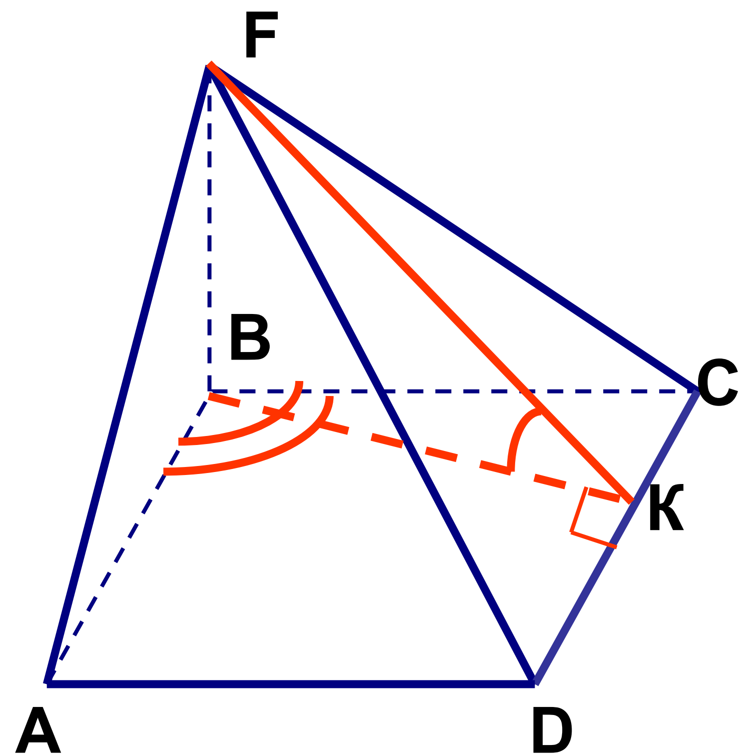
Найдите угол между (ABC) и (FDC);
Найдите угол между (AFB) и (FBC).

FB⊥(ABC)
ABCD - прямоугольник



а) ∟((ABC), (FCD))=∟FCB
б) ∟((AFB),(FBC))=∟ABC

FB⊥(ABC)
ABCD - параллелограмм

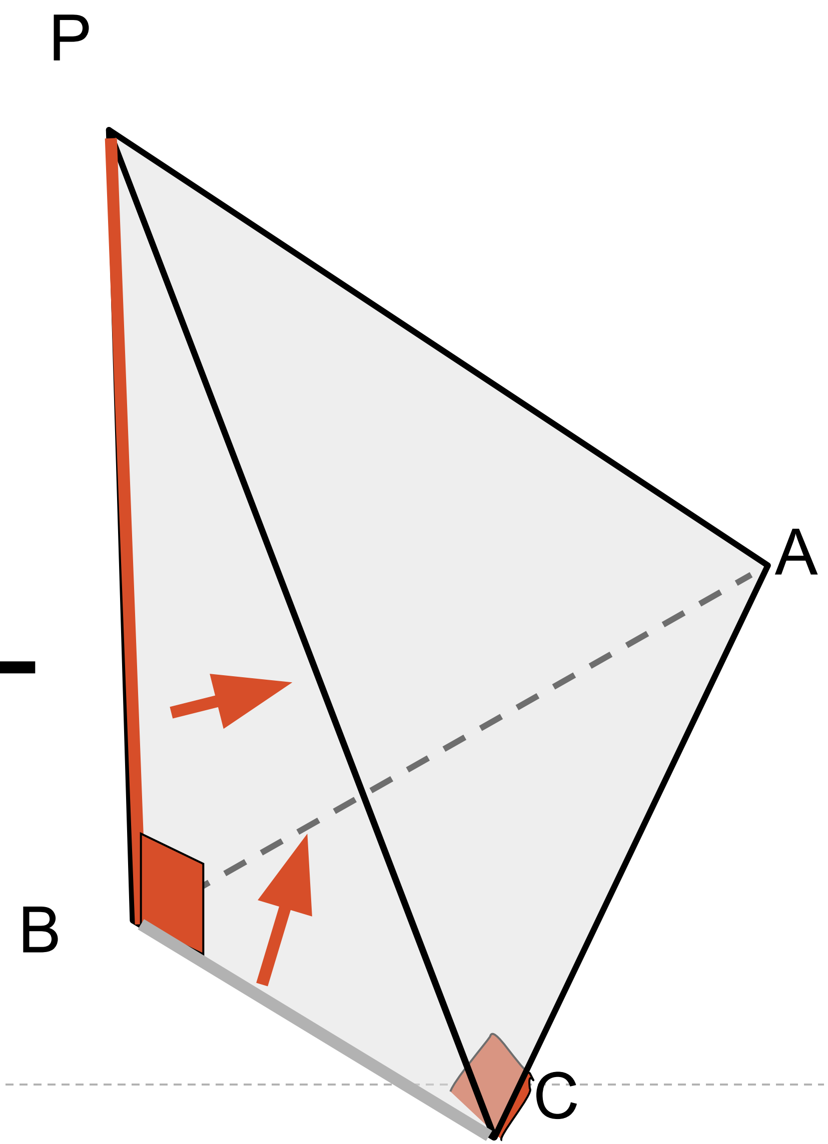


а)∟((ABC), (FCD))=∟FKB
б) ∟((AFB),(FBC))=∟ABC

а) PABC - пирамида;
∟ACB=90º;
(PB) ⊥ (ABC)
Доказать:
∠ PCB - линейный угол двугранного угла с ребром AC.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AC \\ PB \perp (ABC) \end{array}\right\} \quad PC \perp AC$$

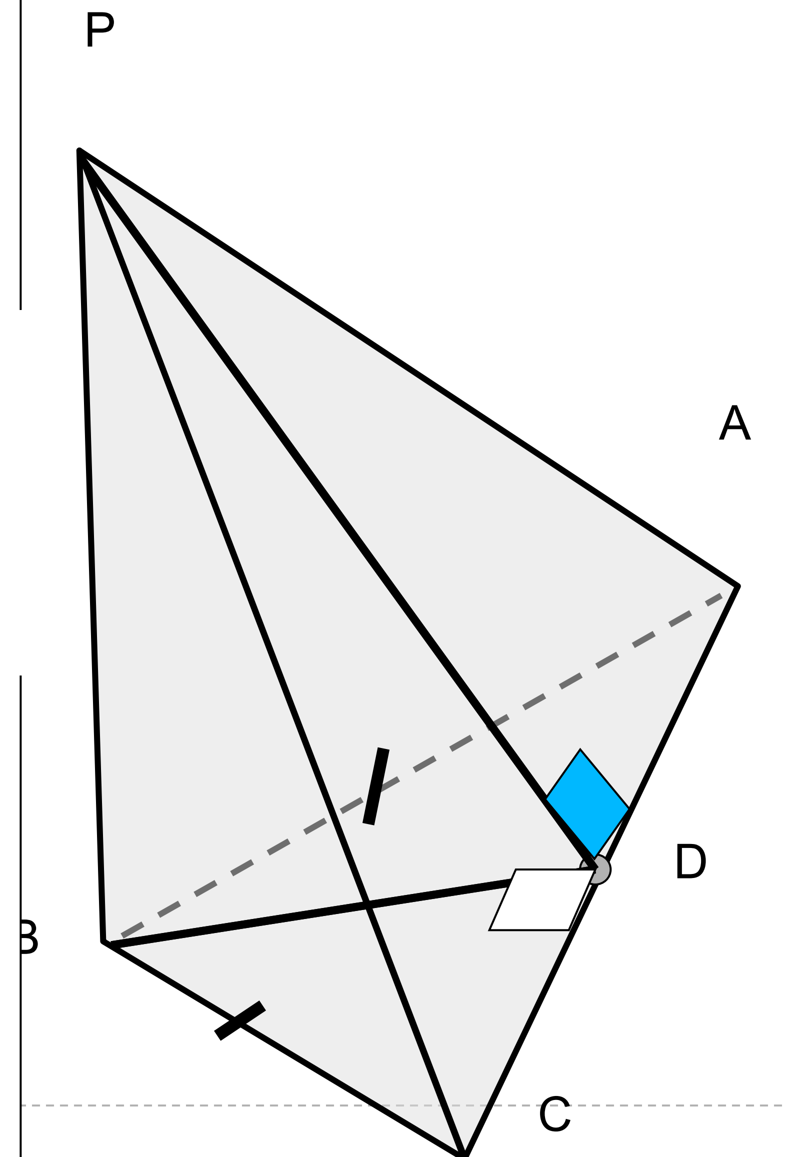
=> ∠PACB= ∠PCB



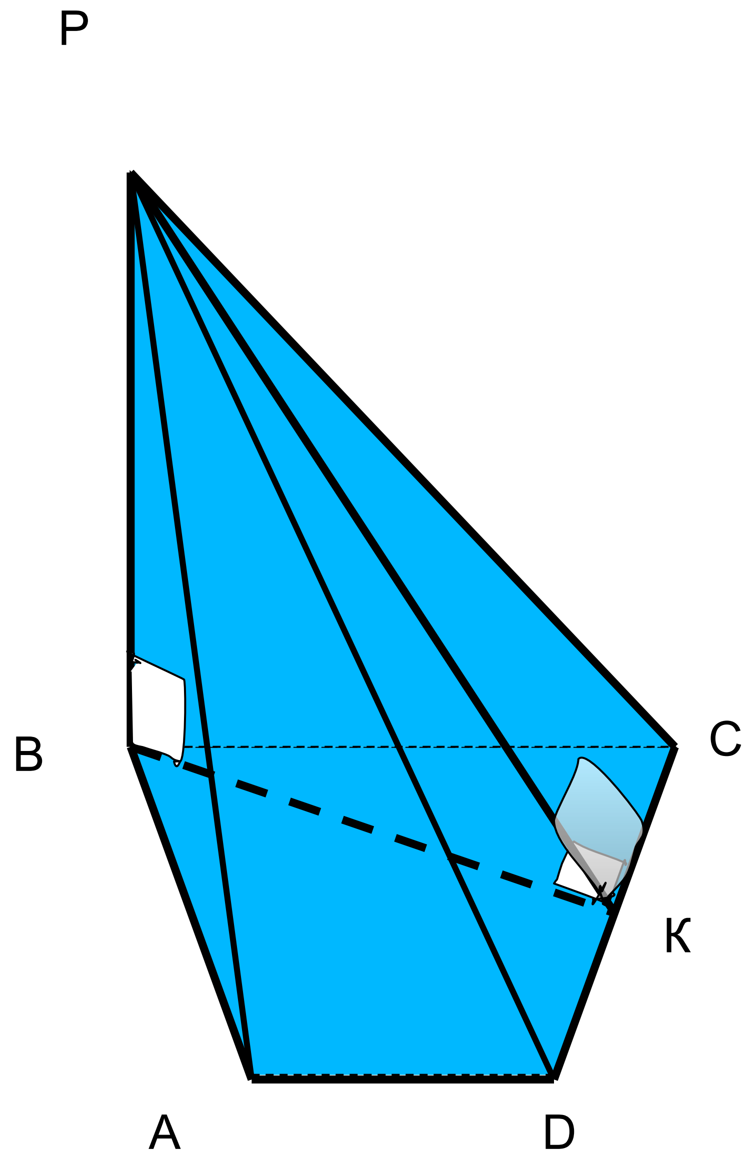
ΔABC – равнобедренный, D – середина AC, значит: BD$\perp$AC.

$$\left.\begin{aligned} BD &\perp AC \\ PB &\perp (ABC) \end{aligned}\right\} PD \perp AC$$

=> $\angle$PACB= $\angle$PDB



c) PABCD - пирамида;
(PB) $\perp$ (ABC);
(BK) $\perp$(DC);
Доказать:
$\angle$PKB - линейный угол двугранного угла с ребром CD.



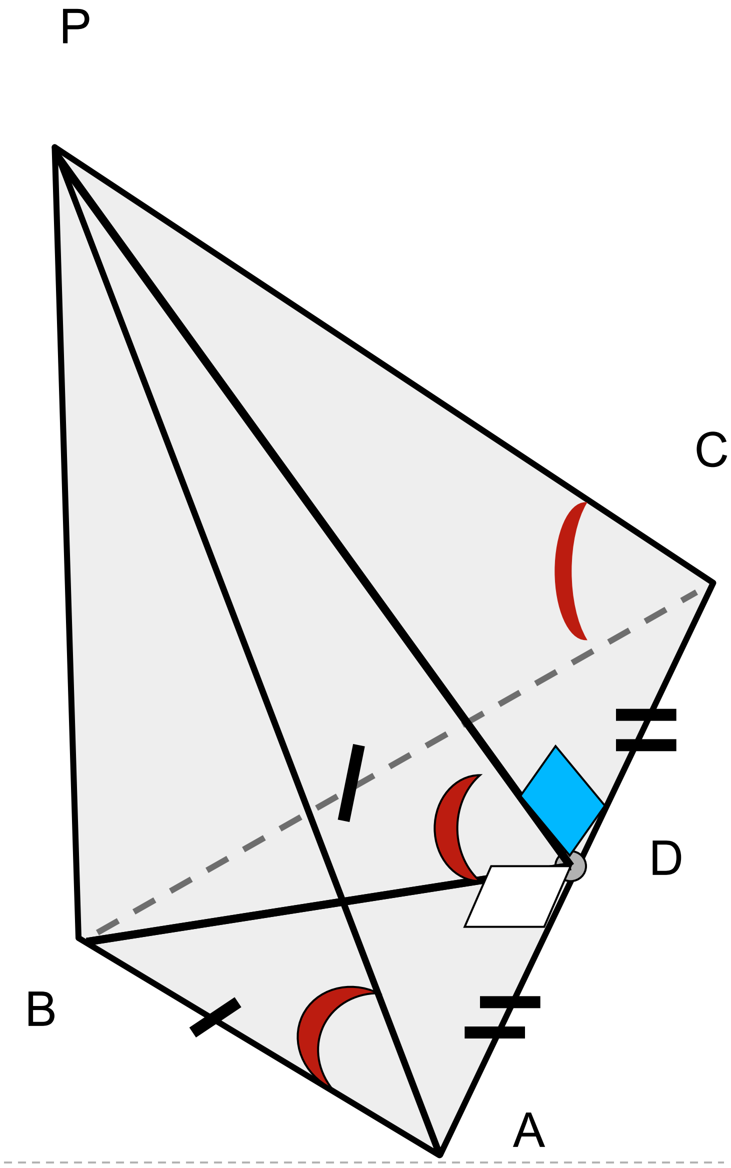
BK$\perp$PC

PB $\perp$(ABC)

$\left.\begin{array}{l} BK \perp PC \\ PB \perp (ABC) \end{array}\right\}$ PK $\perp$ DC

=> $\angle$PCDB= $\angle$PKB

а) PABC - пирамида;
основание - правильный треугольник;
Какой из отмеченных углов является линейным
углом двугранного угла с ребром AC, если:
D – середина AC,
(PB) $\perp$ (ABC).



в) Построить линейный угол двугранного угла с ребром АС,
если в пирамиде РАВС:
грань АВС – правильный треугольник, О – точка пересечения медиан треугольника АВС, $(PO) \perp (ABC)$;

$\angle PACB$ - ?

ВК-медиана,

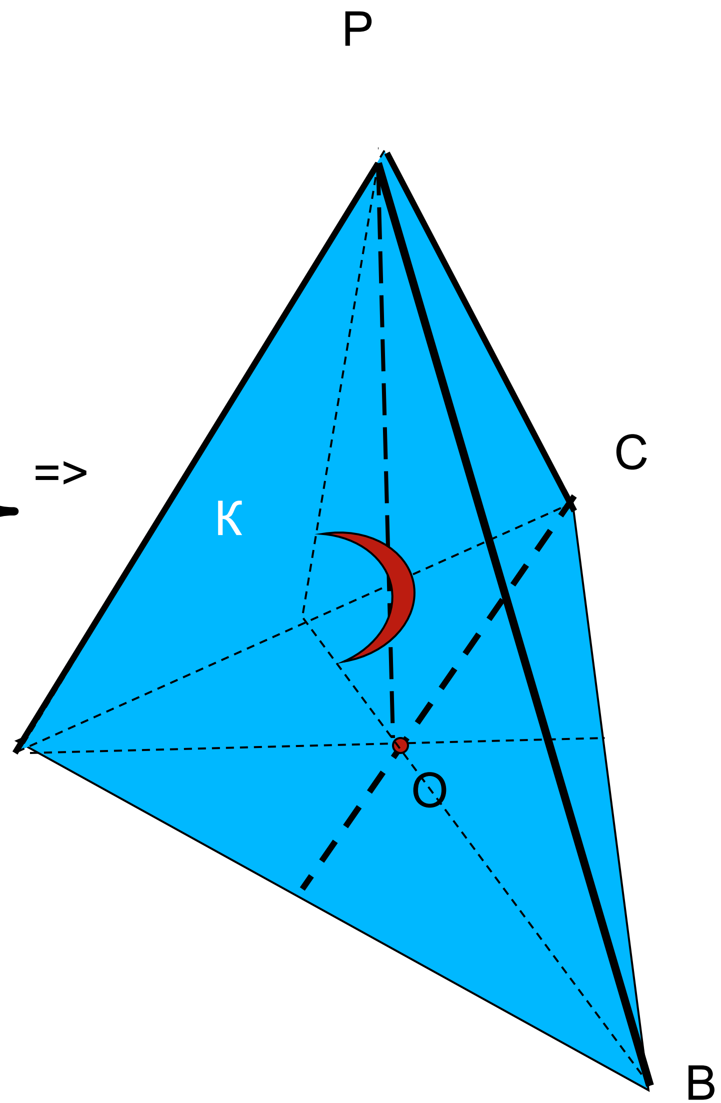
ΔАВС-правильный

=> ВК - высота

ВО $\perp$ АС
РО $\perp$ АВС

=>

РК $\perp$ АС



$\angle$РАСВ = $\angle$РКВ

c) Построить линейный угол двугранного угла с ребром AC, если в пирамиде PABC:

грань ABC – правильный треугольник,
O – середина AB,
$(PO) \perp (ABC)$;

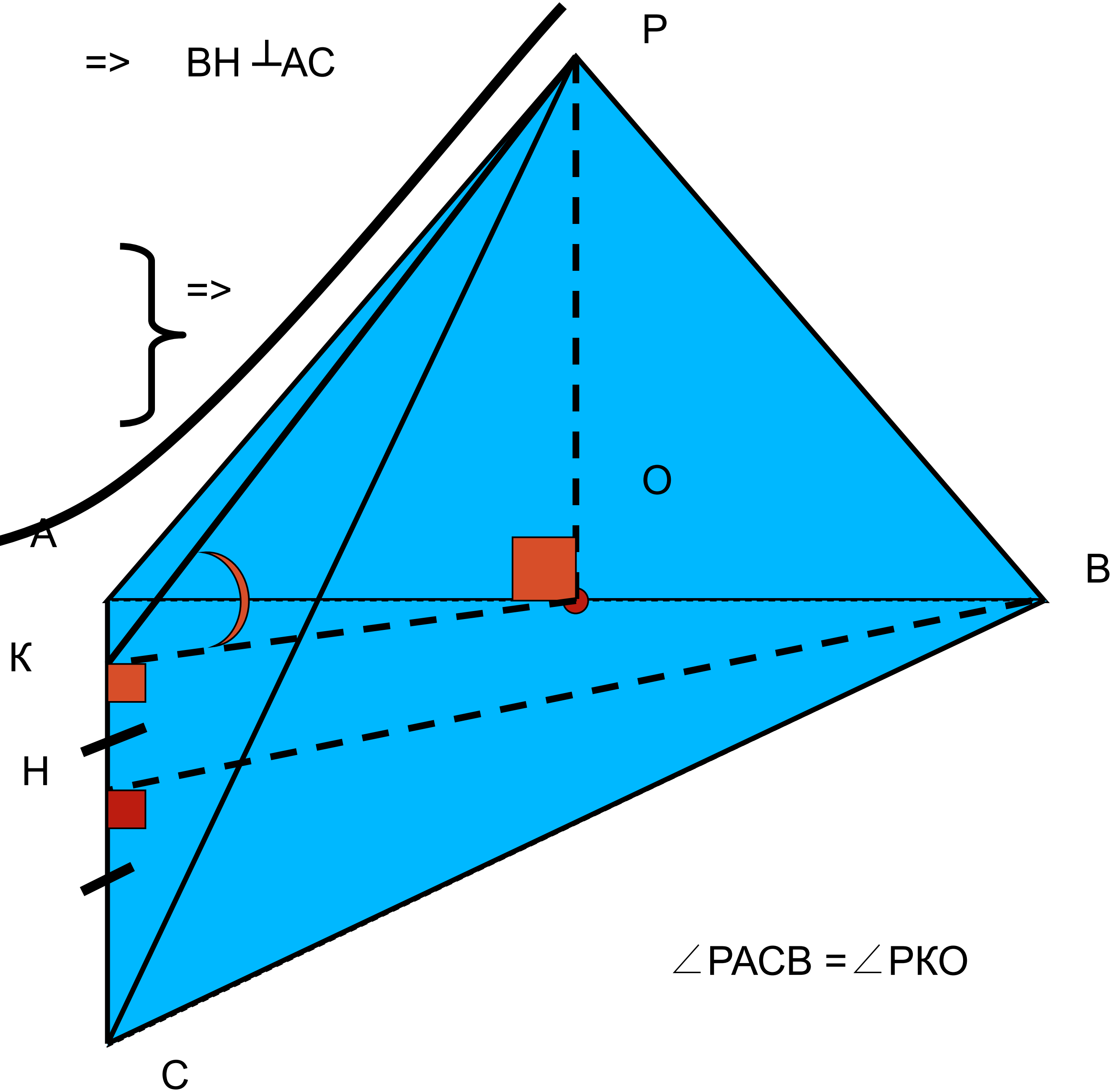
$\angle PACO$ - ?

AB=BC $\Rightarrow$ BH $\perp$ AC

KO $\parallel$ BH

$\left.\begin{array}{l} \text{KO} \perp \text{AC} \\ \text{PO} \perp \text{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow$

KP $\perp$ AC



$\angle$PACB = $\angle$PKO

D) Дан прямоугольник ABCD
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC, если:
(PB) $\perp$ (ABC);

$\angle$BCDP - ?

