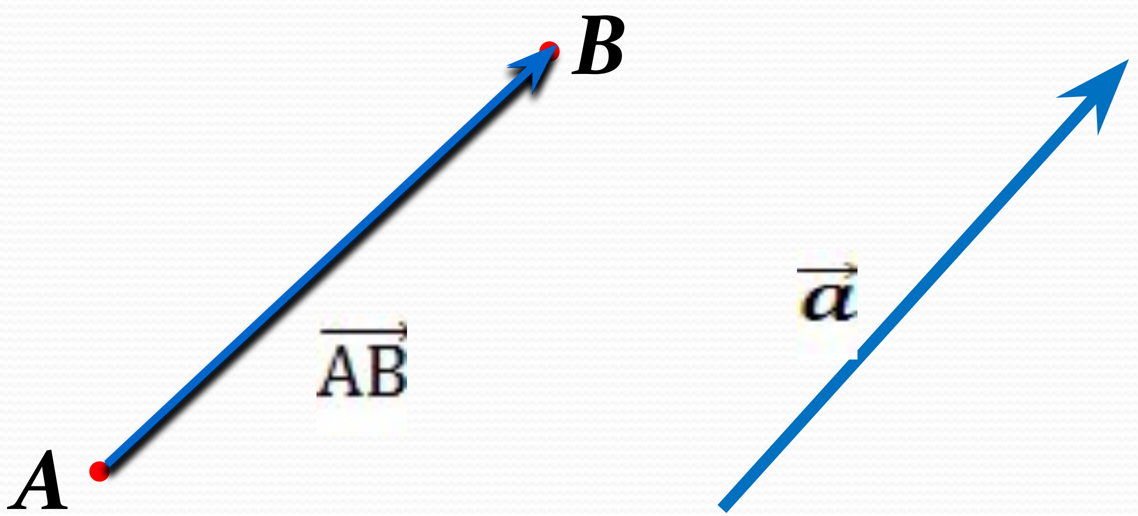
Элементы линейной алгебры

Векторы на плоскости и в пространстве

Вектором [*От латинского **vector** – везущий, несущий*] называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какая из концевых его точек считается началом, какая – концом отрезка.



Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называют ***<u>нулевым вектором</u>*** и обозначают $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ На чертеже нулевой вектор изображается одной точкой.

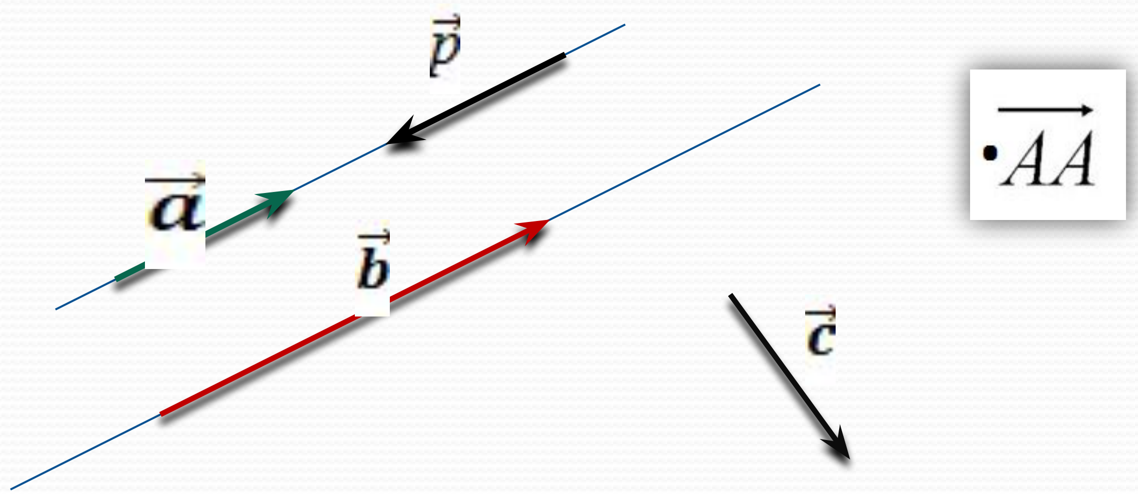
$$\bullet\,\overrightarrow{AA}$$

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРА

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными** [От латинского **con** – вместе и **linea** – линия, т .е. солинейные].

