Эконометрика

Семинар 2

Законы распределения

1. Закон распределения — совокупность свойств распределения, описываемая плотностью вероятности и функцией распределения.
2. Наиболее важным законом распределения в математической статистике является закон нормального распределения, плотности вероятности которого записывается следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

   Здесь μ — математическое ожидание, σ — среднеквадратичное отклонение.
3. Для статистических методов построения эмпирических зависимостей очень важно, чтобы результаты наблюдений подчинялись нормальному закону распределения.

Свойства нормального распределения

1. Кривая нормального распределения симметрична относительно своего среднего значения.
2. Если $x \to \pm\infty$, то $f(x) \to 0$, то есть очень большие и очень маленькие значения x маловероятны.
3. Примерно $2/3$ всех наблюдений лежит в площади, отсекаемой перпендикулярами к оси Ox $(\mu \pm \sigma)$. При большом объеме выборки примерно $90\,\%$ всех наблюдений лежит между $-1,64\sigma$ и $+1,64\sigma$.
4. Для нормального распределения среднее, мода и медиана совпадают. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю.

Критерии проверки распределения на нормальность

1. Слабые («прикидочные») критерии:
   - Среднее абсолютное отклонение (САО-критерий).
   - Размах варьирования (R/S-критерий).
   - Коэффициенты асимметрии и эксцесса.
   - ...
2. Сильные («строгие») критерии:
   - Критерий χ^2.
   - Критерий Колмогорова—Смирнова (К—С-критерий).

R/S критерий

Размах варьирования выборки R определяется как

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Подсчитывают соотношение R/S и сопоставляют с критическими табличными верхними и нижними границами этого отношения.
Если R/S меньше нижней или больше верхней критической границы, то распределение не является нормальным, в противном случае — является.

R/S критерий

Задача. Проверить подготовленную ранее выборку ВРП российских регионов на нормальность при помощи R/S-критерия. $R = 926\,624, 9.S = 229\,052.$

$$R/S = 4,045.$$

Выборка состояла из 83 наблюдений, то есть $n = 83$. Таблица критических значений R/S-критерия содержит значения дл 80 и 85 наблюдений. Возьмем значения для объема выборки в 85 наблюдений. Проследим по таблице, начиная с какого уровня ошибки интервал между критическими значениями R/S статистики начнет накрывать расчетное значение 4, 04. Легко видеть, что это произойдет при уровне ошибки в 1 % $(0,01)$, следовательно, нам следует взять уровень на ступень выше — 5 %, следовательно, можно говорить, что данная выборка распределена нормально с вероятностью ошибки 5 %.

Критерий асимметрии и эксцесса

Пусть k_a — коэффициент асимметрии, k_e — коэффициент эксцесса.
Вычислим несмещенные оценки для k_a и k_e:

$$K_a = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} k_a,$$

$$K_e = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)} \cdot [(n+1)k_e + 6].$$

Также вычислим среднеквадратические отклонения для показателей асимметрии и эксцесса:

$$S_{K_a} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}},$$

$$S_{K_e} = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}}.$$

Критерий асимметрии и эксцесса

Наконец, следует проверить выполнение системы условий:

$$|K_a| \leqslant 3S_{K_a}, \qquad |K_e| \leqslant 5S_{K_e}.$$

Если оба этих условия выполняются, то гипотеза нормальности исследуемого распределения может быть принята.

Задача

Задача. Проверить подготовленную ранее выборку ВРП российских регионов на нормальность при помощи критерия асимметрии и эксцесса. $k_a = 1,311. k_e = 1,014.$

$$K_a = \frac{\sqrt{83(83-1)}}{83-2} 1,311 \approx 1,32.$$

$$K_e = \frac{83-1}{(83-2)(83-3)} [(83+1)k_e + 6] \approx 1,15.$$

$$S_{K_a} = \sqrt{\frac{6 \cdot 83 \cdot (83-1)}{(83-2)(83+1)(83+3)}} \approx 0,26.$$

$$S_{K_e} = \sqrt{\frac{24 \cdot 83 \cdot (83-1)^2}{(83-3)(83-2)(83+3)(83+5)}} \approx 0,52.$$

Критерий χ^2

1. Разобьем выборку на классы (подмножества). Длина интервалов разбиения определится согласно правилу Скотта:
$$\Delta = 3,5Sn^{-1/3}.$$
2. Определяем середины классов x.
3. Подсчитываем частоты B для всех классов.
4. Для каждого класса вычисляем Bx и Bx^2.
5. Находим $\overline{x}$ и $\overline{S}$:

$$\overline{x} = \frac{\sum Bx}{n}, \quad \overline{S} = \sqrt{\frac{\sum Bx^2 - \frac{(\sum Bx)^2}{n}}{n-1}}.$$

Критерий χ^2

6. Вычисляем $k = n\Delta/\overline{S}$.
7. Для каждого класса рассчитываем

$$z = \left|\frac{x - \overline{x}}{\overline{S}}\right|.$$

8. Пусть

$$y = f\,(z) \simeq 0,4e^{-z^2/2} \text{ —}$$

уравнение кривой стандартного нормального распределения. Для каждого класса рассчитываем $E = f\,(z)k$, затем —

$$\frac{(B - E)^2}{E}.$$

Критерий χ^2

9. Сумма последних выражений для всех классов даст значение критерия χ^2

$$\chi^2 = \sum_{m=1}^{k} \frac{(B - E)^2}{E}.$$

10. Проверяем выполнение гипотезы о нормальности распределения по выполнению неравенства

$$\chi^2 \leqslant \chi^2_{\text{табл.}} = \chi^2_{\nu,\,\alpha},$$

где $\alpha = 1 - p$ — уровень значимости (обычно 10 % или 5 %), $\nu = k - 2 - 1$.

11. Если неравенство из п. 10 выполняется, считаем, что выборка распределена нормально.

Критерий χ^2

Задача. Определить интервалы разбиения исследуемой выборки на классы. Построить интервалы разбиения.

$$x_{min} = 18\,782,9;$$

$$x_{max} = 944\,407,8;$$

$$n = 78;$$

$$\overline{S} = 229\,052.$$

Преобразование распределения выборки к нормальному

Если распределение имеет крутую левую ветвь гистограммы и пологую правую, выполняют преобразование выборки по формулам:

1. $x' = \lg(x \pm a) \cdot 10^b$,
2. $x' = 1/x$,
3. $x' = 1/\sqrt{x}$.

После каждого преобразования вычисляют критерий χ^2 и принимают то преобразование, которое дало наименьший χ^2. Для распределений, смещенных вправо, исходные данные преобразуют по формуле $x' = x^a$ (при $a = 1,5; 2$) и после каждого преобразования вычисляют χ^2, выбирают a, при котором χ^2 минимален.