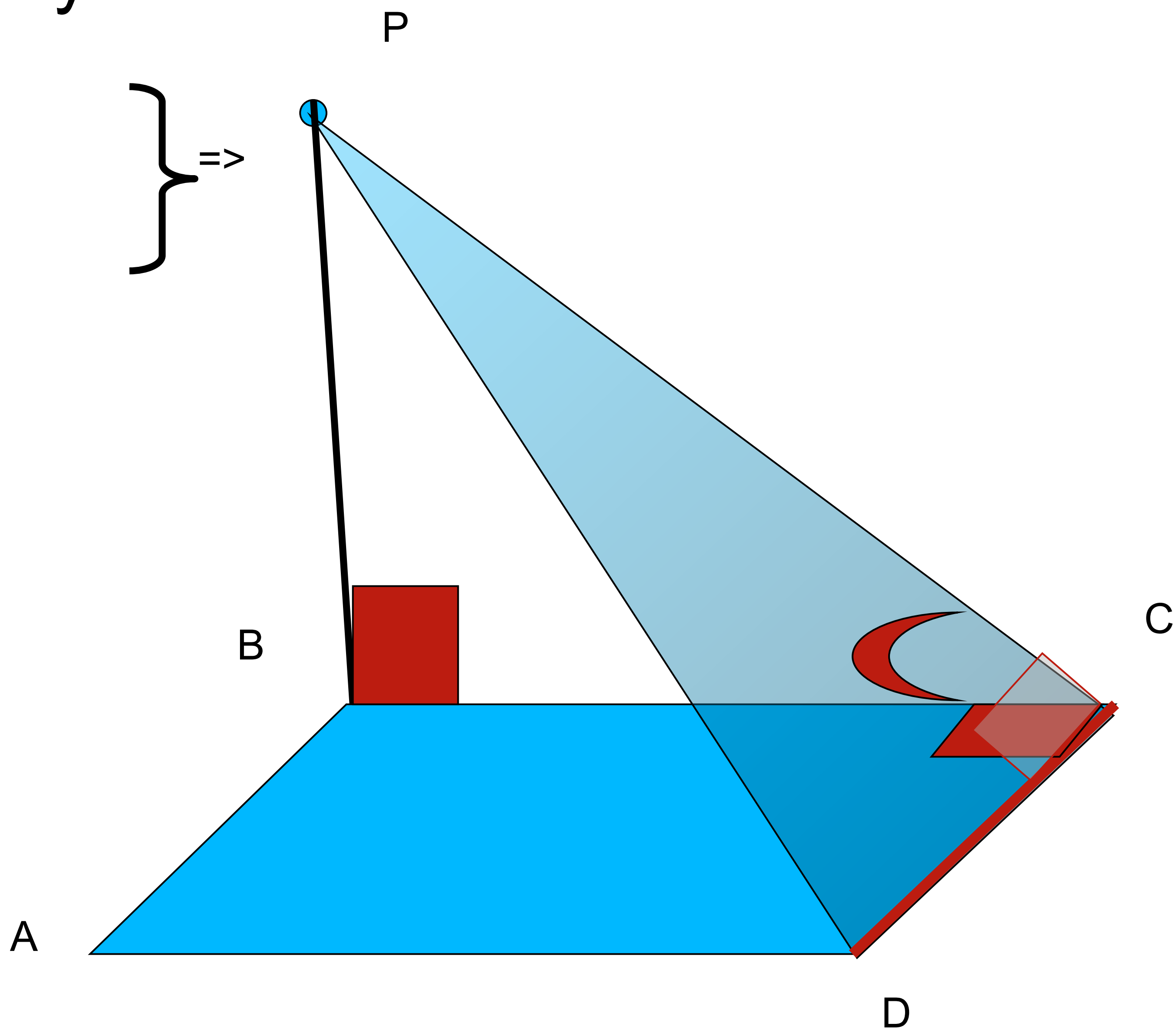
ABCD-прямоугольник

BC ⊥CD
PB ⊥ ABC

=>

PC ⊥ CD

Значит:
∠BCDP= ∠BCP



е)Дан прямоугольник ABCD
и точка P вне его плоскости.
Построить линейный угол
двугранного угла с ребром DC, если:

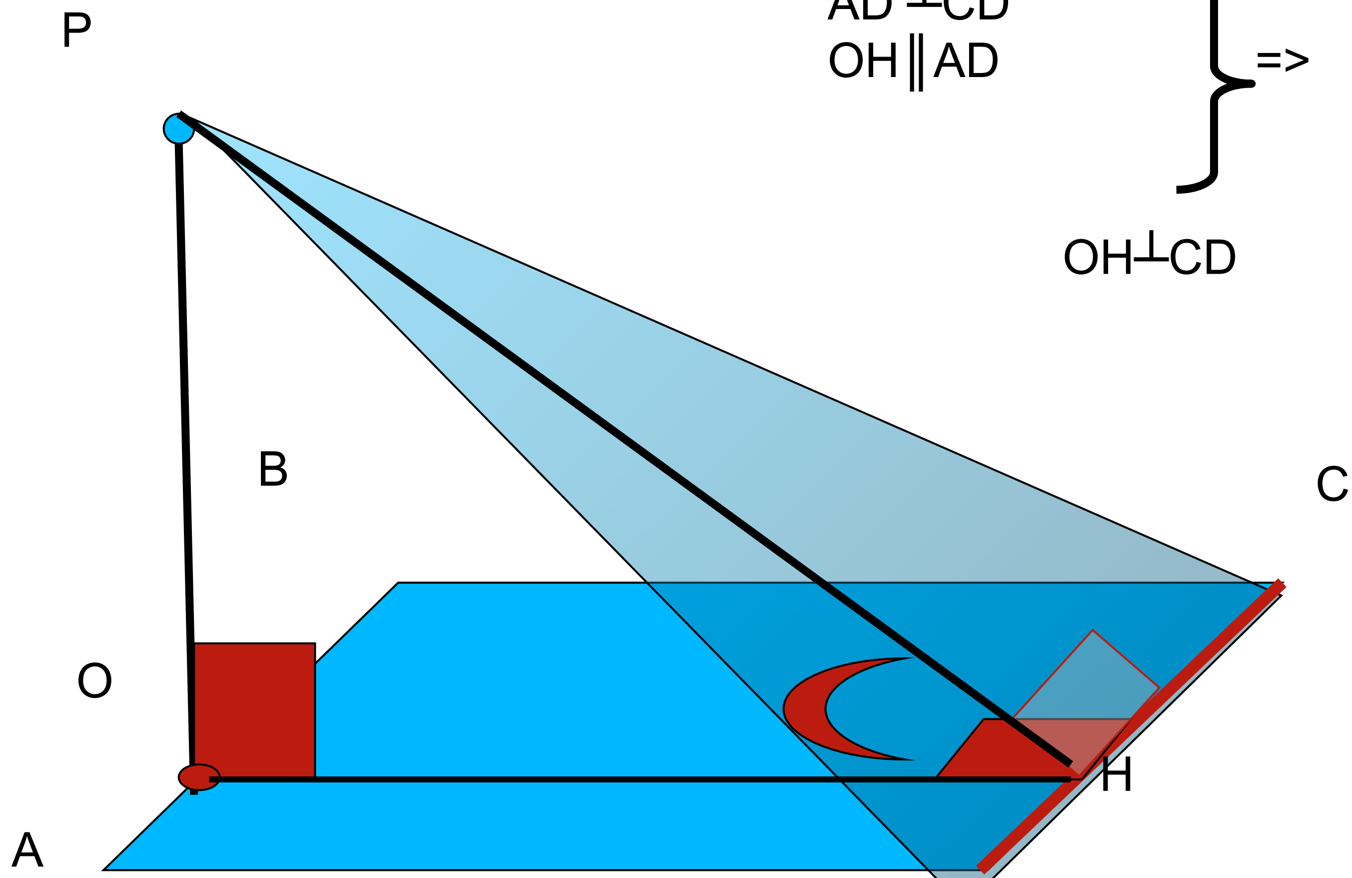
$O \in AB$; $(PO) \perp (ABC)$.

$\angle OCDP$ - ?

$PO \perp ABC \Rightarrow PH \perp CD$

$AD \perp CD$
$OH \parallel AD$ $\Rightarrow$

$OH \perp CD$



Значит:
$\angle OCDP = \angle PHO$

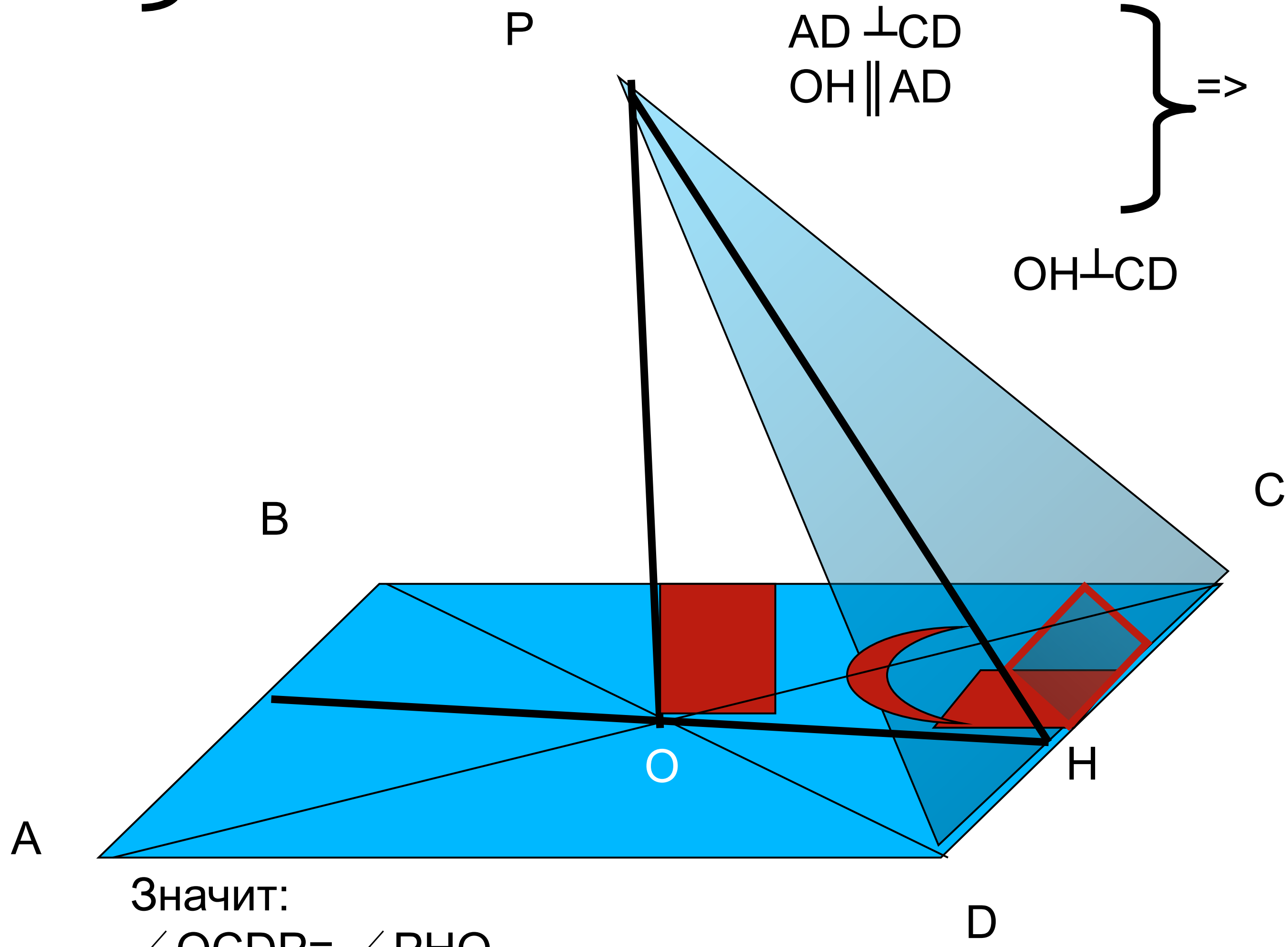
f)Дан прямоугольник ABCD и точка P вне его плоскости. Построить линейный угол двугранного угла с ребром DC, если:

O – точка пересечения диагоналей ABCD, $(PO) \perp (ABC)$.

$\angle OCDP$ - ?

$$\left.\begin{array}{l} PO \perp ABC \\ \end{array}\right\} \Rightarrow PH \perp CD$$

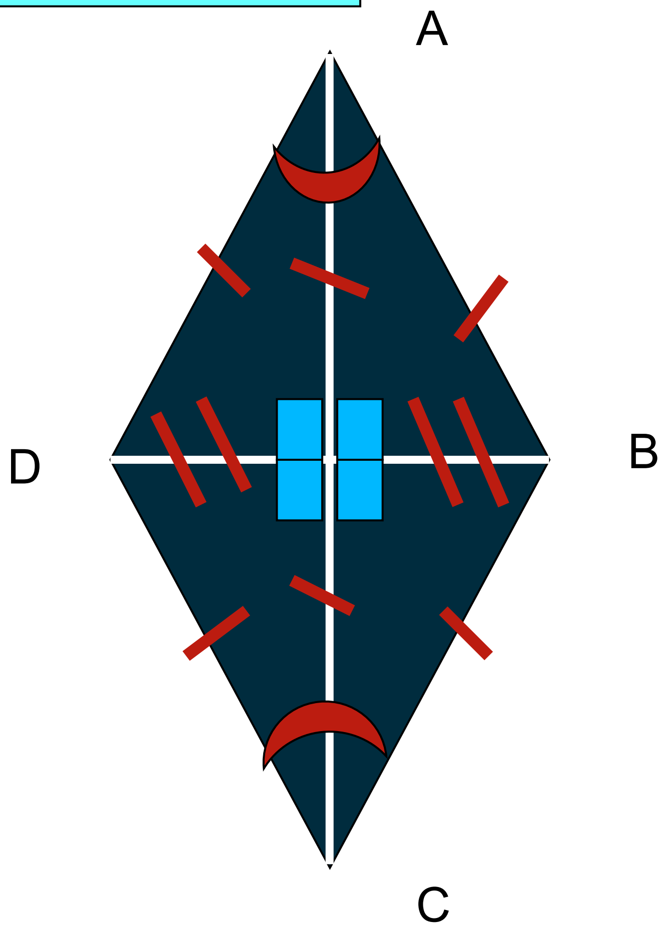
$$\left.\begin{array}{l} AD \perp CD \\ OH \parallel AD \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp CD$$



Значит:

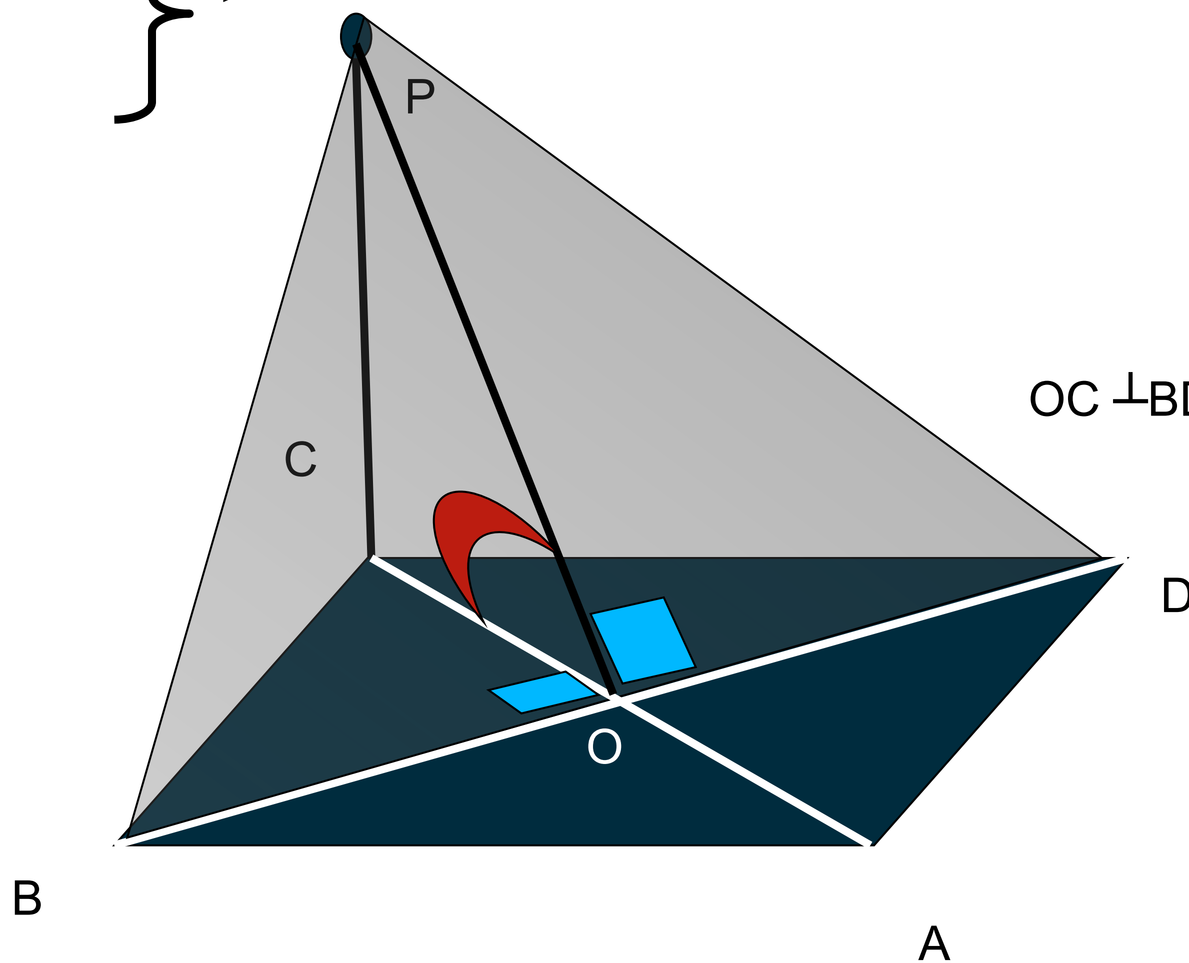
$\angle OCDP = \angle PHO$

g) Дан ромб ABCD; (PC) $\perp$ (ABC).



$PC \perp ABC$ $\Big\}$ => $PO \perp BD$

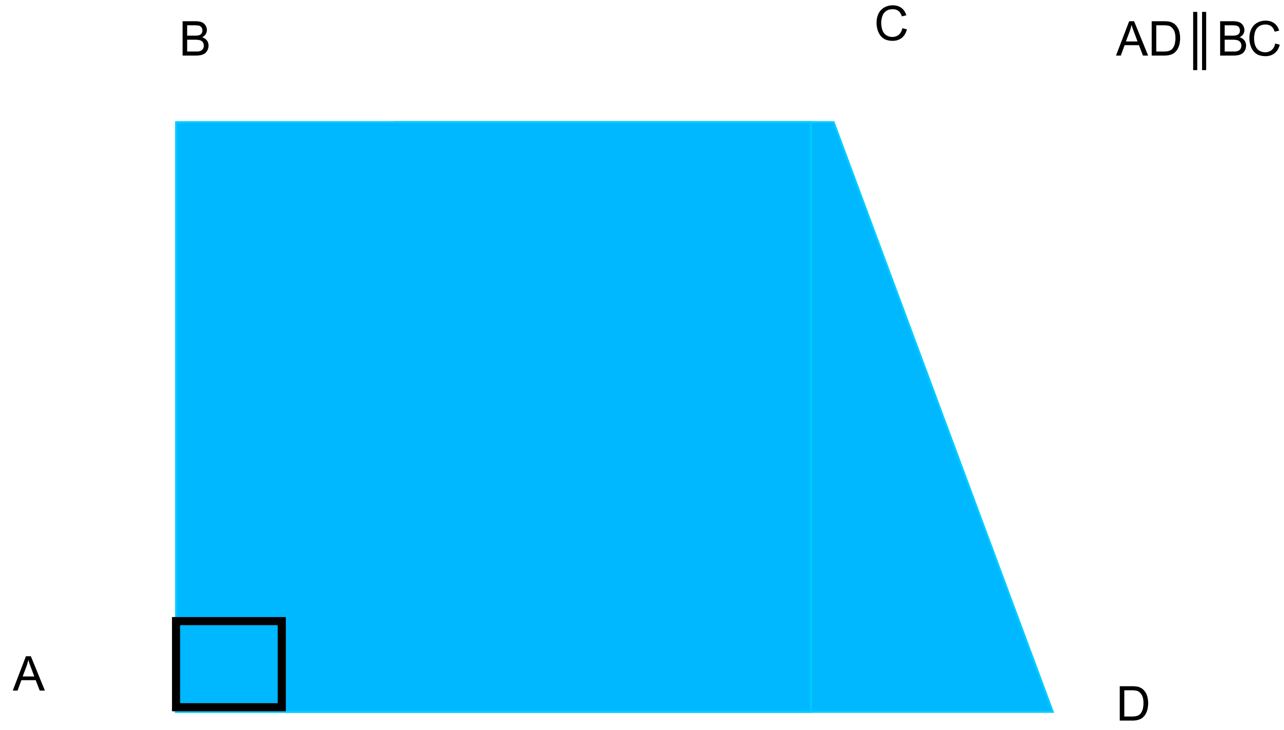
ABCD- ромб => $CA \perp BD$,
$CA \cap BD = O$ =>



$OC \perp BD$

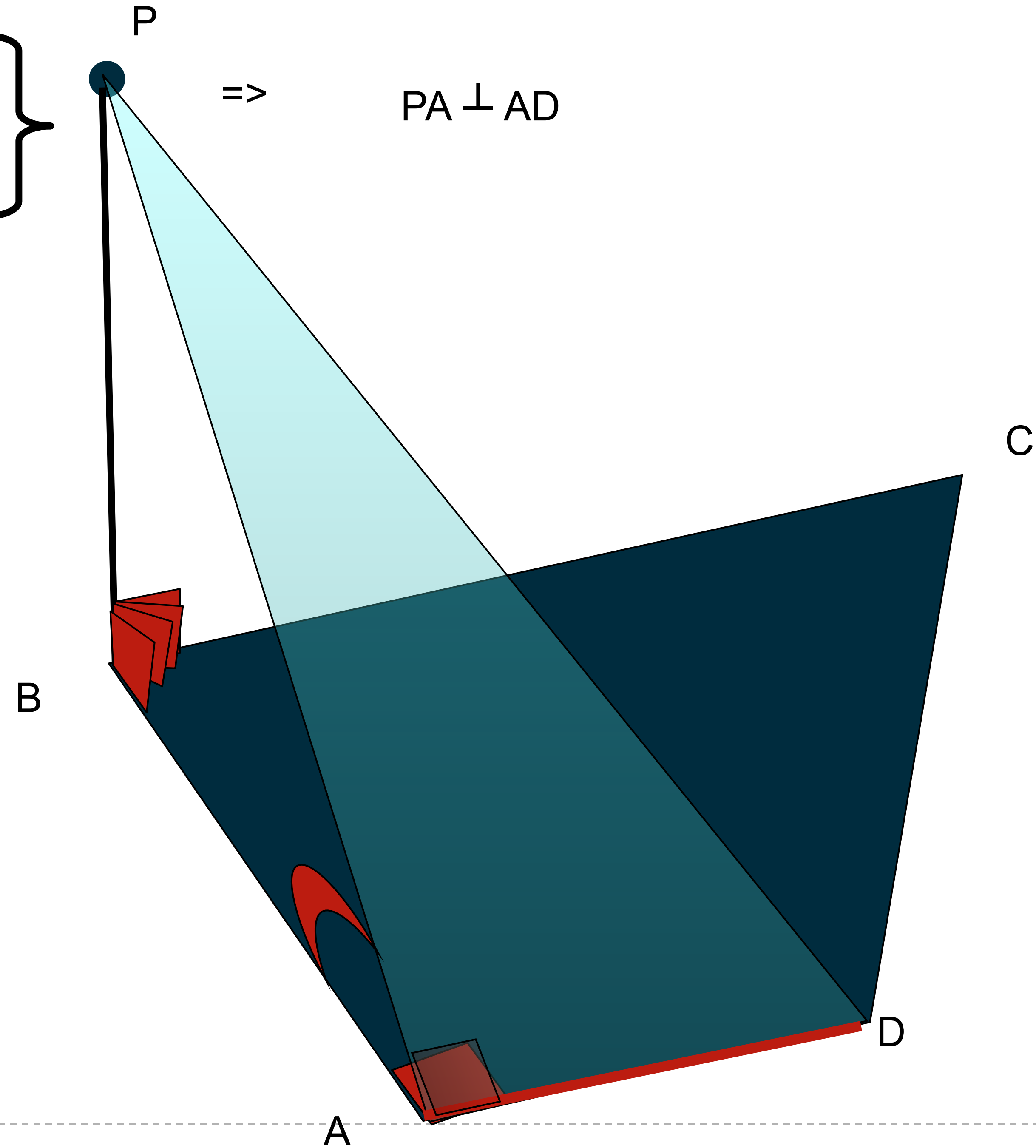
Значит:
$\angle PBDC = \angle POC$

i) Дана трапеция ABCD; $\angle BAD=90^{\circ}$;
Построить линейный угол двугранного угла с ребром AD, если: $(PB)\perp(ABC)$.