Коллинеарность векторов обозначается $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

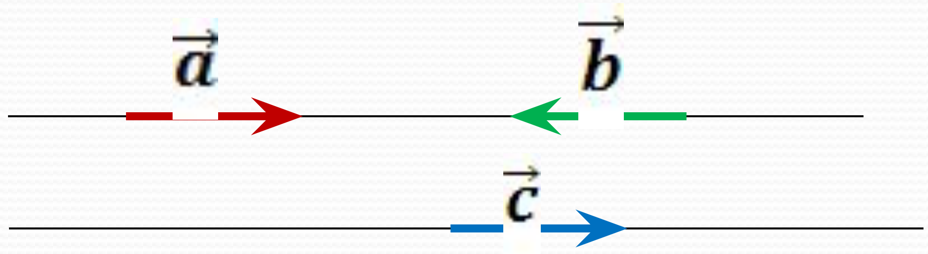
Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.



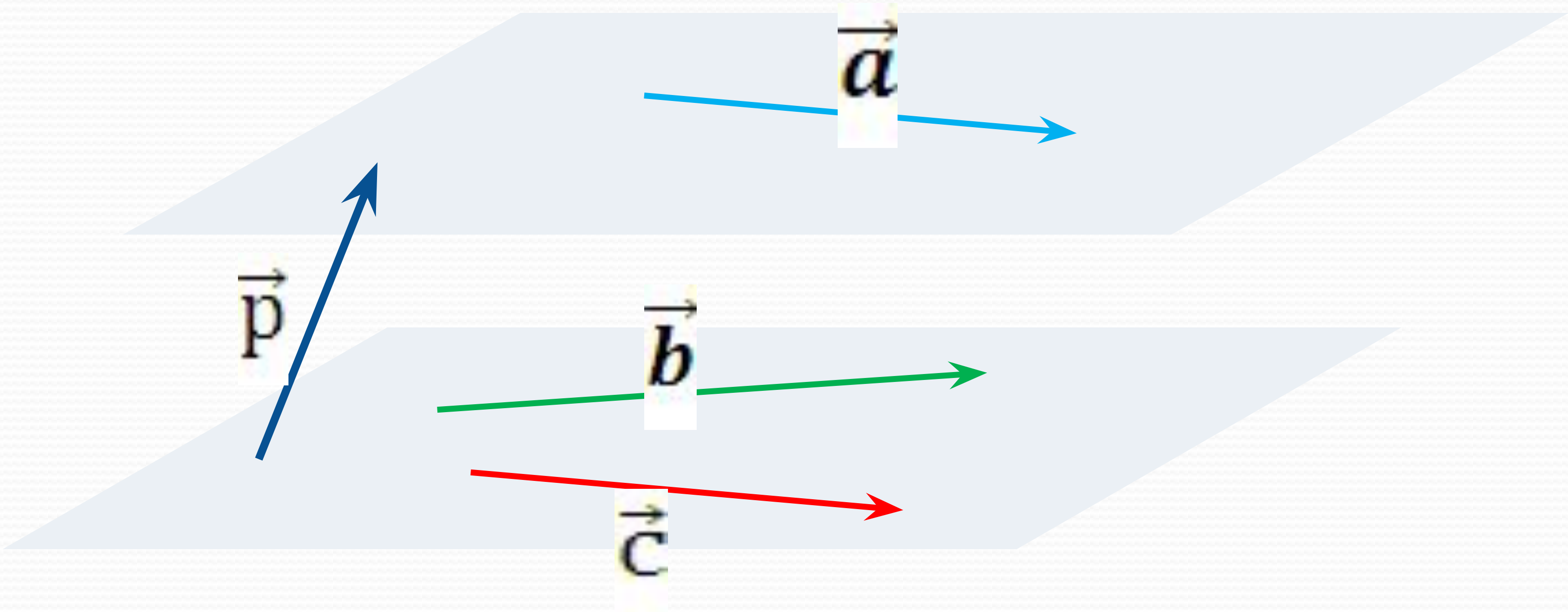
- Два ненулевых коллинеарных вектора могут иметь одно и то же направление ($\vec{a}$ и $\vec{c}$) или противоположные направления ($\vec{a}$ и $\vec{b}$).