$\angle BADP$ - ?

$$\left.\begin{aligned} BA \perp AD \\ PB \perp ABC \end{aligned}\right\} \Rightarrow PA \perp AD$$



Значит:

$\angle BADP = \angle BAP$

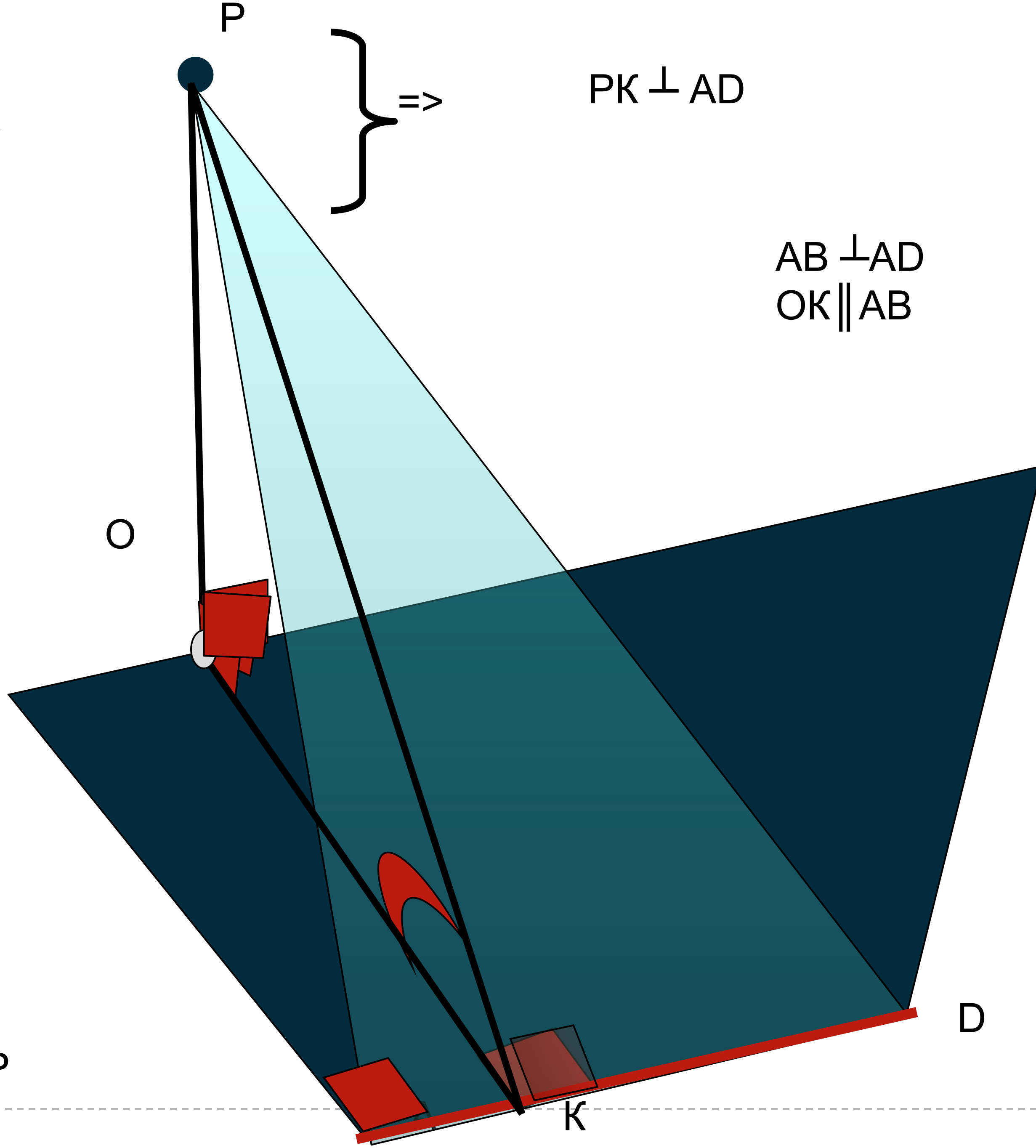
k) Dана трапеция ABCD;

$\angle$BAD=90º;

Построить линейный угол двугранного угла с ребром AD , если:

$O \in BC$; $(PO) \perp (ABC)$.

$\angle$BADP - ?



$PO \perp ABC$

$PK \perp AD$

$AB \perp AD$

$OK \parallel AB$

=>

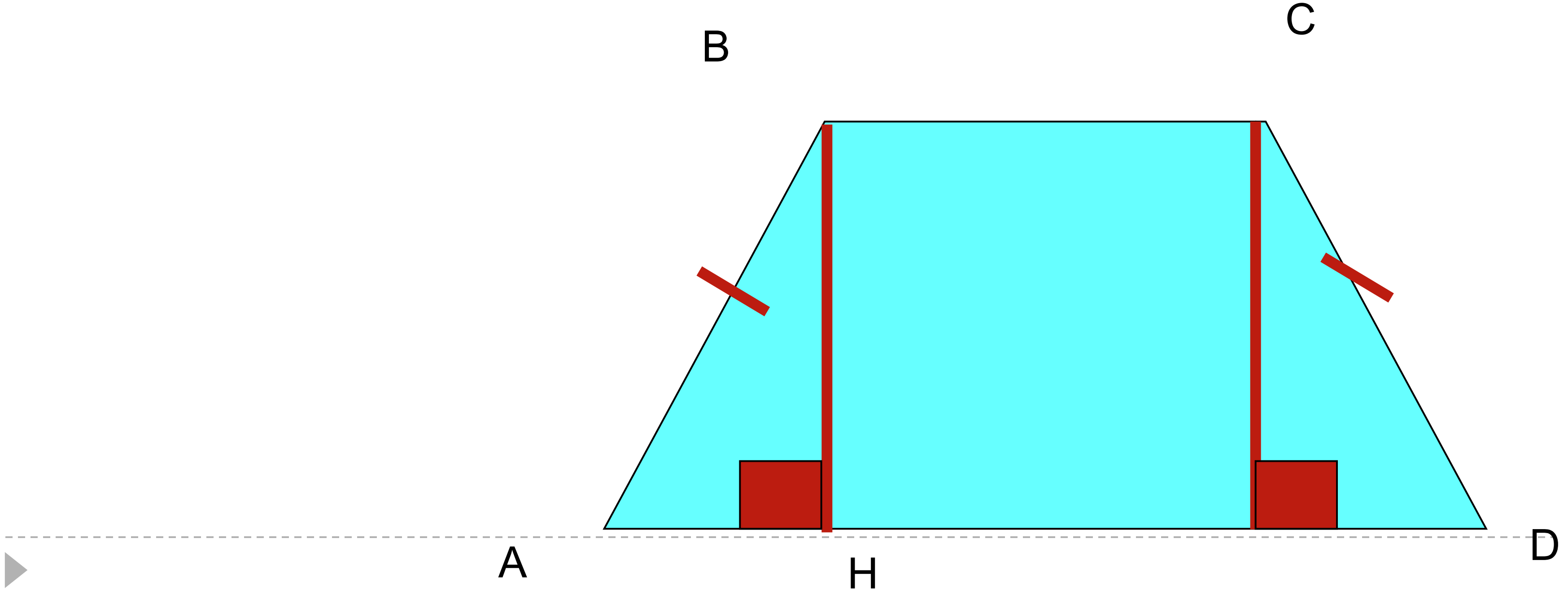
$OK \perp AD$

Значит:

$\angle BADP = \angle OKP$

I) Дана трапеция ABCD. Построить линейный угол двугранного угла с ребром AD , если: AB=CD,

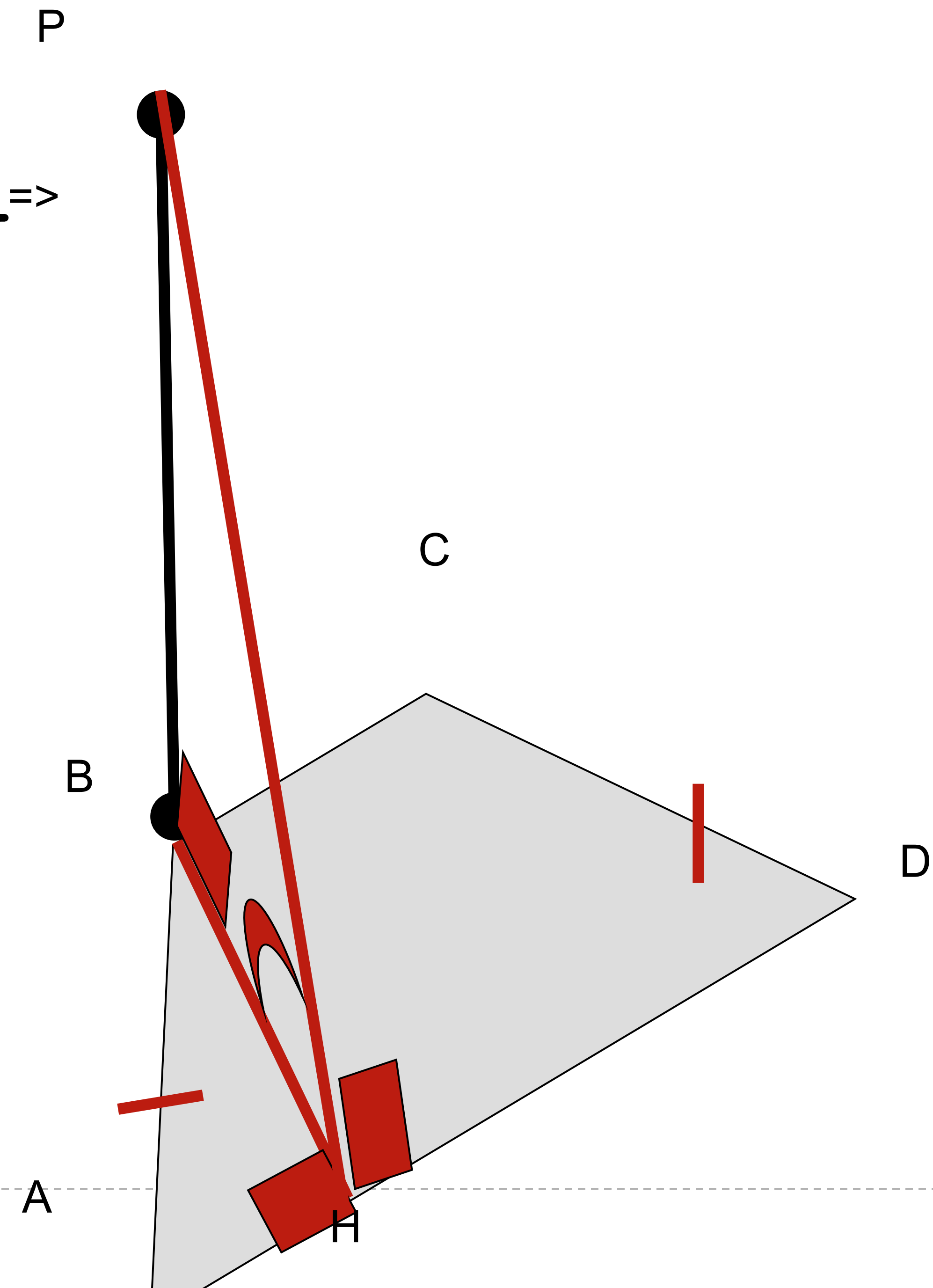
(PB) $\perp$ (ABC).



$BH \perp AD$
$PB \perp ABC$ =>

$PH \perp AD$

Значит:
$\angle BADP = \angle BHP$



m) Dана трапеция ABCD. Построить линейный угол двугранного угла с ребром AD , если:

ABCD — равнобокая трапеция; AB=CD, (PC) $\perp$ (ABC);

CH $\perp$AD

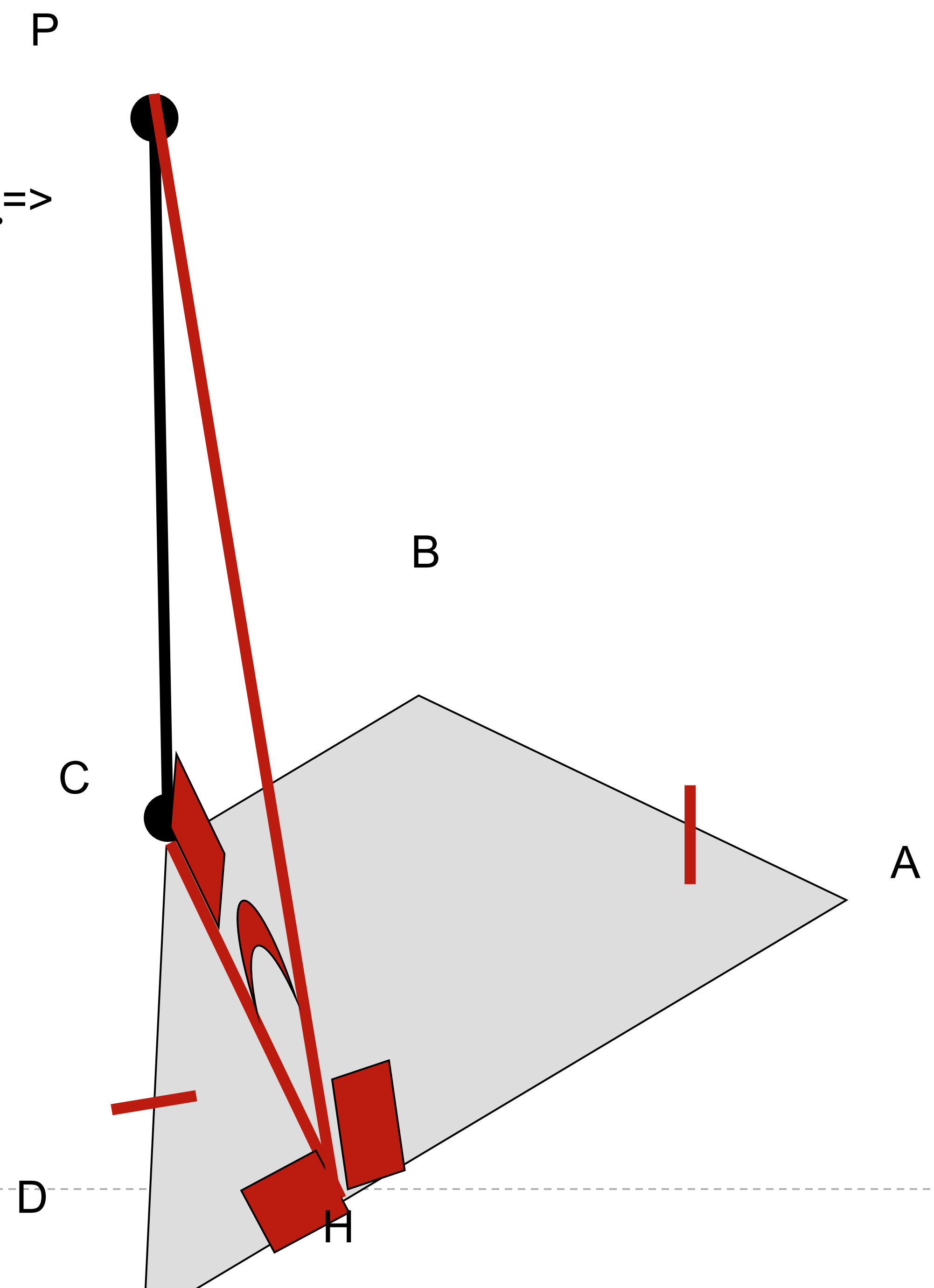
PC $\perp$ ABC

=>

PH $\perp$ AD

Значит:

$\angle$CADP= $\angle$CHP



4. Вычислительные задачи.

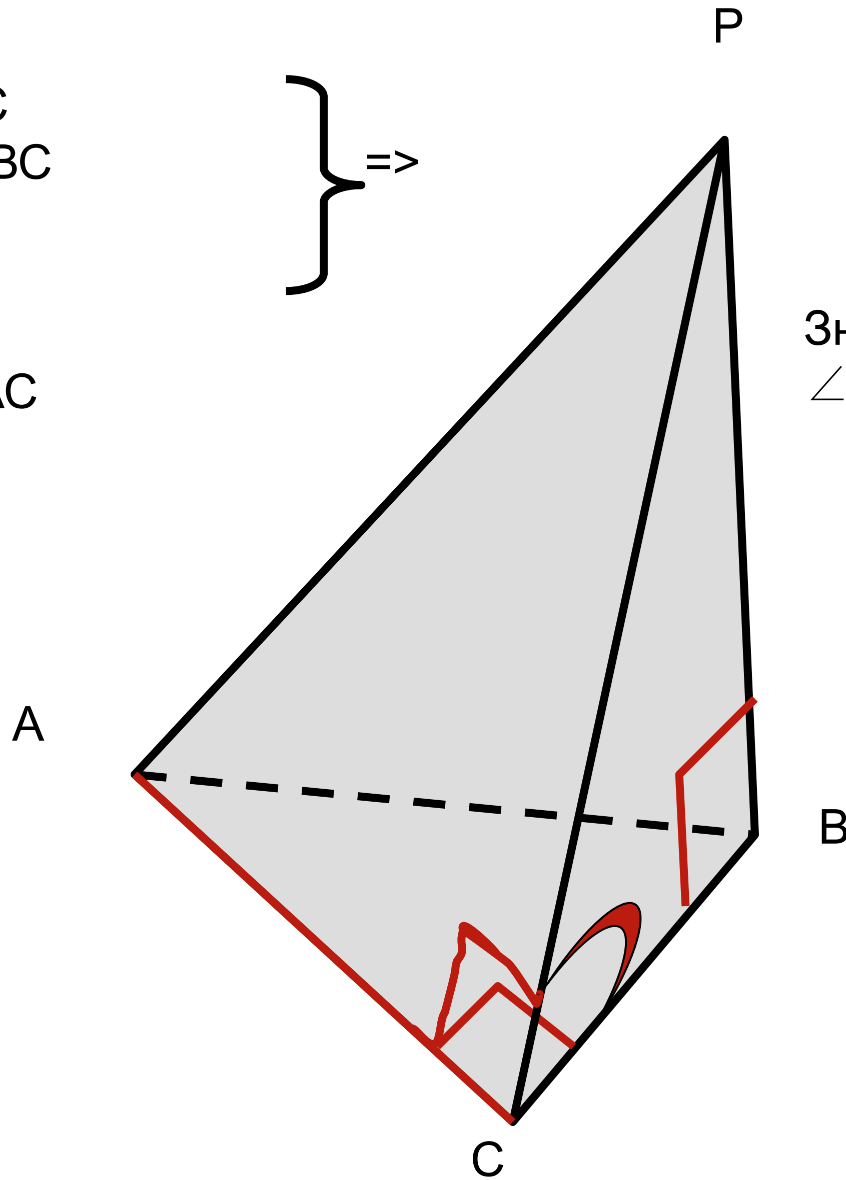
а) PABC — пирамида;
найти величину двугранного угла
с ребром AC, если:

$(PB) \perp (ABC)$; $\angle ACB =$
$90°$;
$BC = PB = 4$

1)

$\left.\begin{array}{l} AC \perp BC \\ PB \perp ABC \end{array}\right\} \Rightarrow$

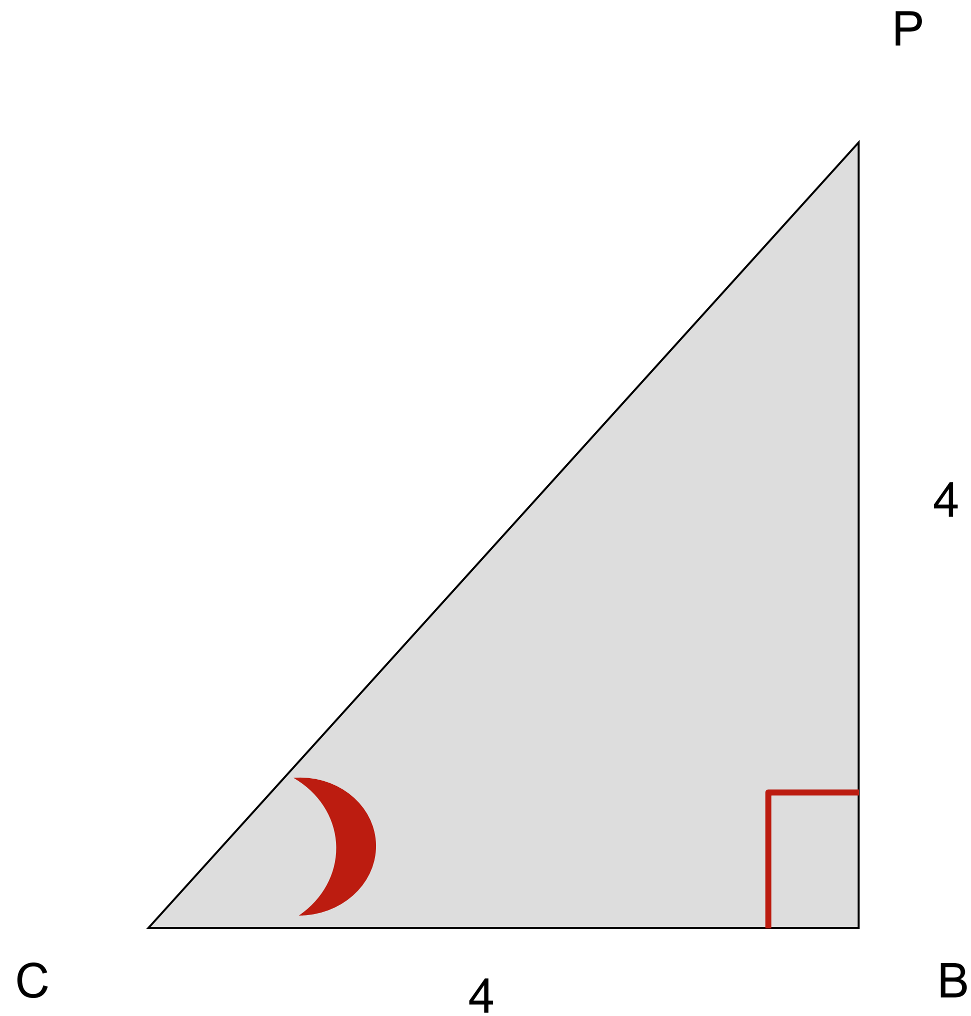
$PC \perp AC$



Значит:
$\angle BACP = \angle BCP$

2) BP=BC => ΔCBP - равнобедренный,

$\angle C = \angle P = 45°$



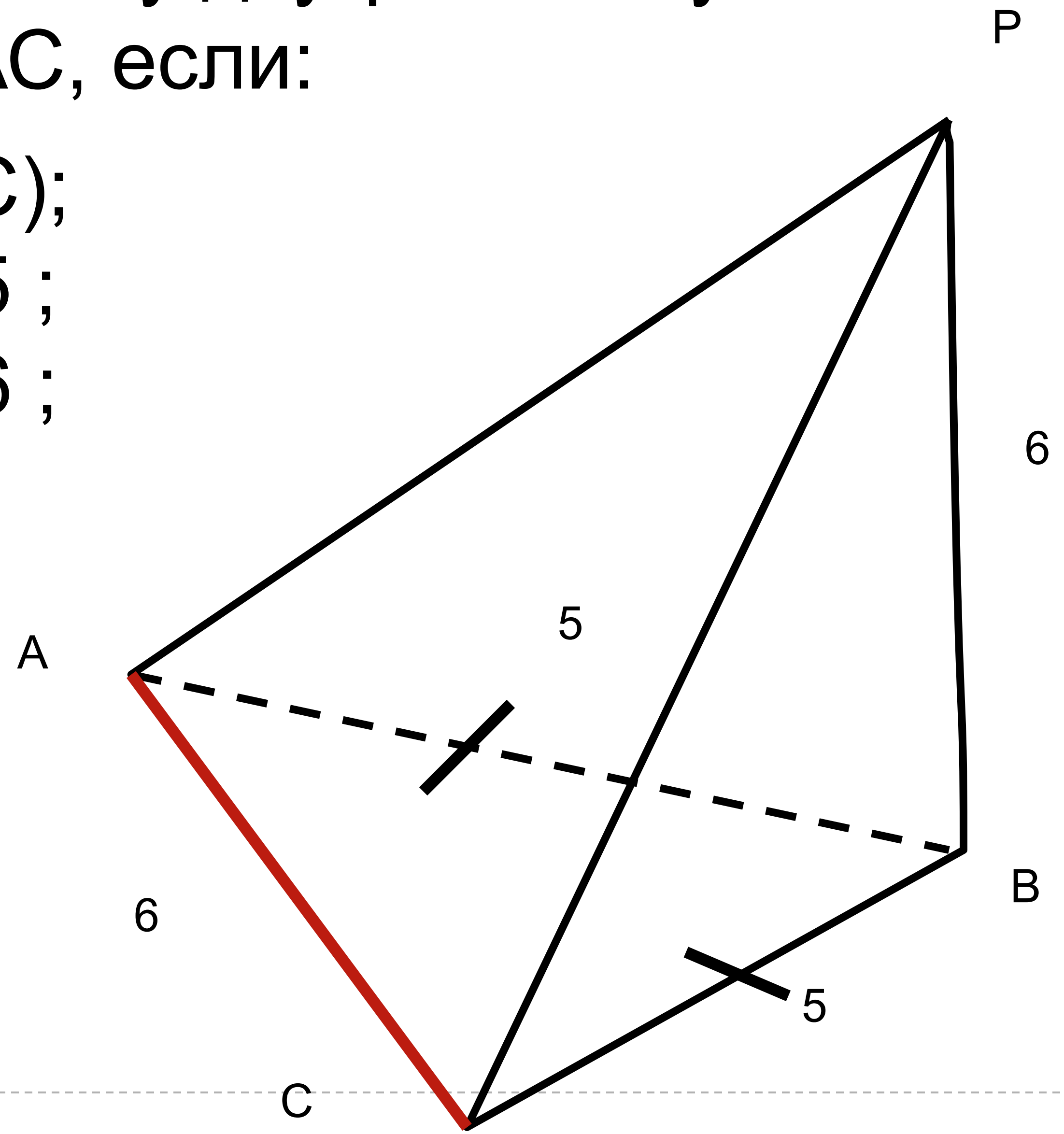
Ответ: $\angle BCP = 45°$

в) PABC — пирамида;
найти величину двугранного угла с ребром AC, если:

$(PB) \perp (ABC)$;

$AB = BC = 5$;

$BP = AC = 6$;



$\angle PACB$-?

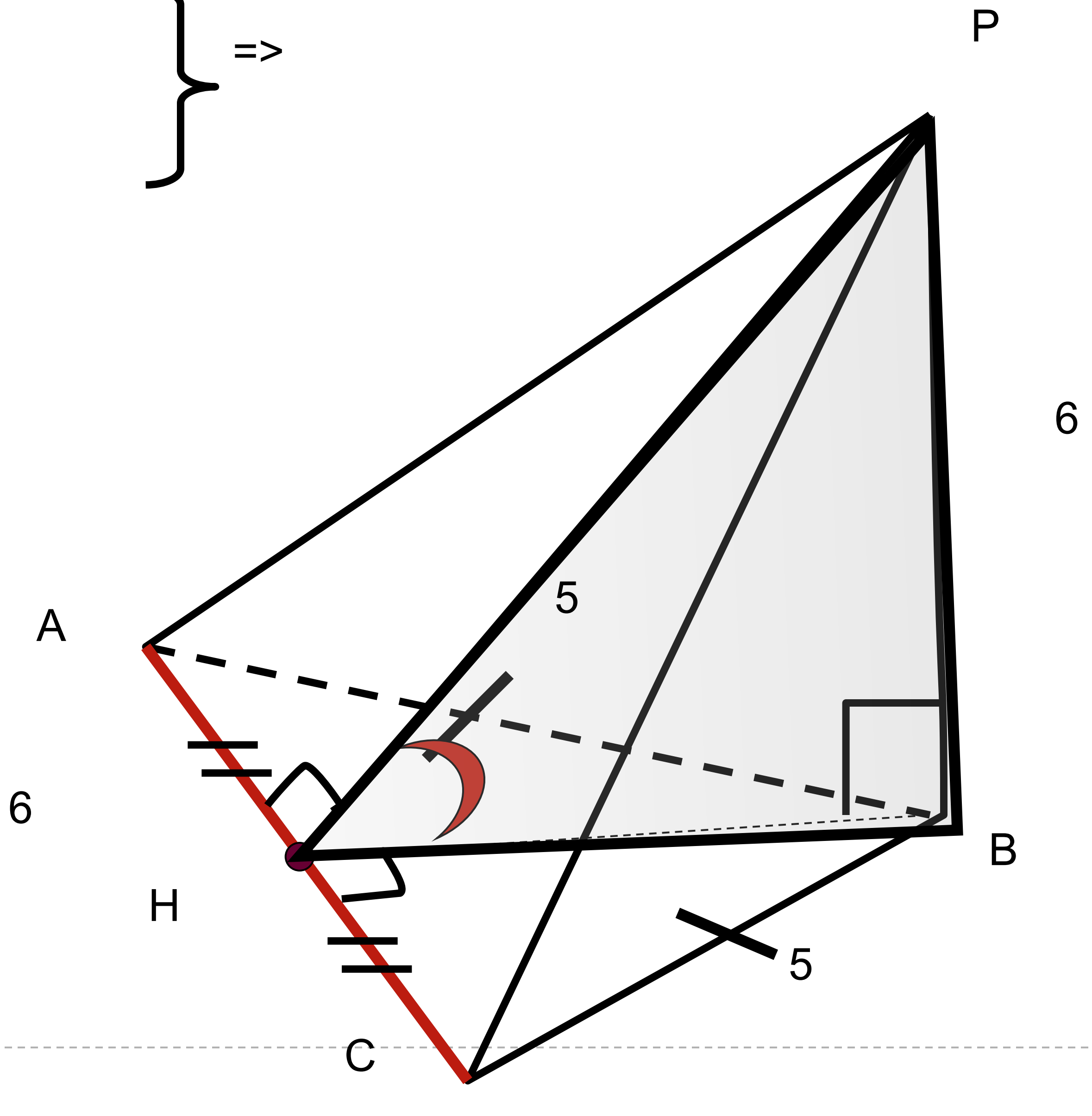
1)

AC ⊥ BH
PB ⊥ ABC

=>

PH ⊥ AC

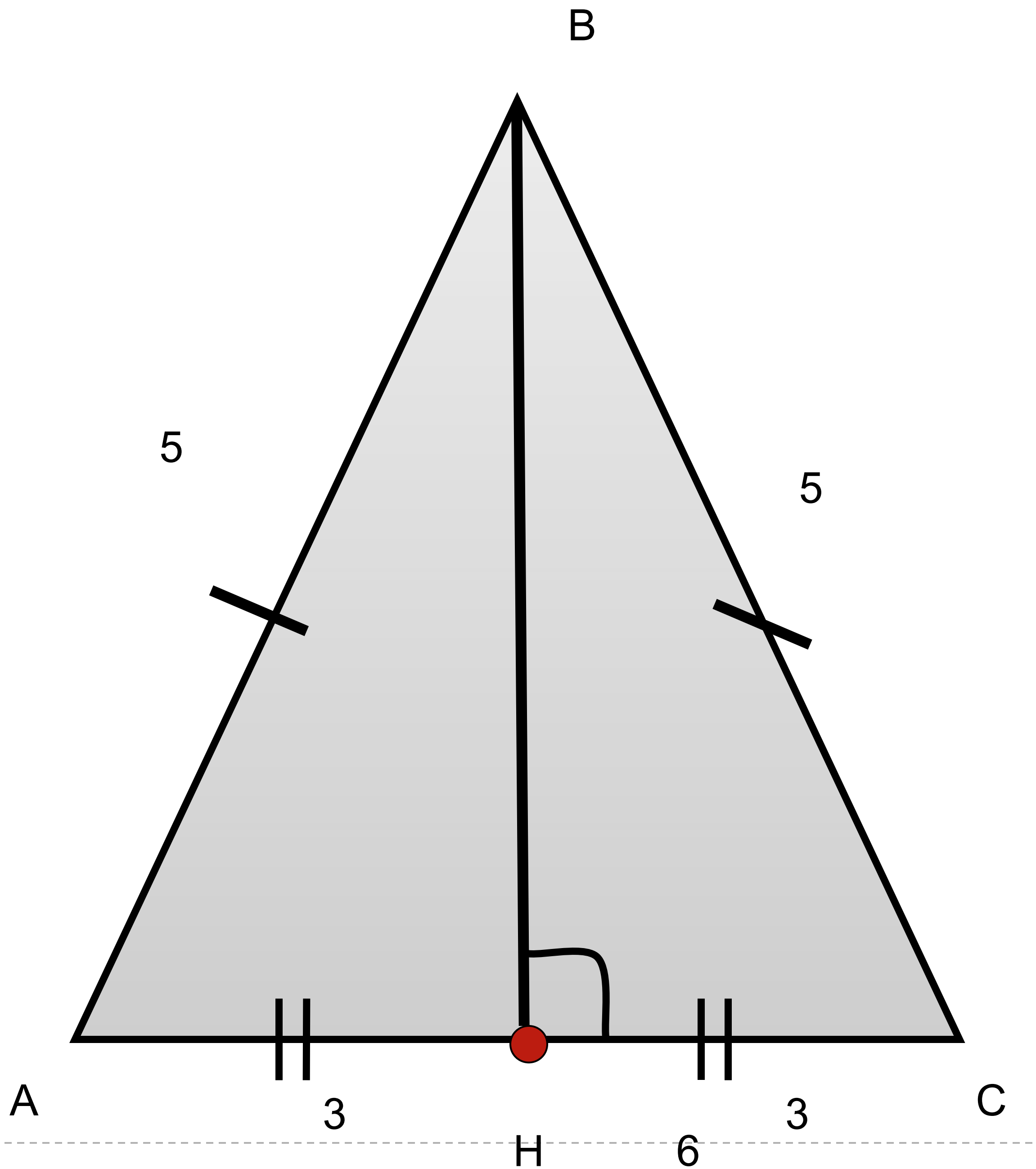
Значит:
∠BACP= ∠BHP



2)

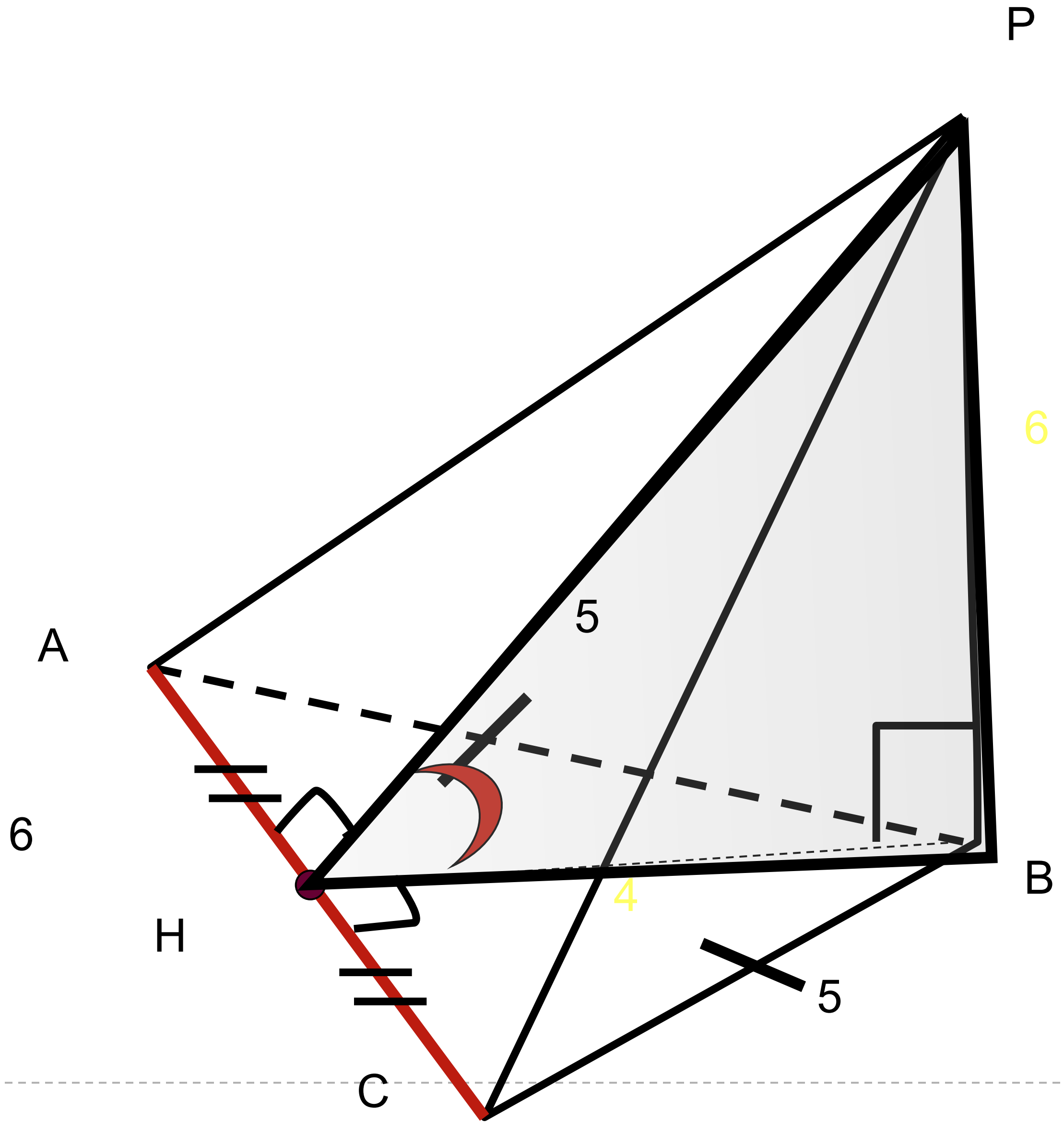
ΔABC -равнобедренный,
BH - высота,
значит: BH- медиана,
AH=HC=3,

ΔBHC - прямоугольный,
$BH^2=BC^2-HC^2$,
BH=4

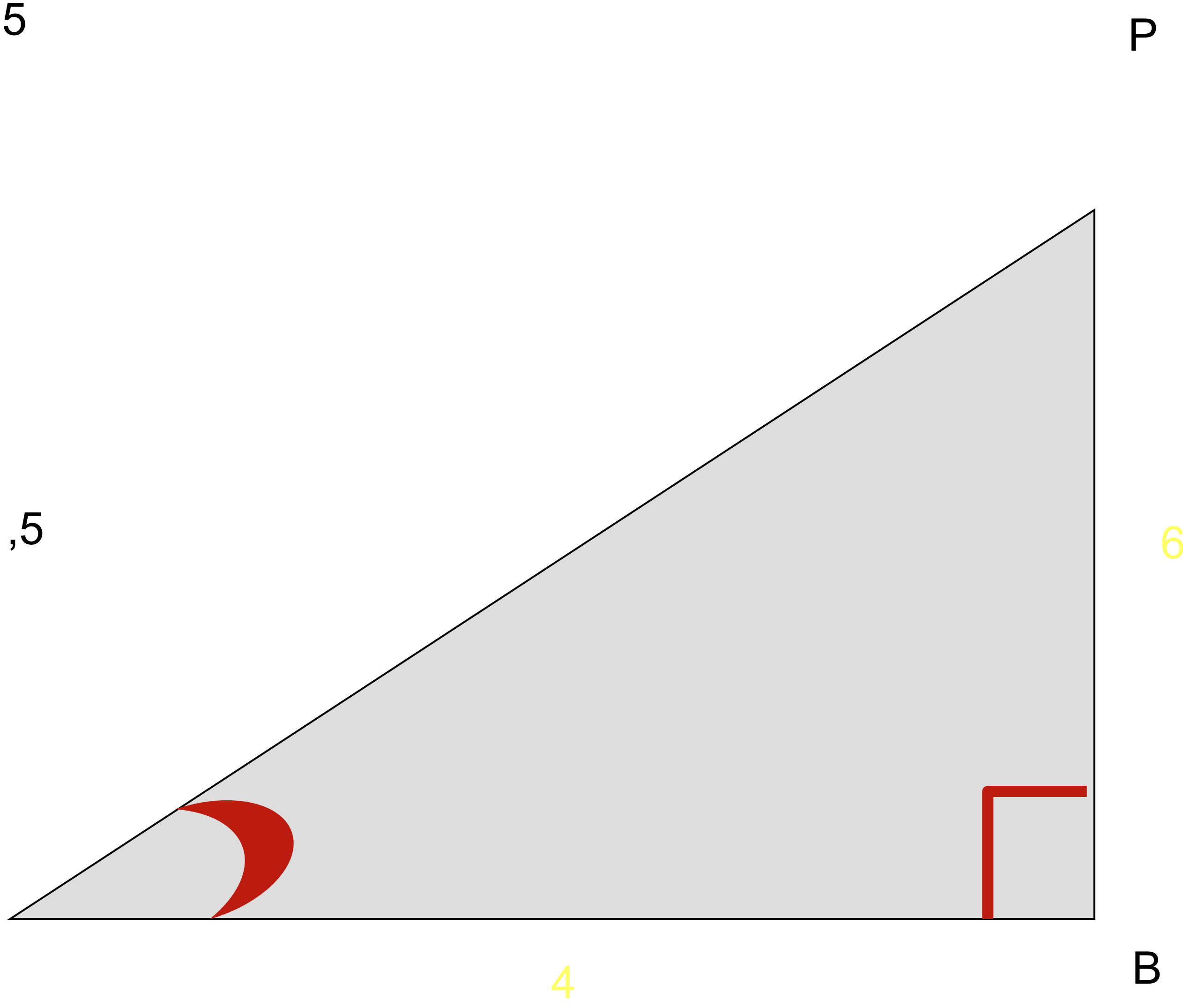


1)

Значит:
$\angle BACP = \angle BHP$



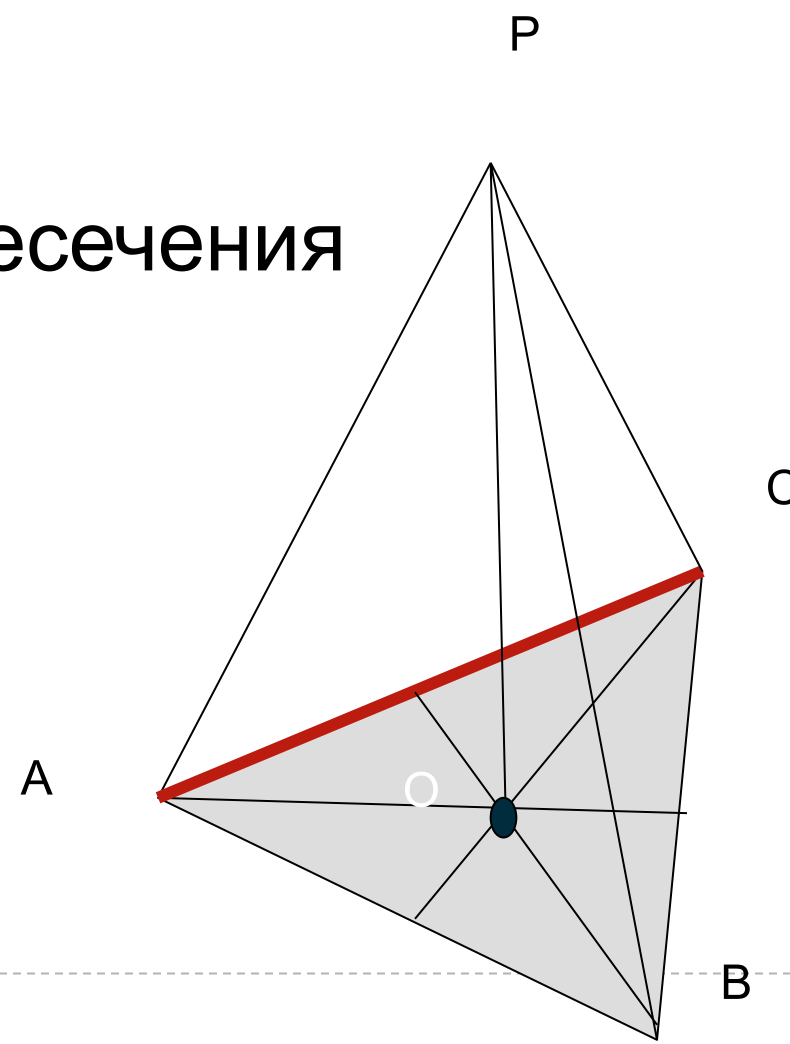
3) ΔPBH - прямоугольный,
tg $\angle$H = PB / BH,
tg $\angle$H = 6/4=1,5



Ответ:
$\angle$PACB = arctg 1,5

c) PABC — пирамида;
найти величину двугранного угла с ребром AC, если:

ΔABC — правильный треугольник;
AB = 6; O — точка пересечения медиан ABC;
(PO) $\perp$ (ABC);
PO = $\sqrt{3}$



$\angle$PACB-?