сонаправленные векторы → $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$

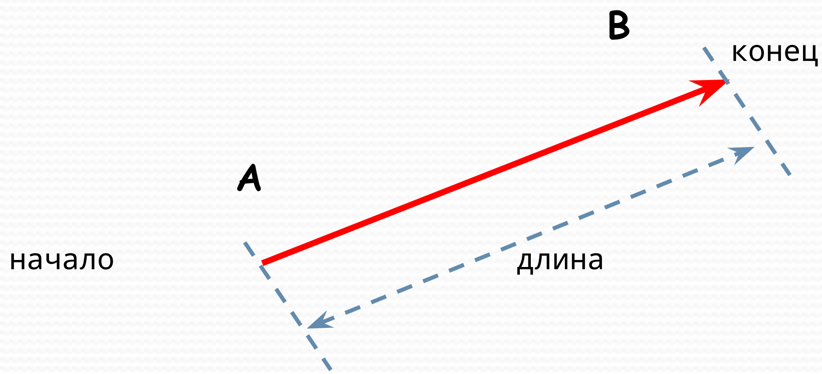
противоположно направленные векторы → $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются компланарными.

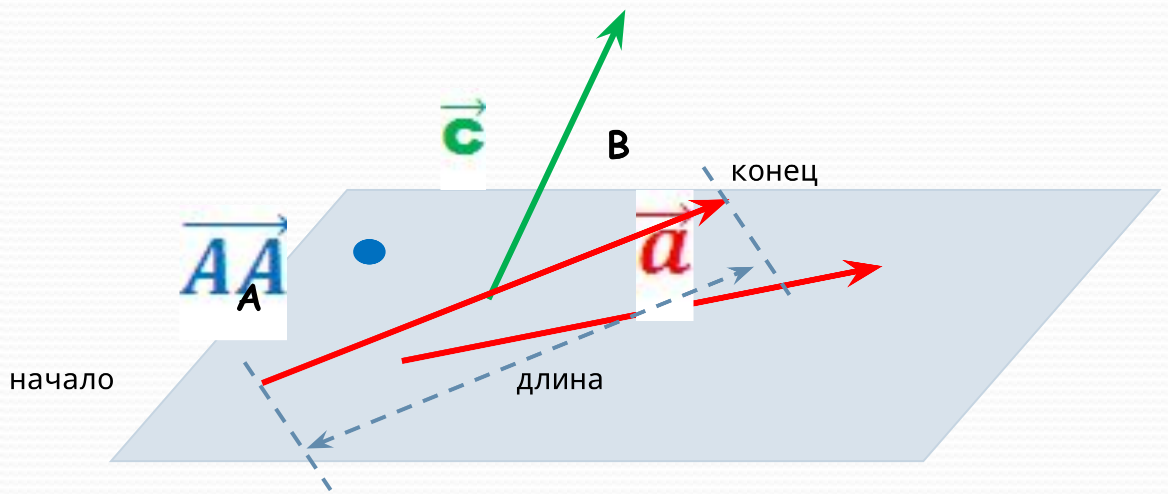


Длиной или модулем вектора называется длина отрезка, изображающего данный вектор.



Вектор называется **единичным** $\vec{e}$, если его модуль равен единице: $|\vec{e}| = 1$. Если дан какой-нибудь вектор $\vec{a}$, то единичный вектор $\vec{e}$ того же направления равен отношению вектора $\vec{a}$ на его модуль $|\vec{a}|$, то есть $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