1)

ВК - медиана,

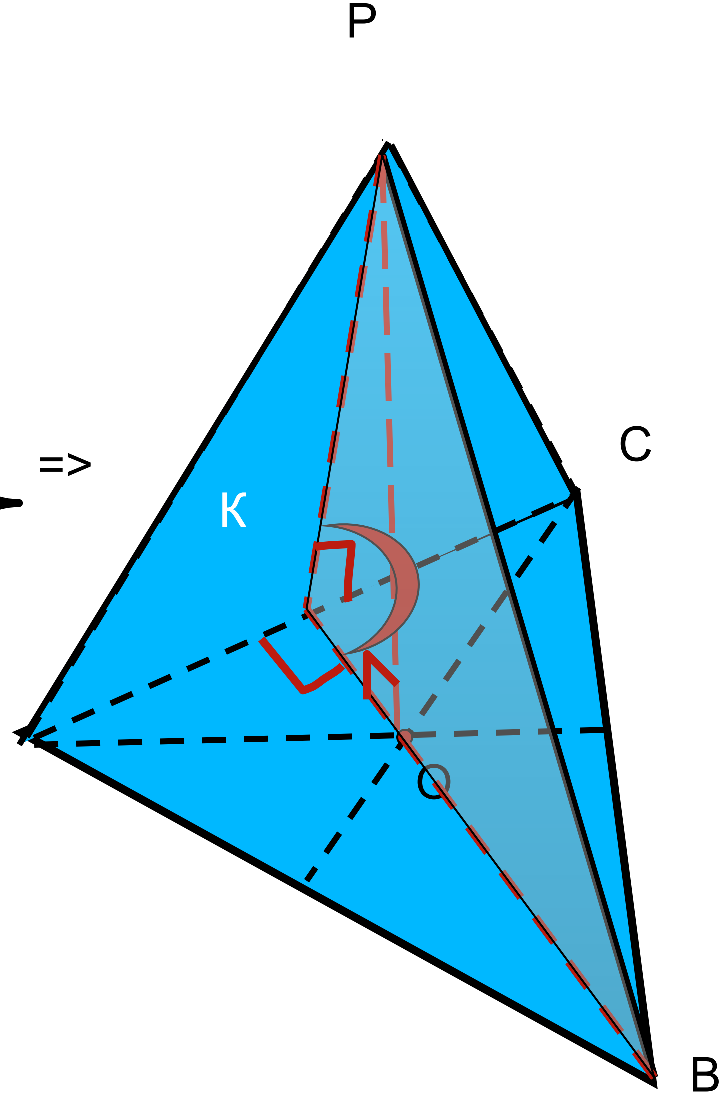
ΔABC -правильный

=> ВК - высота

BO $\perp$ AC
PO $\perp$ ABC

=>

PK $\perp$ AC

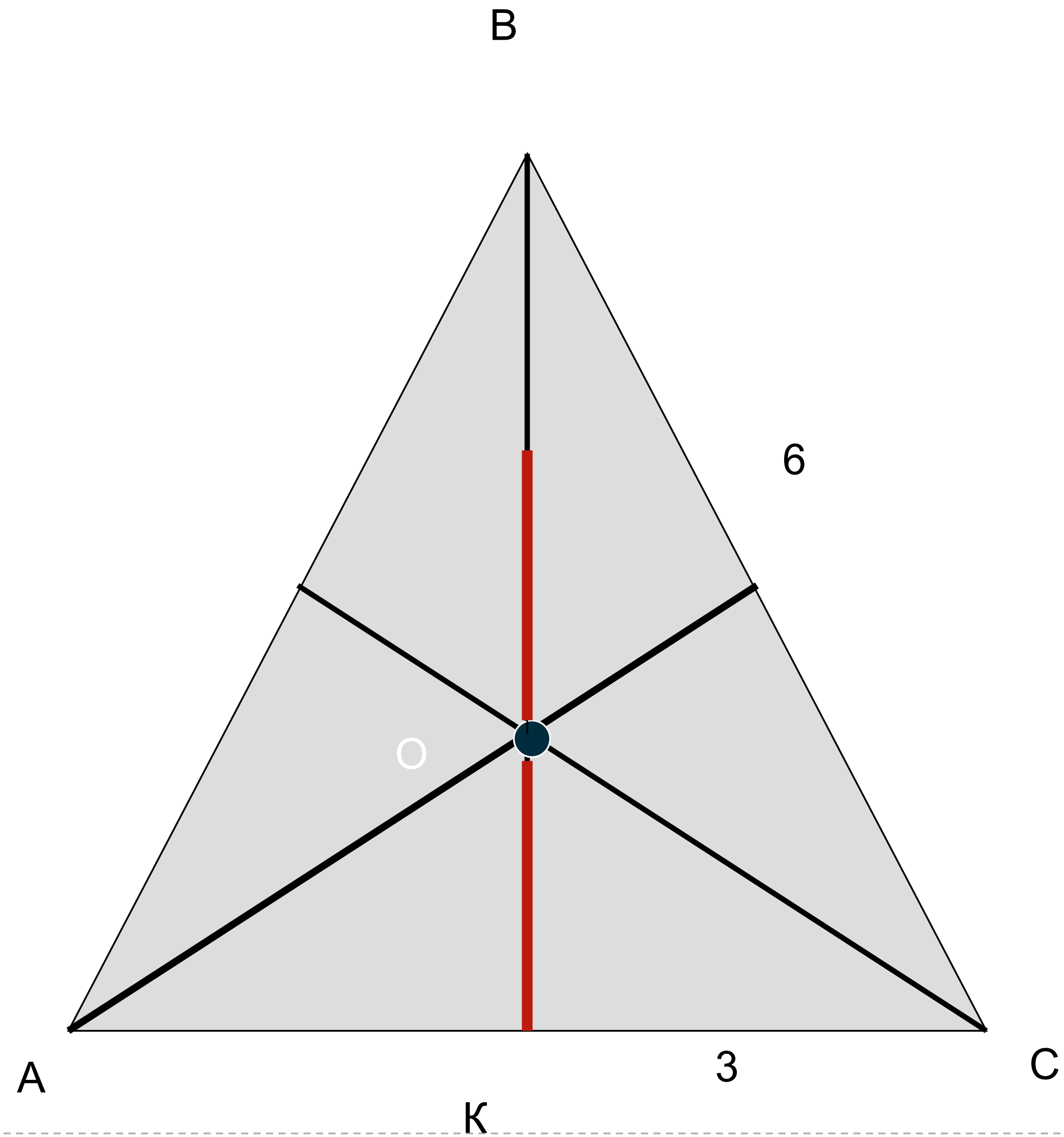


PO = $\sqrt{3}$
KO - ?

$\angle$PACB = $\angle$PKB

2) ΔABC - правильный,
O - точка пересечения медиан, значит:

$$OB=2OK.$$



Найдем BK.

ΔBKC:

$BK^2 = BC^2 - KC^2$;

$BK^2 = 27$;

$BK = 3\sqrt{3}$

$BK = 3OK$,

$OK = \sqrt{3}$

1)

ВК - медиана,

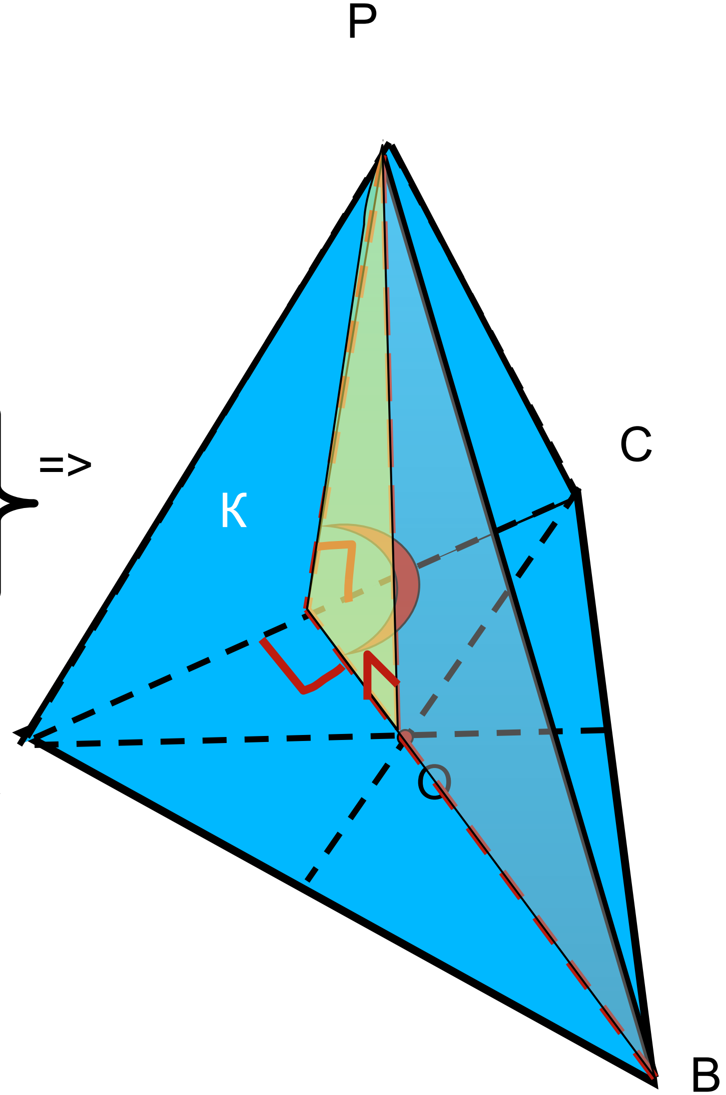
ΔABC -правильный

=> ВК - высота

BO $\perp$ AC
PO $\perp$ ABC

=>

PK $\perp$ AC

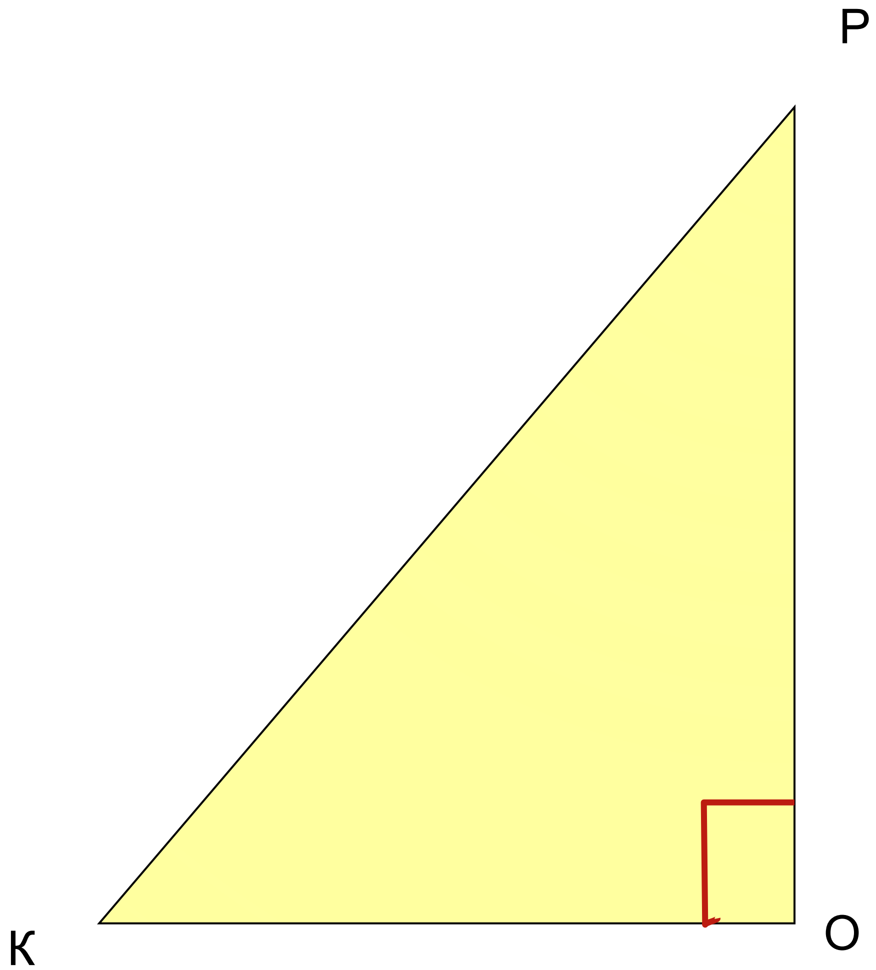


PO = $\sqrt{3}$
KO = $\sqrt{3}$

$\angle$PACB = $\angle$PKB

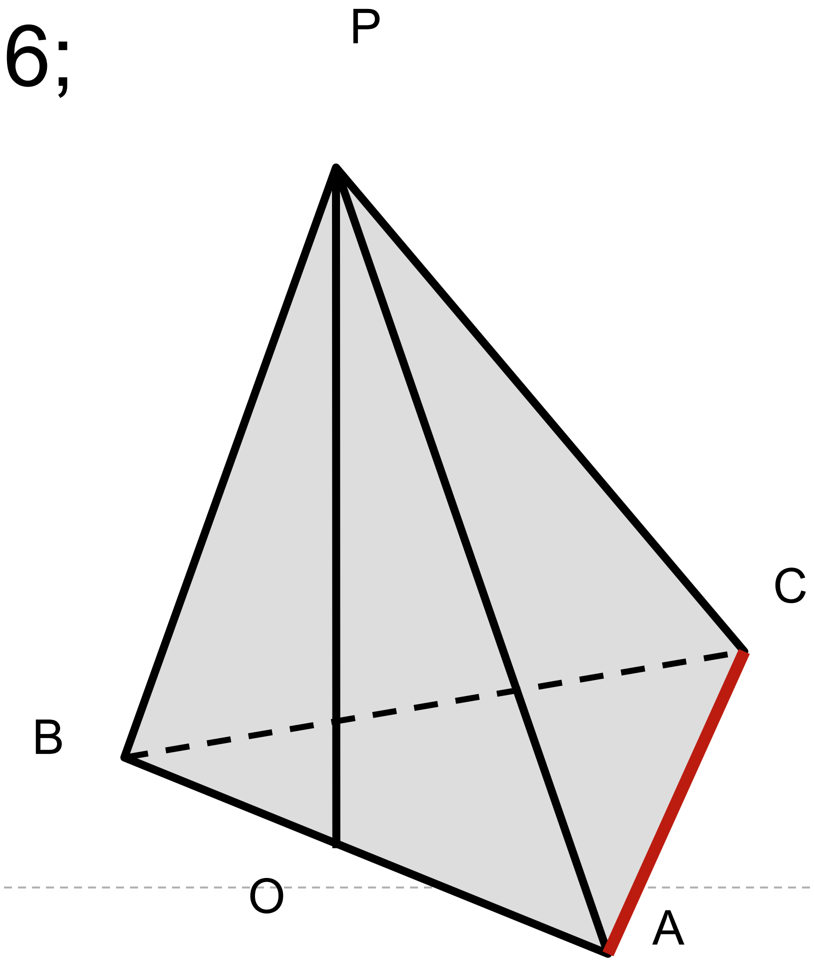
3) ΔPOK - прямоугольный,
$\angle O = 90°$, $PO = OK$,
значит $\angle P = \angle K = 45°$.

Ответ:
$\angle PACB = 45°$



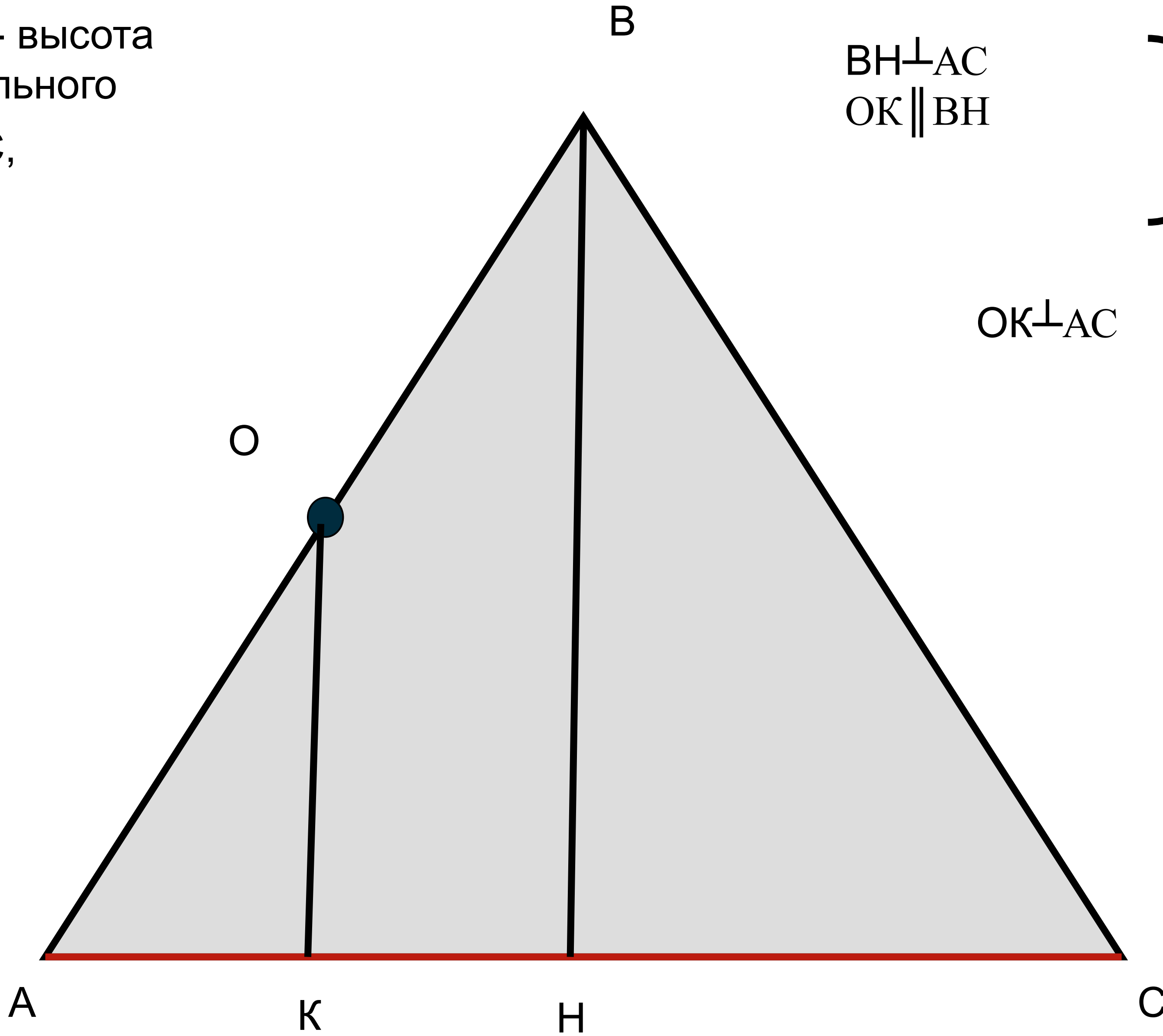
D) PABC — пирамида;
найти величину двугранного угла с ребром AC, если:

ABC — правильный треугольник;
O — середина AB; AB = 6;
$(PO) \perp (ABC)$;
PO = 4 ;



$\angle$PACB-?

1) BH - высота правильного ΔABC,



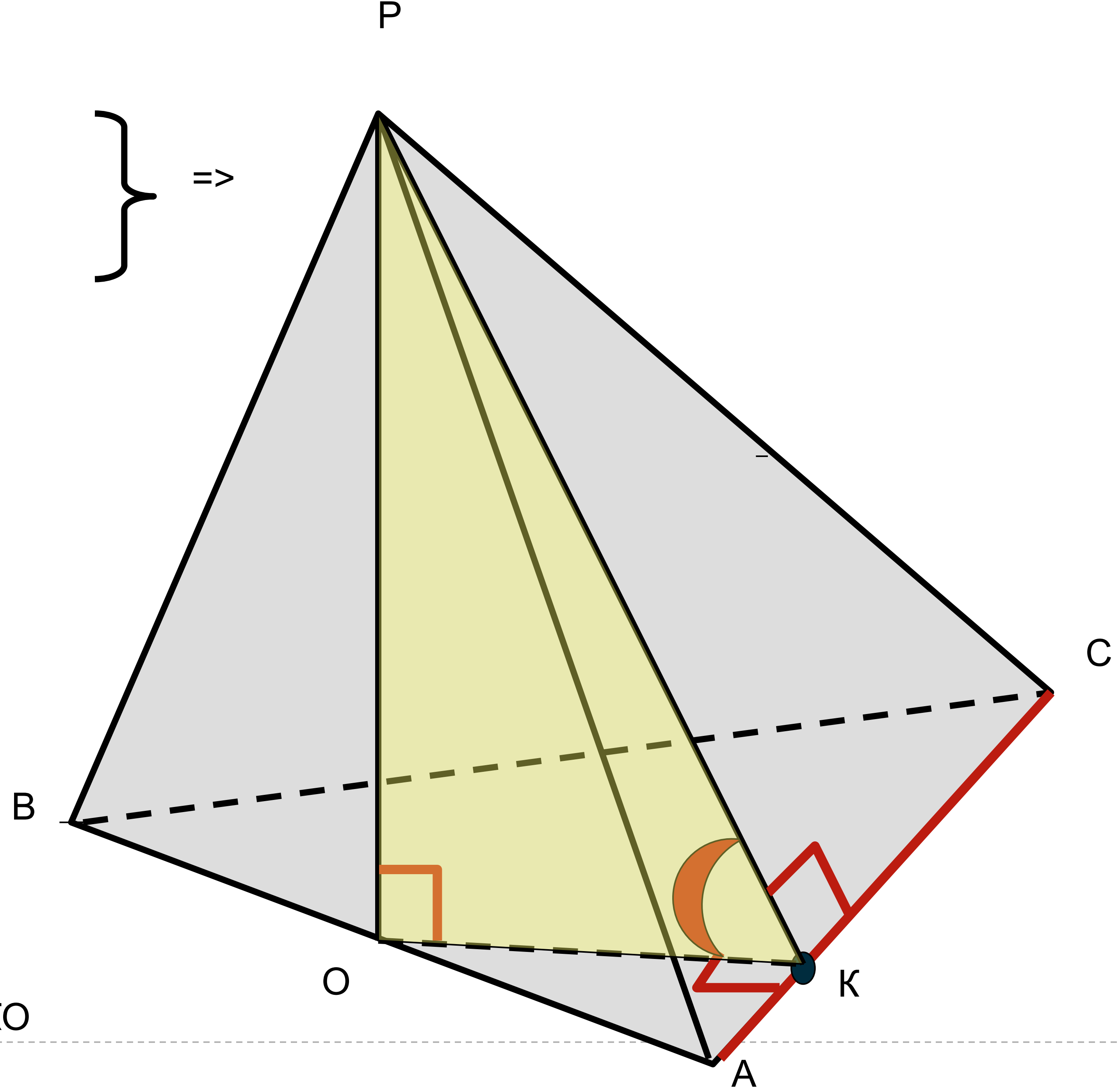
$\left.\begin{array}{l} BH \perp AC \\ OK \parallel BH \end{array}\right\} \Rightarrow$

$OK \perp AC$

2)

$OK \perp AC$
$PO \perp ABC$ $\Rightarrow$

$PK \perp AC$



$\angle PACB = \angle PKO$

3) BH - высота правильного ΔABC,

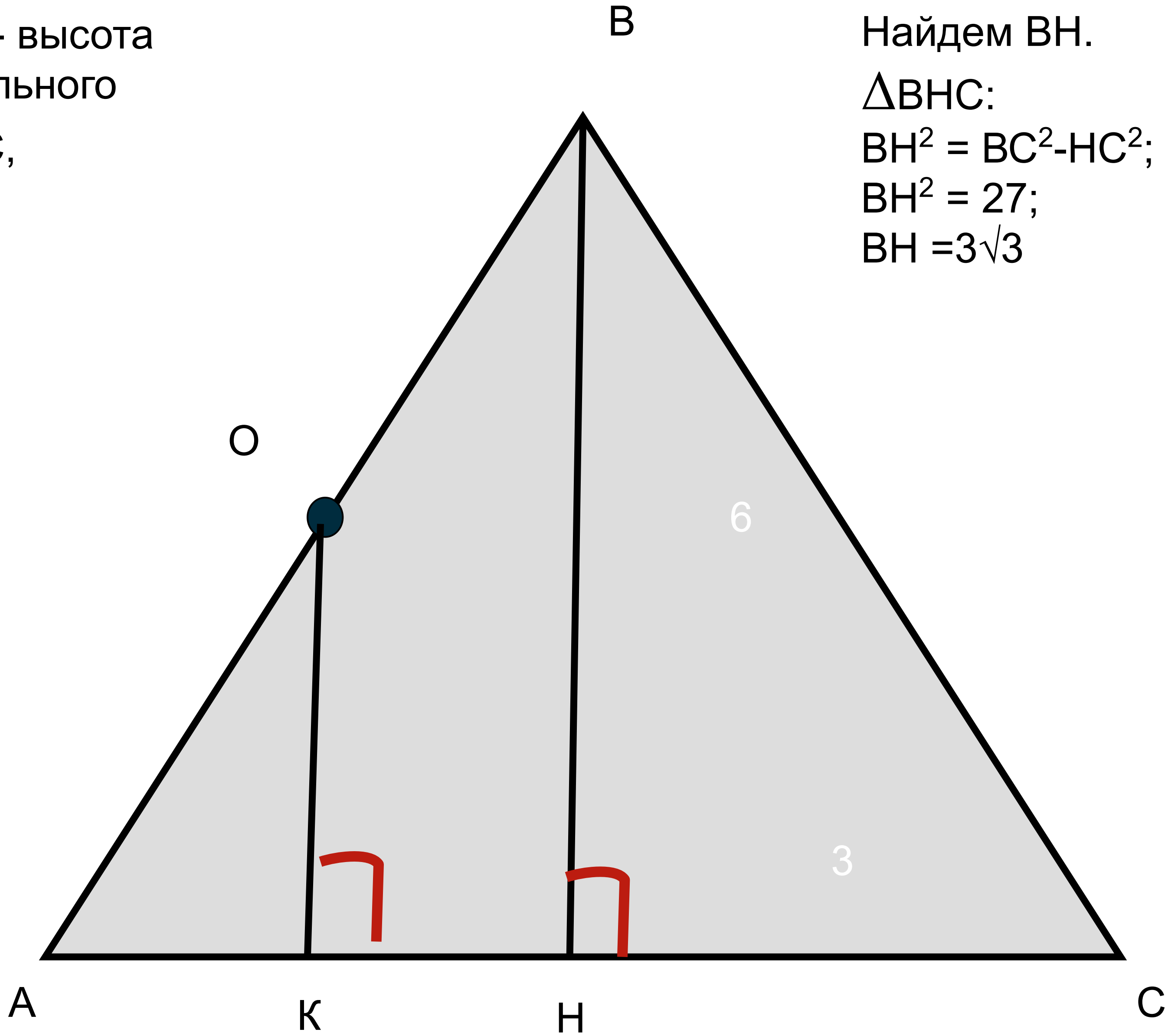
Найдем BH.

ΔBHC:

$BH^2 = BC^2 - HC^2$;

$BH^2 = 27$;

$BH = 3\sqrt{3}$

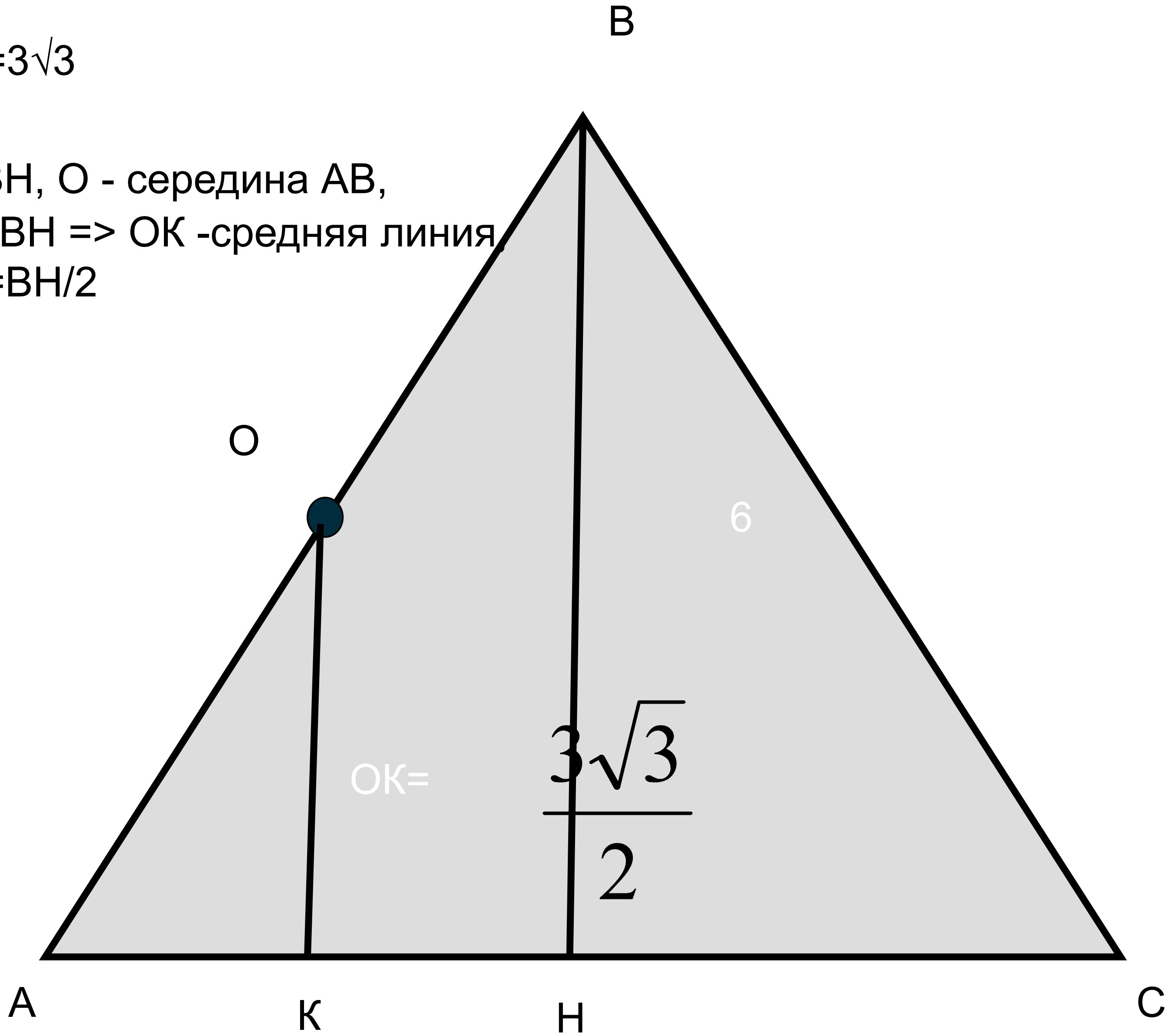


BH $=3\sqrt{3}$

ΔABH, O - середина AB,

OK $\parallel$ BH => OK -средняя линия,

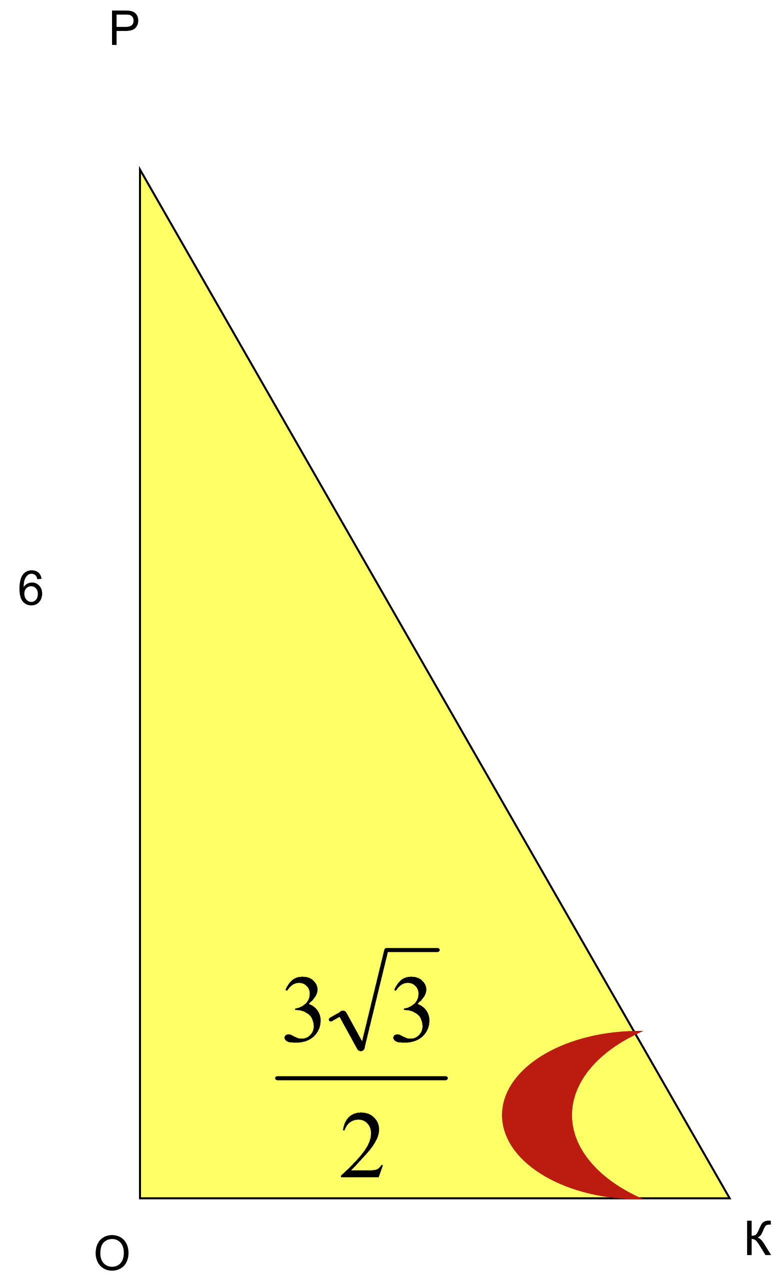
OK=BH/2



4) ΔPOK; $\angle C = 90°$,

tg $\angle K = PO/OK$,

tg $\angle K = 4/\sqrt{3}$



Ответ:

$\angle PACB = \text{arctg } 4/\sqrt{3}$

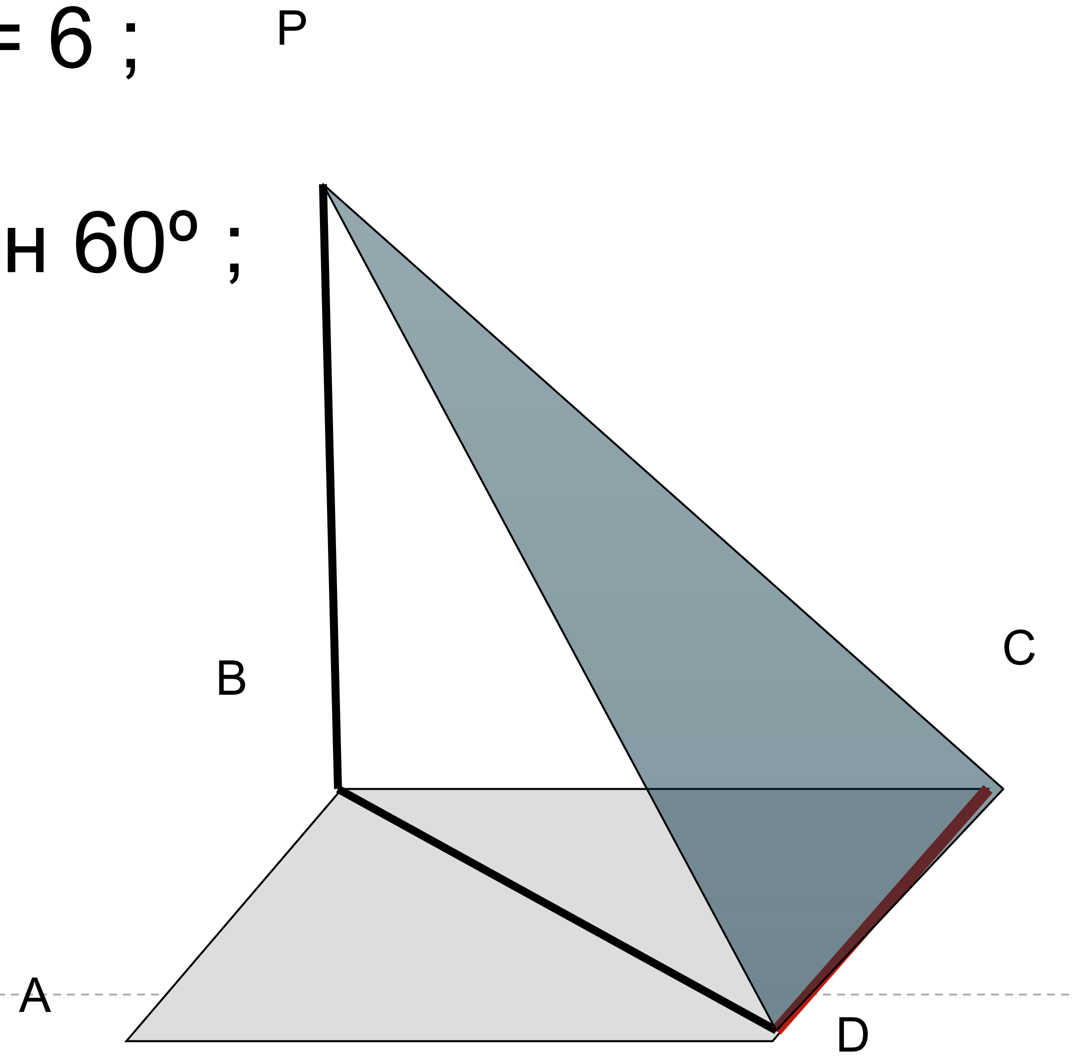
е) ABCD — прямоугольник;

$BD = 4\sqrt{3}$;

$(PB) \perp (ABC)$; $PB = 6$;

Двугранный угол с ребром DC равен 60º ;

Найти стороны прямоугольника.



1) $\angle PDCB = 60°$

$BD = 4\sqrt{3}$;

$PB = 6$;

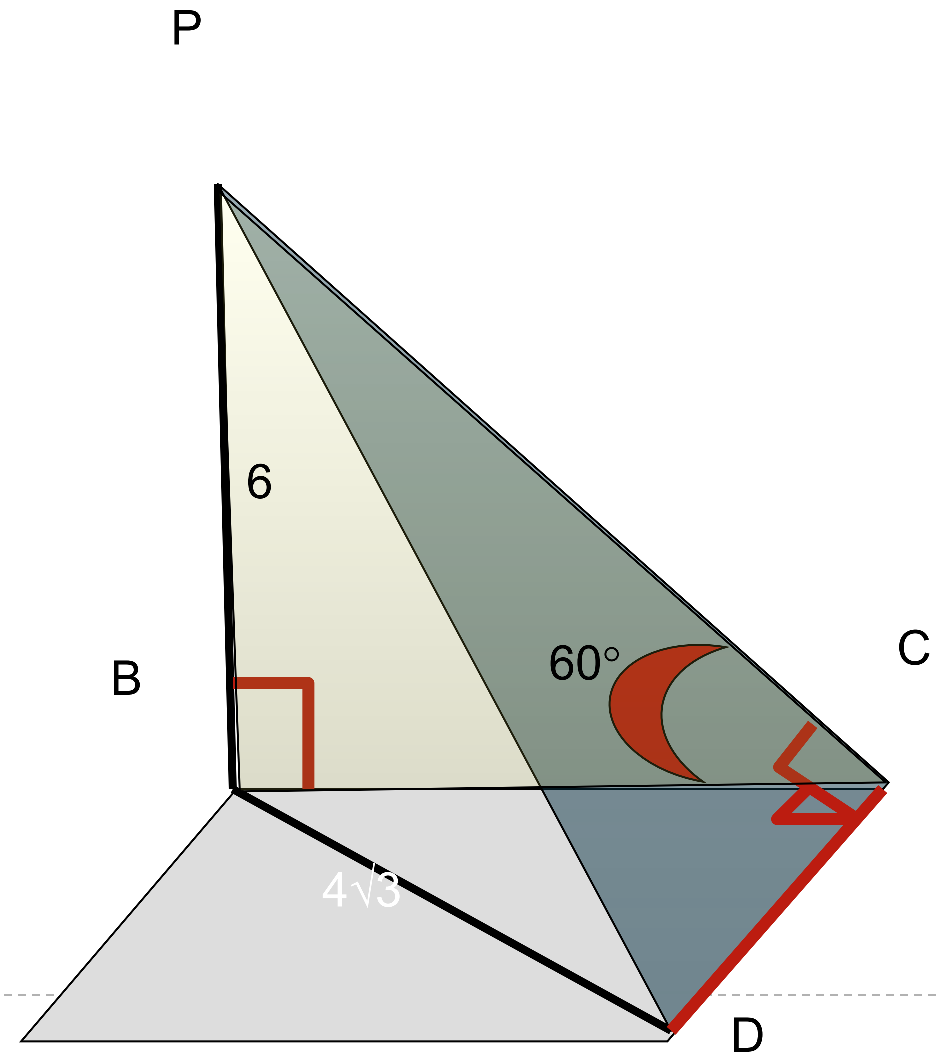
$\angle PCB = 60°$

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp CD \\ PB \perp ABC \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$PC \perp CD$

Значит:

$\angle PDCB = \angle PCB = 60°$

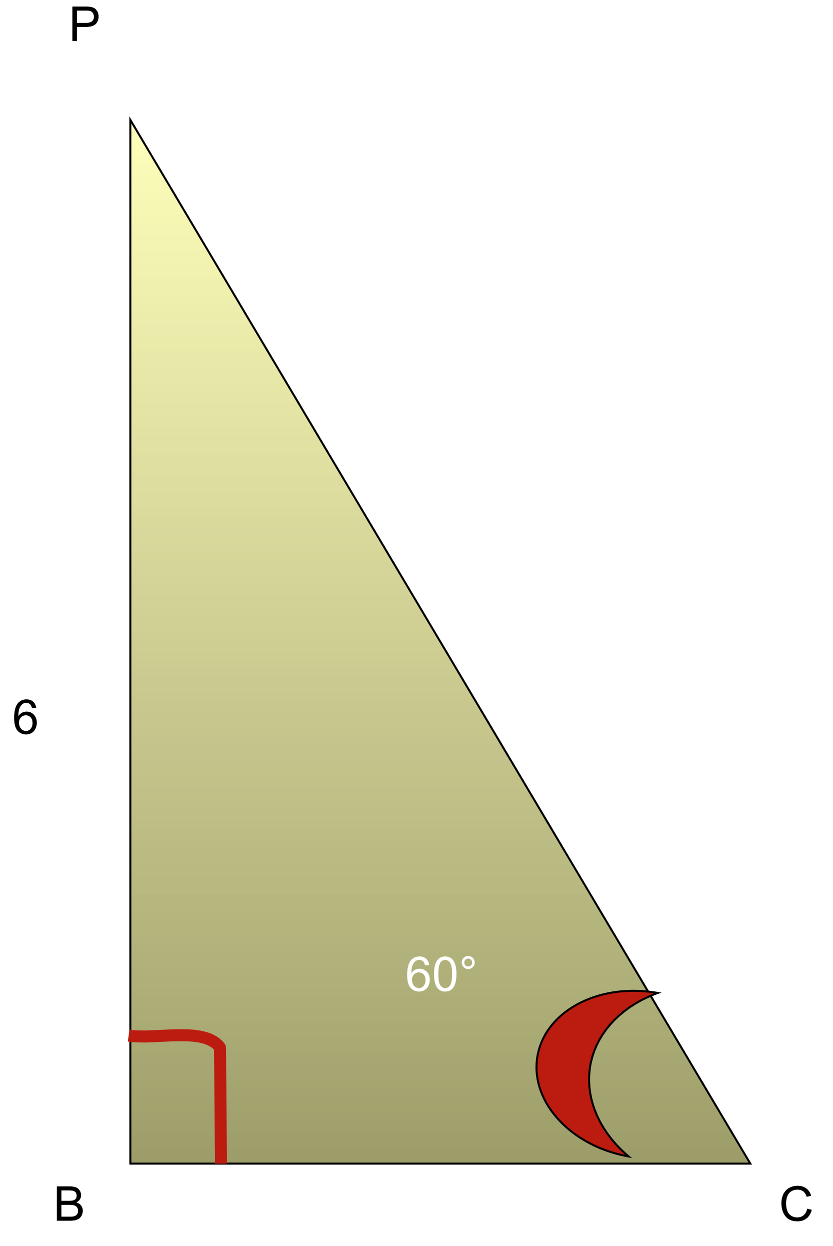


2) ΔPBC, $\angle B = 90°$,

tg $\angle C = PB/BC$,

$\sqrt{3} = 6/BC$,

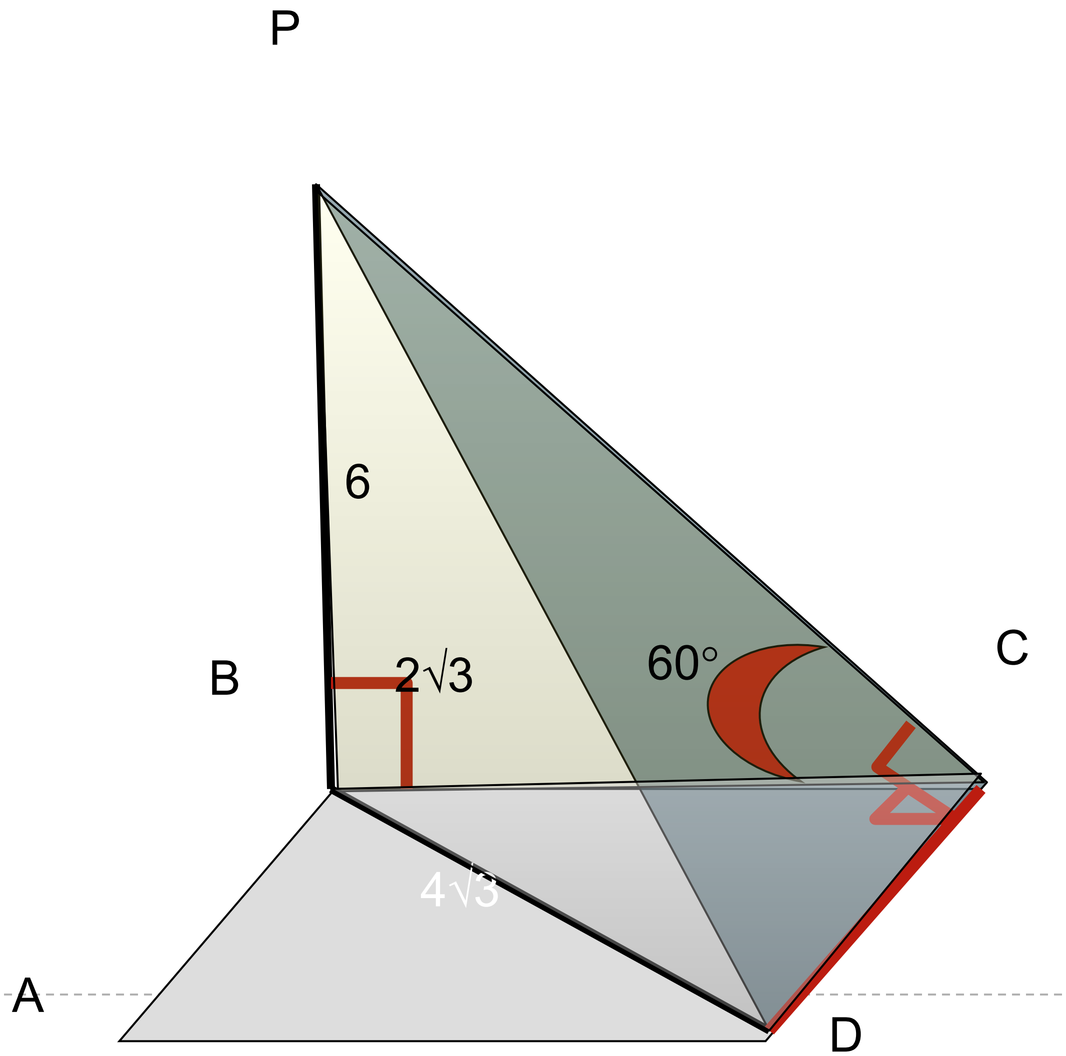
$BC = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$