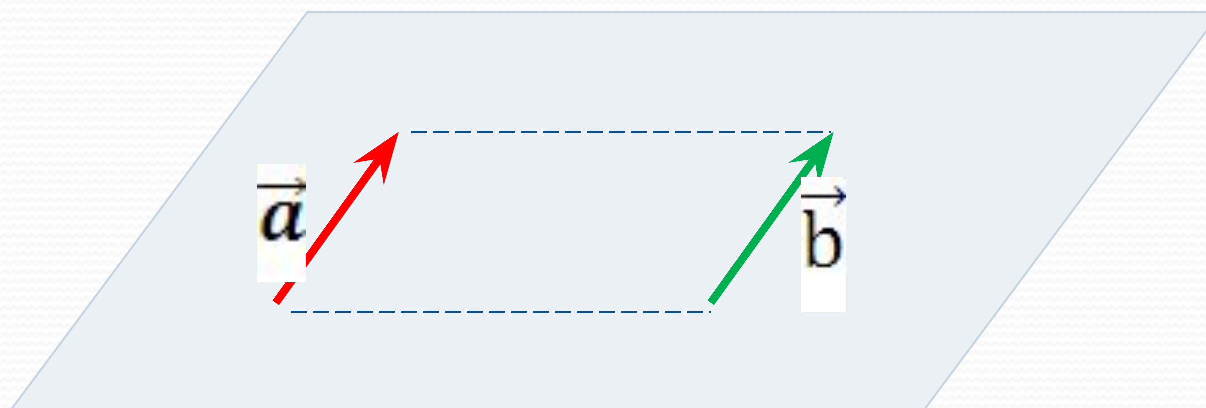
- Вектор характеризуется следующими элементами:
- 1) начальной точкой (точкой приложения);
- 2) направлением;
- 3) длиной («модулем вектора»).



Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если выполняются следующие условия:

а) модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

б) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то они сонаправлены $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

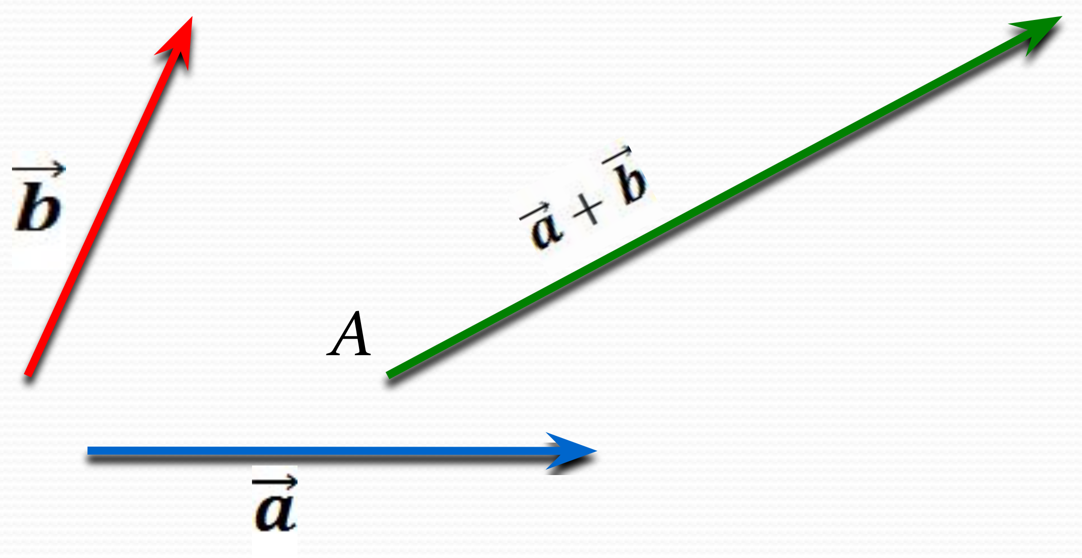


ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

- Сложение векторов
- Вычитание векторов
- Произведение ненулевого вектора на действительное число

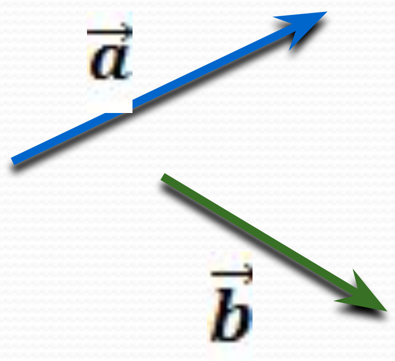
ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

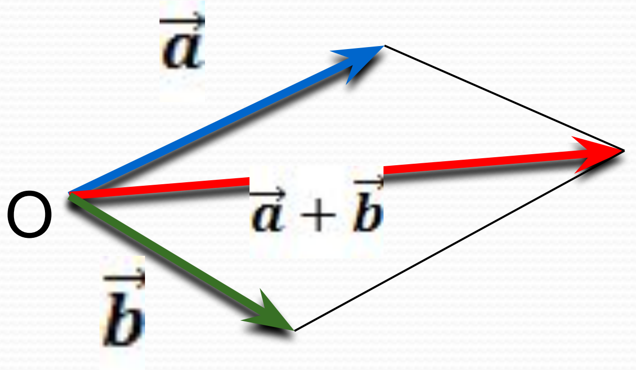
<u>Правило треугольника.</u> Суммой двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который получается следующим образом: от произвольной точки O откладывается вектор $\vec{a}$, затем от конечной точки вектора $\vec{a}$ откладывается вектор $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом $\vec{a}$, а конец с концом $\vec{b}$, образует *сумму* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

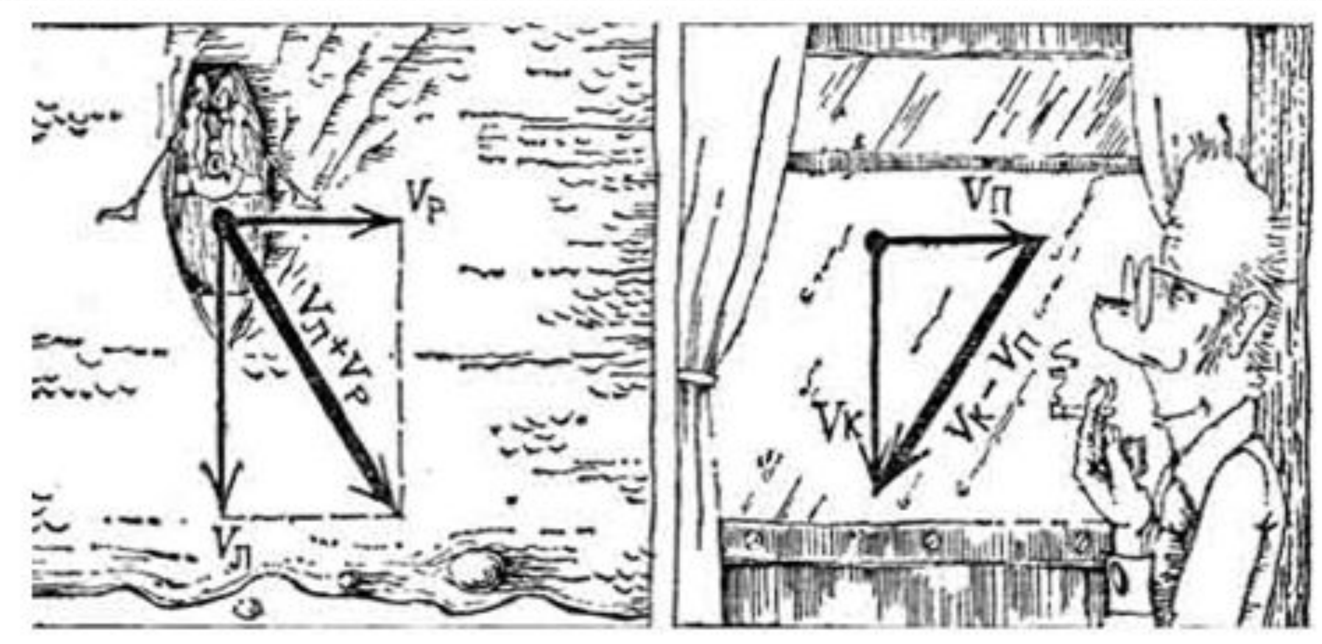
Суммой двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который получается следующим образом: от произвольной точки ***О*** откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, строится на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм. Диагональ этого параллелограмма, выходящая из точки О является суммой двух данных векторов.