$BD = 4\sqrt{3}$;

$PB = 6$;

$\angle PCB = 60°$

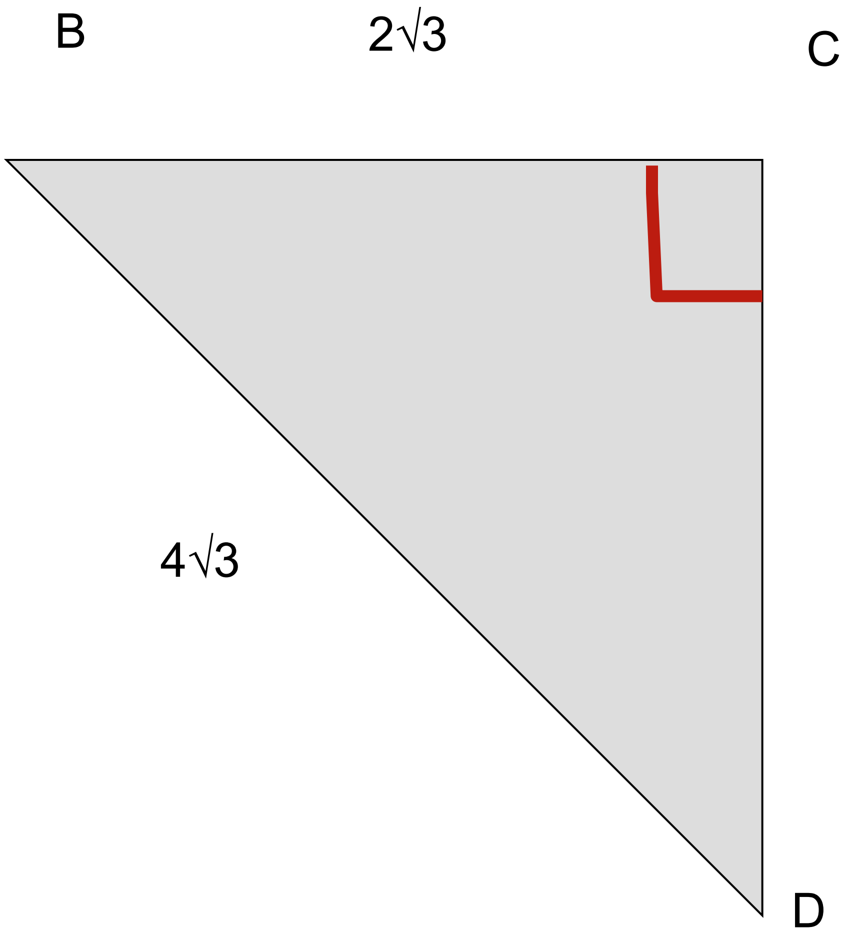


3) ΔBCD; $\angle C = 90°$,

$CD^2 = BD^2 - CD^2$;

$CD^2 = 16 \cdot 3 - 4 \cdot 3$;

$CD^2 = 36$; $CD = 6$

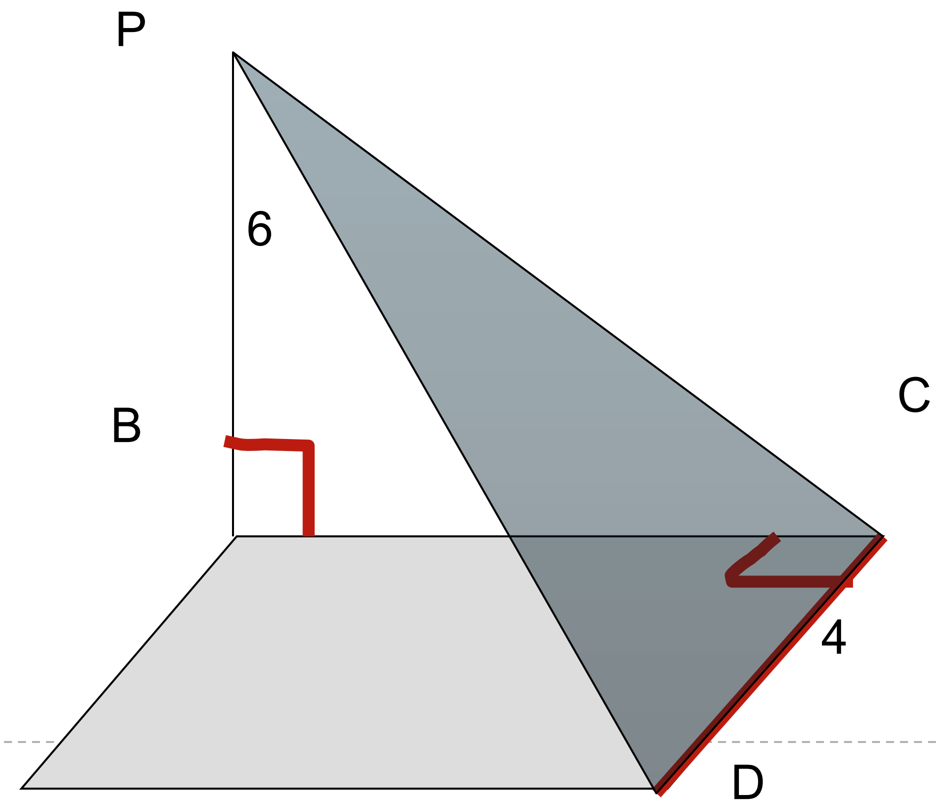


Ответ: $AB = CD = 6$;

$BC = AD = 2\sqrt{3}$.

f) ABCD — прямоугольник;
площадь ABCD равна 48 ;
(PB) $\perp$ (ABC); PB = 6 ;
DC = 4 ;
Найти величину двугранного угла с ребром DC.

$\angle$PDCB - ?



1)

$BC \perp CD$

$PB \perp ABC$ $\Bigg\}$ =>

$PC \perp CD$

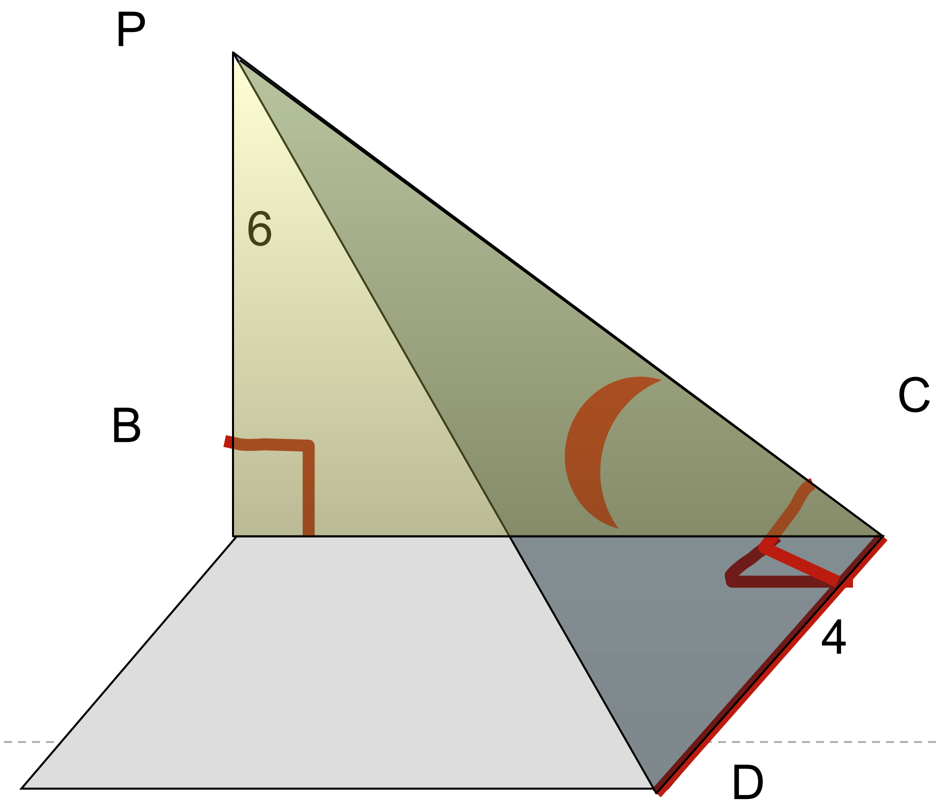
S(ABCD)=48,

PB = 6,

CD = 4.

Значит:

$\angle PDCB = \angle PCB$



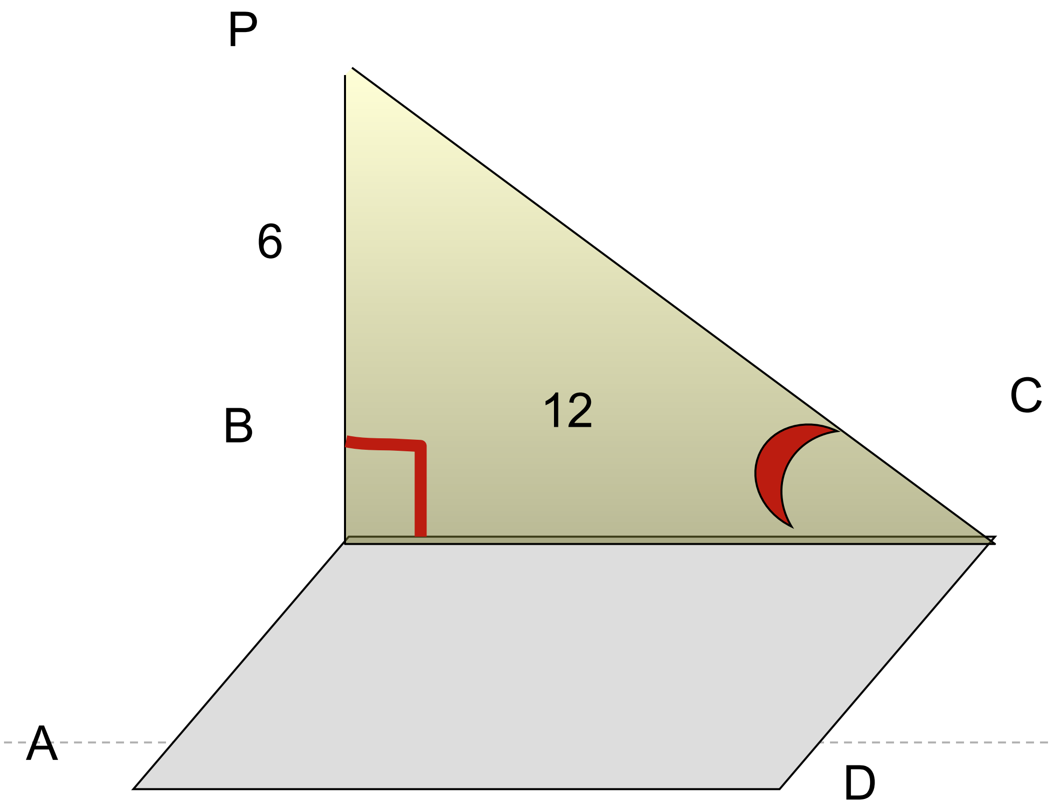
2) ABCD - прямоугольник

$S(ABCD) = AB \cdot BC = 48$,
$AB = CD = 4$,
$4 \cdot BC = 48$, $BC = 12$.

3) ΔPBC; $\angle B = 90°$,

tg $\angle C = PB/BC$,

tg $\angle C = 0{,}5$



Ответ:

$\angle PDCB = \text{arctg } 0{,}5$

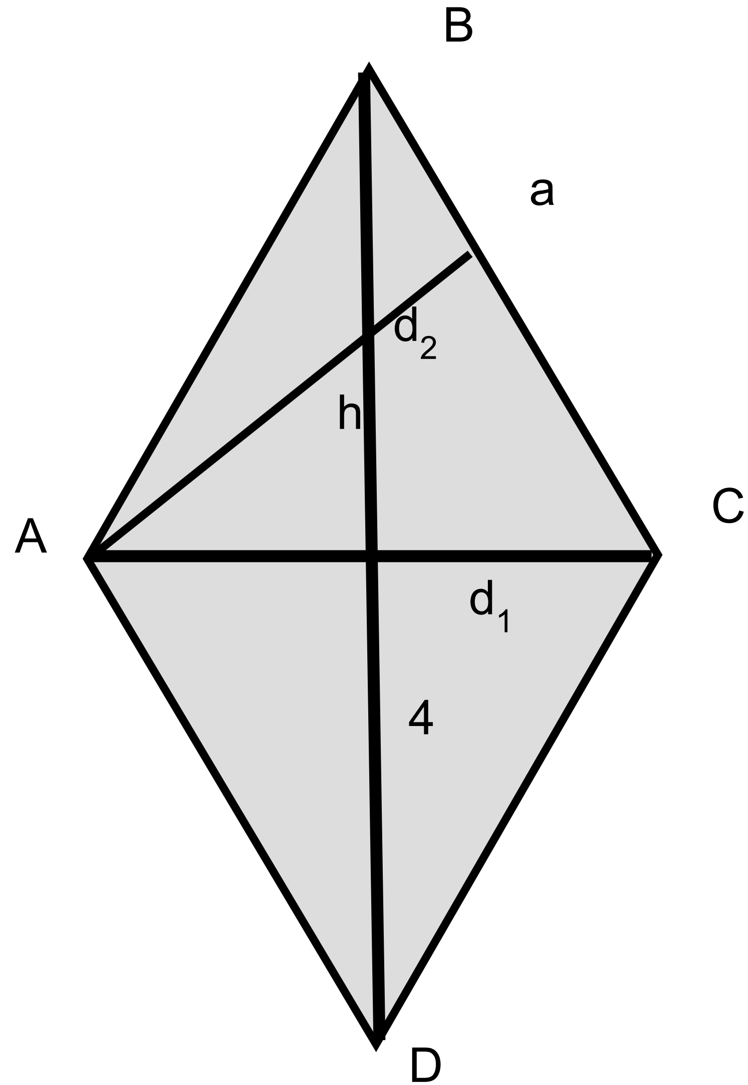
g) ABCD — ромб;

BD = 4 ;

(PC) ⊥ (ABC); PC = 8 ;

Двугранный угол с ребром BD равен 45º ;

Найти площадь ромба



$S_{ромба} = a \cdot h$,

$S_{ромба} = d_1 \cdot d_2 : 2$

2)

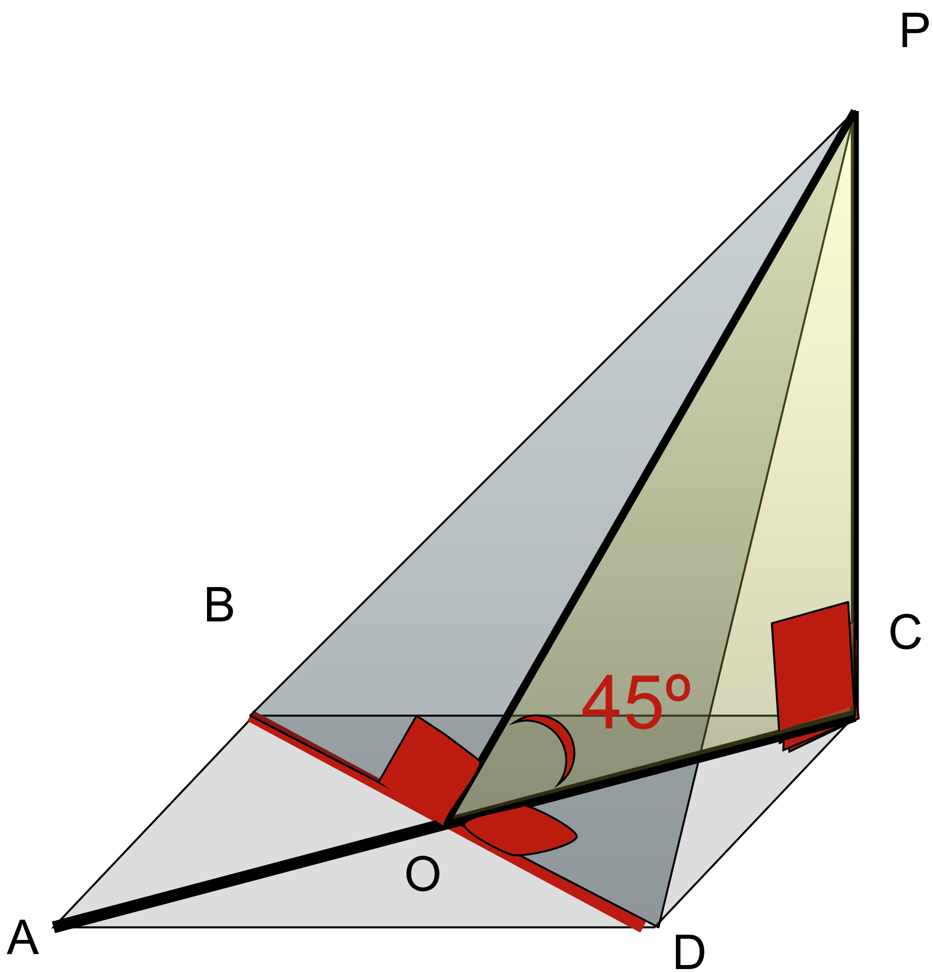
(PC) ⊥ (ABC); PC = 8 ;
Двугранный угол с ребром BD равен 45º ;

AO ⊥ BD
PC ⊥ ABC

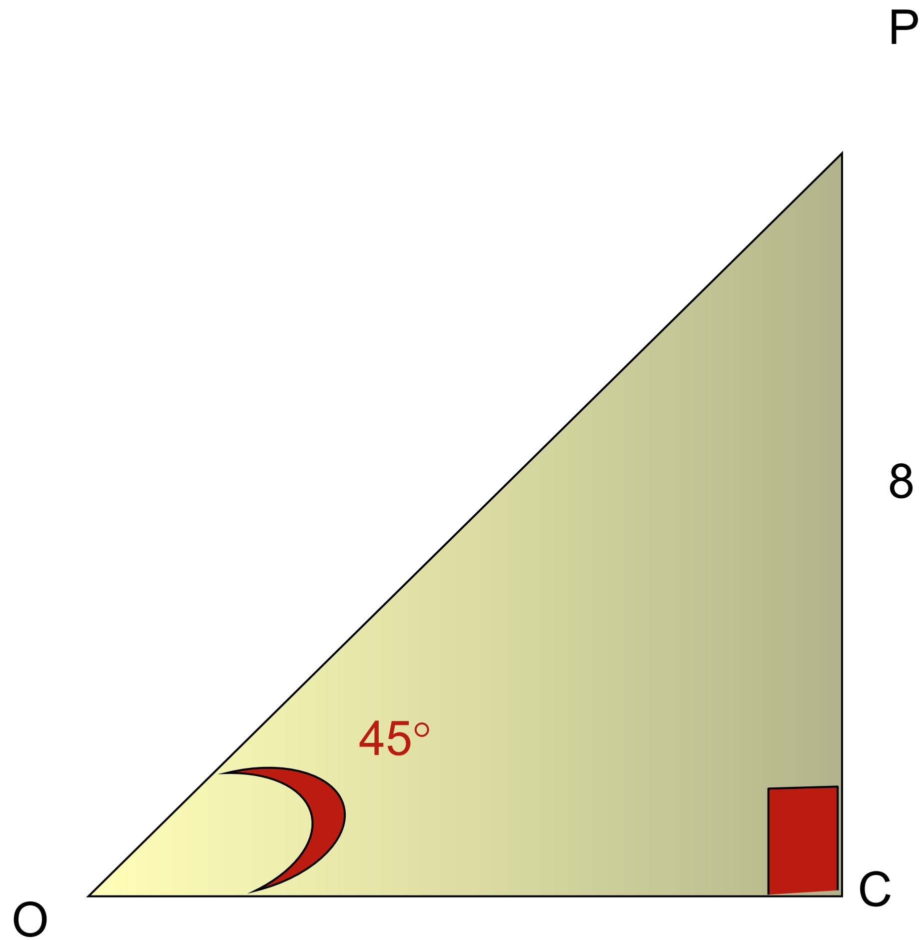
=>

PO ⊥ CD

Значит:
∠PBDC = ∠POC = 45º



3) ΔPCO; $\angle C = 90°$,
$\angle O = 45°$ => $\angle P = 45°$,
$OC = PC = 8$.

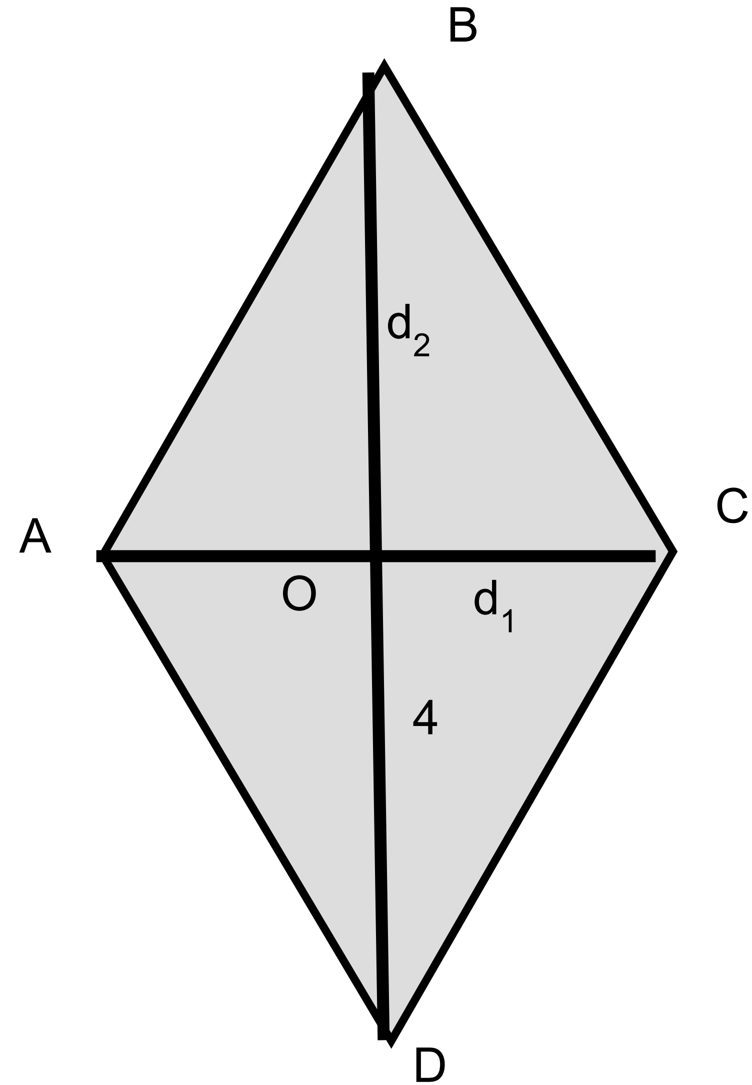


4) $d_1 = 2OC = 16$,

$d_2 = 4$,

$S_{ромба} = d_1 \cdot d_2 : 2$

$S = 32$



Ответ: 32

$S_{ромба} = d_1 \cdot d_2 : 2$

к) ABCD- параллелограмм;

$\angle ADC = 120^o$; $AD = 8$;

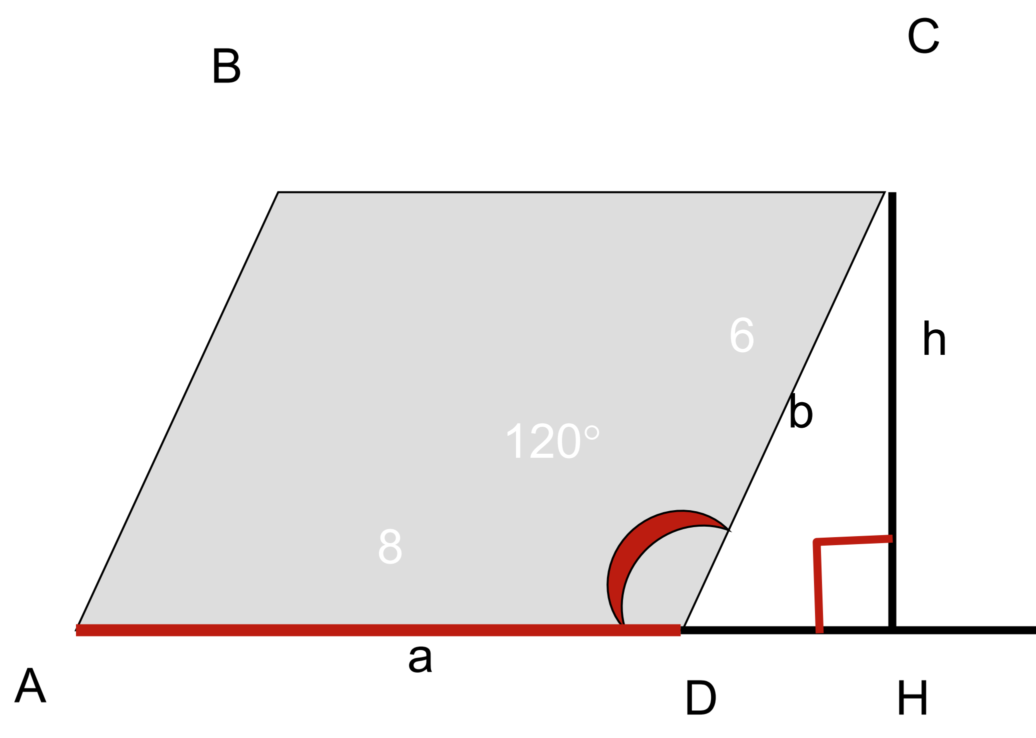
$DC = 6$; $(PC) \perp (ABC)$;

$PC = 9$;

Найти величину двугранного угла с ребром AD и площадь ABCD .

$S_{парал\text{-}ма} = a \cdot b \cdot \sin\angle(a,b)$

$S_{парал\text{-}ма} = a \cdot h$



1) $S_{\text{парал-ма}} = a \cdot b \cdot \sin\angle(a,b)$

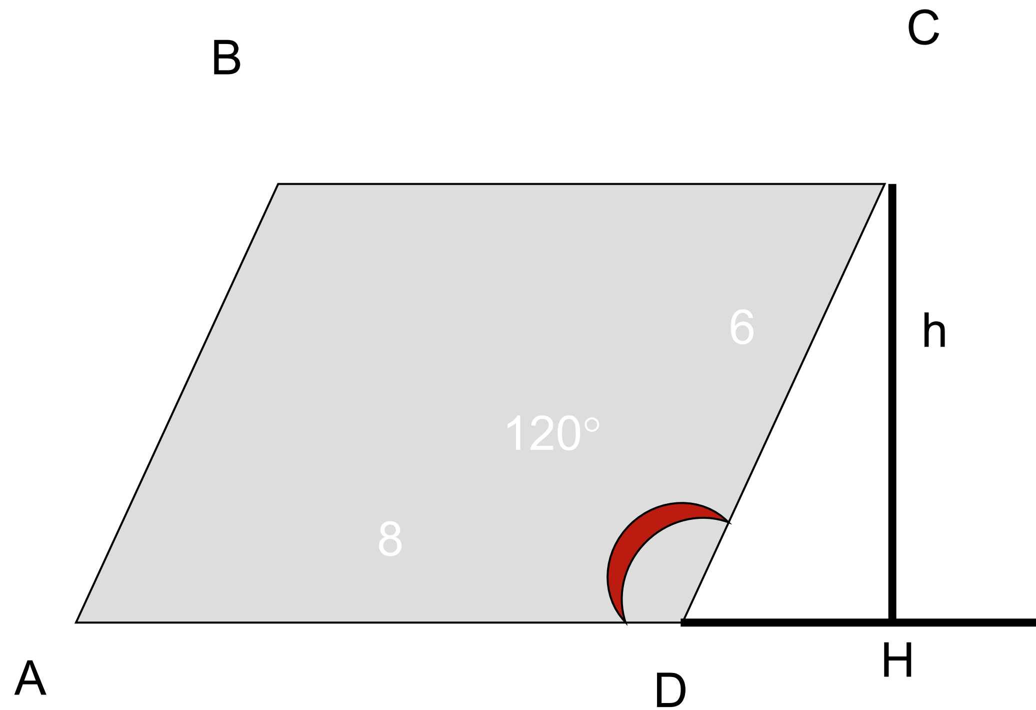
$S(ABCD) = 8 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 24\sqrt{3}.$

$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot h$

$h = S_{\text{парал-ма}} / a$

$h = 24\sqrt{3} / 8$

$h = 3\sqrt{3}$



2)

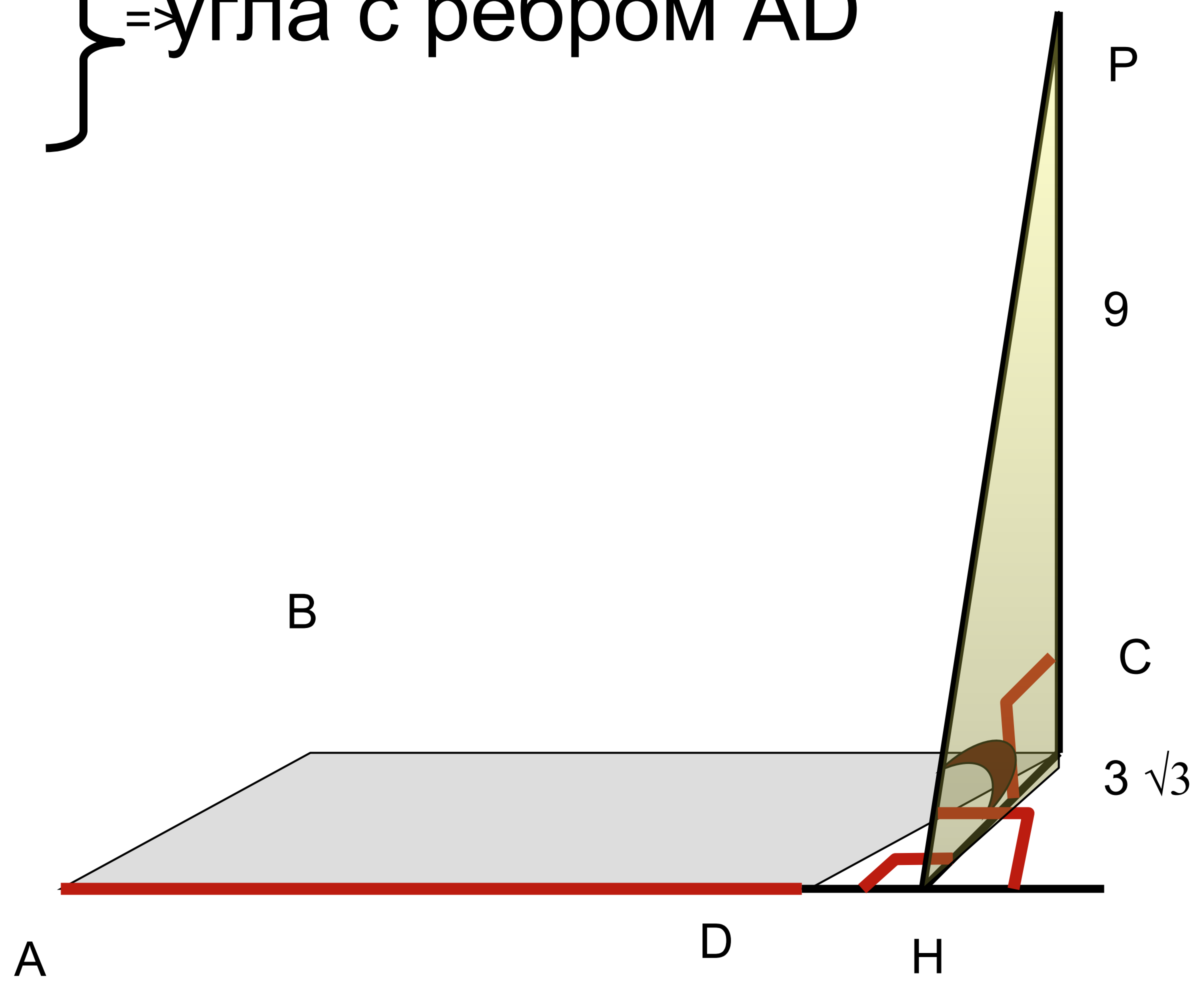
(PC) ⊥ (ABC); PC = 9 ;
Найти величину двугранного угла с ребром AD

CH ⊥ AD
PC ⊥ ABC

=>

PH ⊥ CD

Значит:
∠PADC = ∠PHC

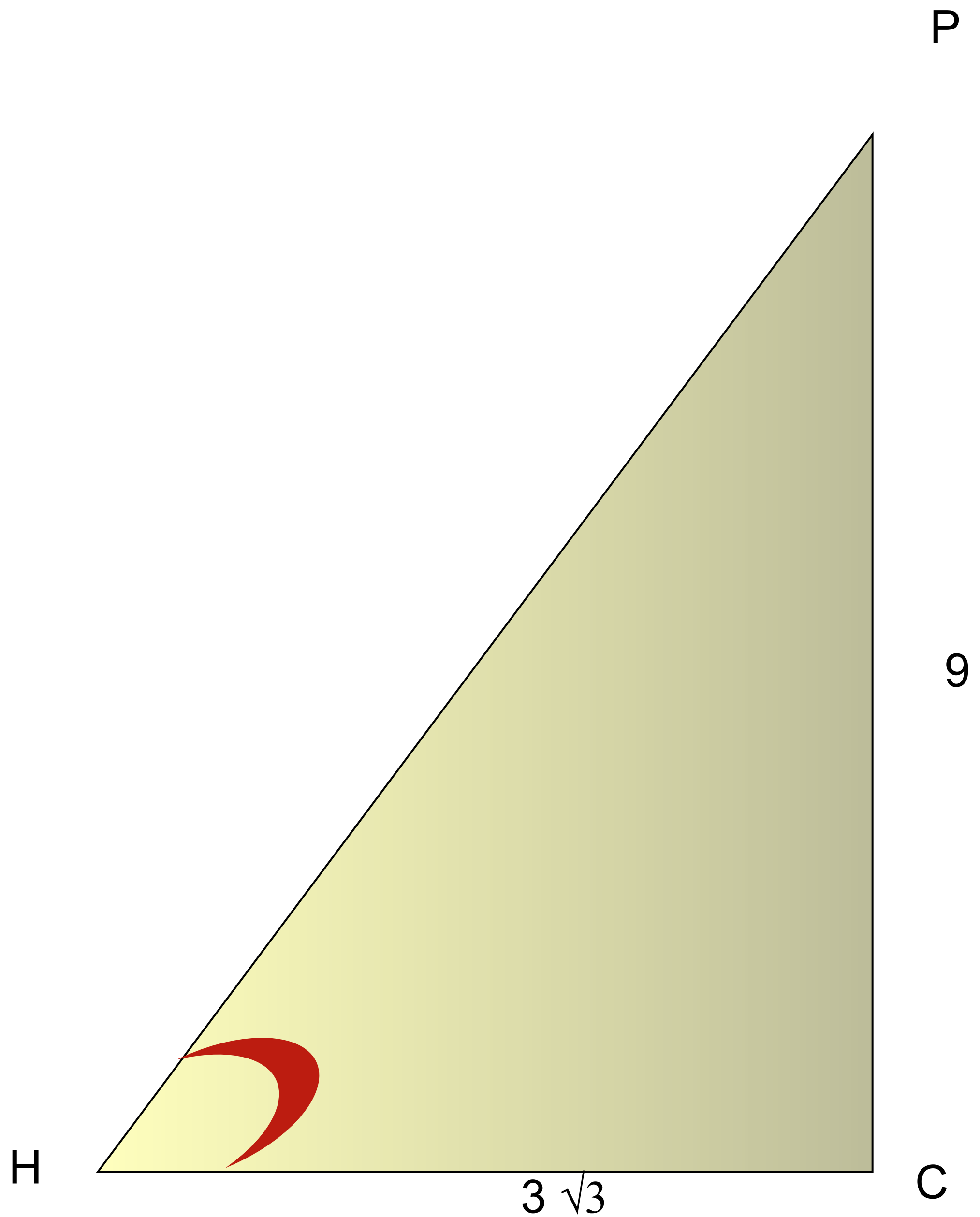


3) ΔPCH; $\angle C = 90^\circ$,

tg $\angle H = PC/HC$,

tg $\angle H = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\angle H = 60^\circ$



Ответ:

$\angle PADC = 60^\circ$,

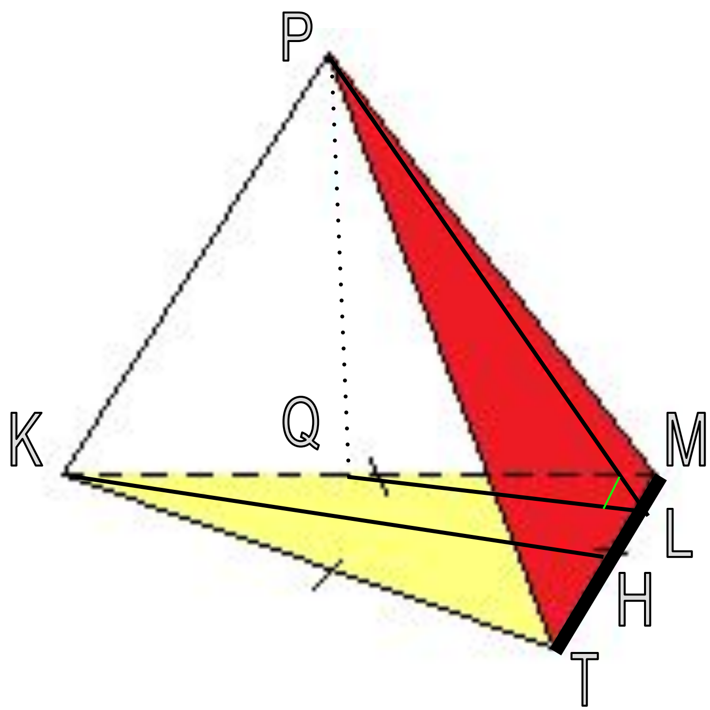
$S(ABCD)=24\sqrt{3}$.

Тема №5 "Перпендикулярность плоскостей. Двугранный угол"

Задача №2 (а)

Дано: КМРТ-тетраэдр;∆ТМК правильный;Q-середина КМ,Q-проекция Р на ТМК

Указать: линейный угол для двугранного угла РТМК



- <u>Ребро</u> - ТМ, <u>грани:</u> РТМ, ТМК;
- <u>В грани</u> КТМ: КН⊥ТМ, где Н-середина ТМ (по свойству р\б ∆)
- <u>В грани</u> РТМ:

в грани КМН: QL ∥ KH (по построению)

KH ⊥TM (по доказанному)

=> QL⊥TM (по лемме о связи ⊥ и ∥);

в грани РМТ: PL⊥TM (по т. о 3^х ⊥)

- ∠(PL;QL)=∠PLQ

является линейным для данного двугранного

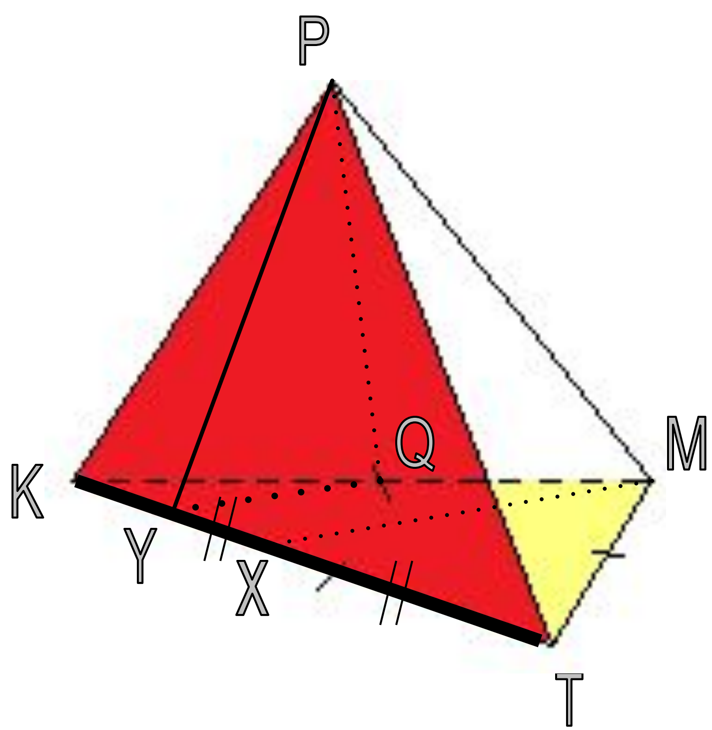
Ответ: ∠PLQ – линейный для двугранного РТМК

Тема №5 "Перпендикулярность плоскостей. Двугранный угол"

Задача №2 (в)

Дано: KMPT-тетраэдр;∆TMK правильный;Q-середина KM,Q-проекция P на TMK

Указать: линейный угол для двугранного угла PKTM



- Ребро - KT, грани: PKT, KTM;
- В грани MKT: MX⊥KT, где X-середина KT (по свойству р\б ∆)

QY ∥ MX (по построению)

MX⊥KT (по доказанному)

=> YQ⊥KT (по лемме)

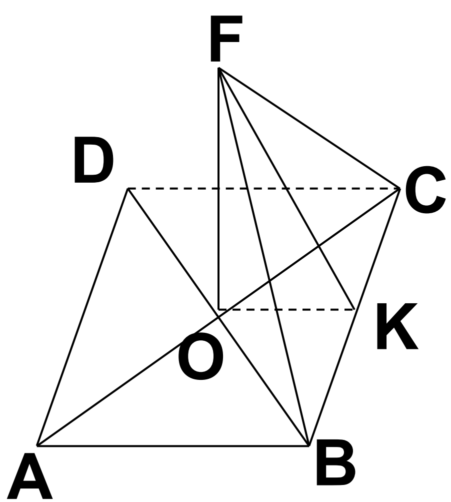
- В грани KTP:

  PY ⊥ KT (по т. о 3^х ⊥)

  ∠(PY;YQ)=∠PYQ линейный для PKTM

Ответ: ∠PYQ – линейный для двугранного PKTM

Дополнительная задача:

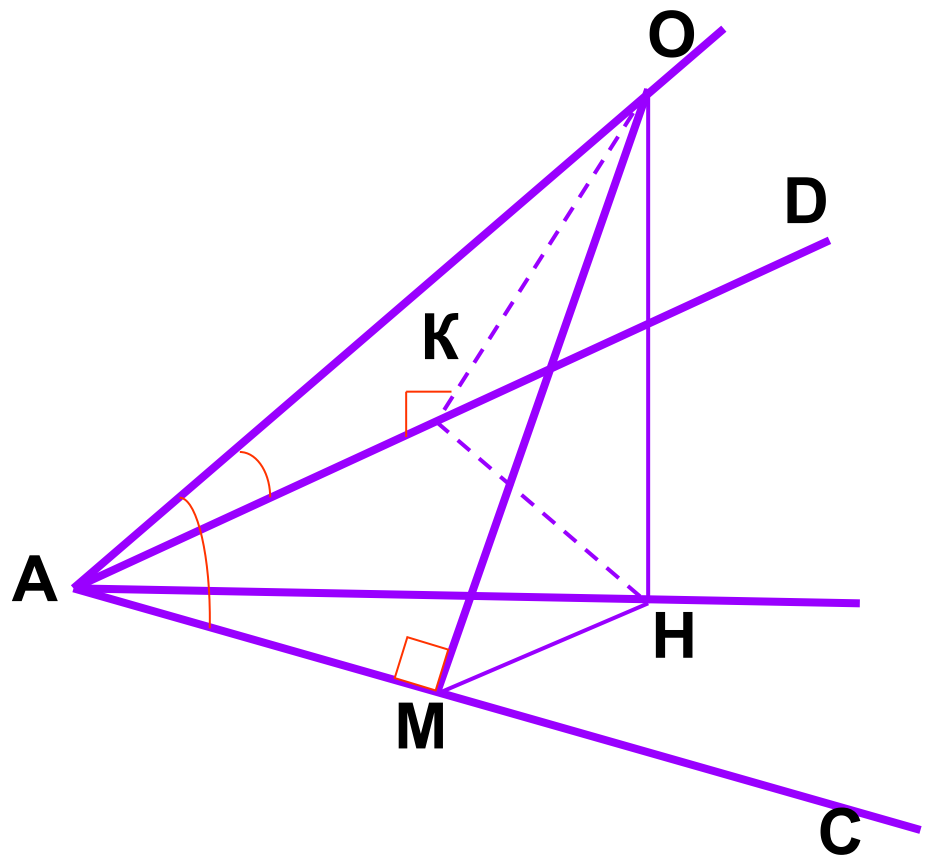


COS ∟FBCD=COS∟OKF

BF=5, BC=6

1) ΔBFK; ∟BKF=90°
FK=^25-9= =^16=4

2) COS∟OKF=OK/FK=
=3/4=0,75
ΔOFK; ∟FOK=90°



**Если два плоских угла трехгранного угла равны,
то их общее ребро проектируется на биссектрису третьего плоского угла .**

Решение задач:

Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а каждое из боковых ребер l. Найдите плоские углы при вершине, зная, что они образуют арифметическую прогрессию П/3.

Проверка:

L,B,Y;

B=L+П/3; Y=B+П/3=L+2П/3

Y<L+B   L+2П/3<L+L+П/3;

L>П/3

Итак, L>П/3, но B=L+П/3>2П/3;

Y=L+2П/3>П/3+2П/3

Вывод: такого угла не существует.

Дополнительная задача:

Все грани параллелепипеда равные ромбы со стороной а и острым углом 60°. Найдите высоту параллелепипеда.

Домашнее задание:

1. п. 22,23.
2. Изучить определение перпендикулярных плоскостей, теорему