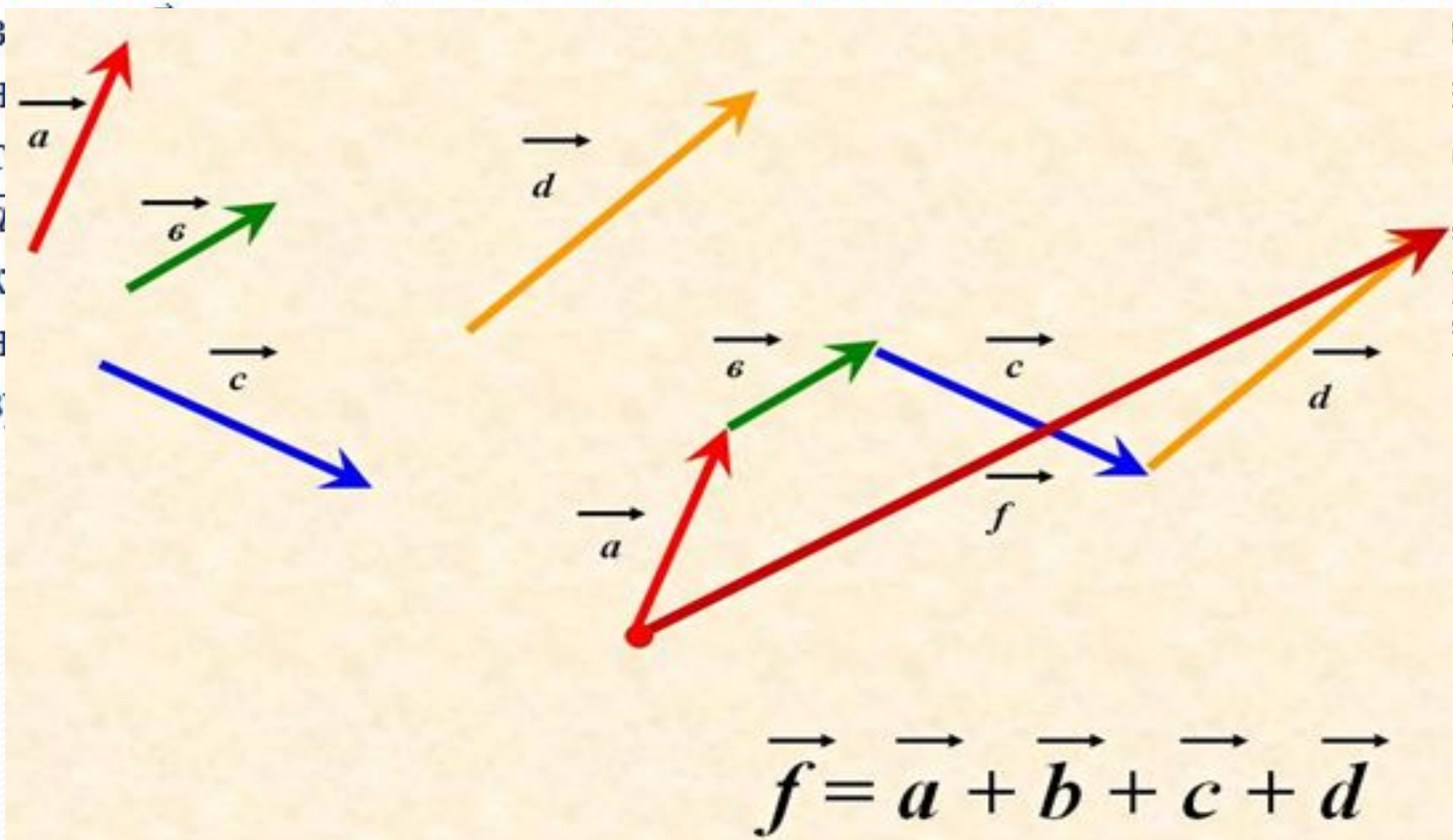
- **Пример.** Скорость – векторная величина, характеризующаяся быстротой движения (*модуль вектора скорости*) и направлением (*направление вектора скорости*) в данный момент времени.

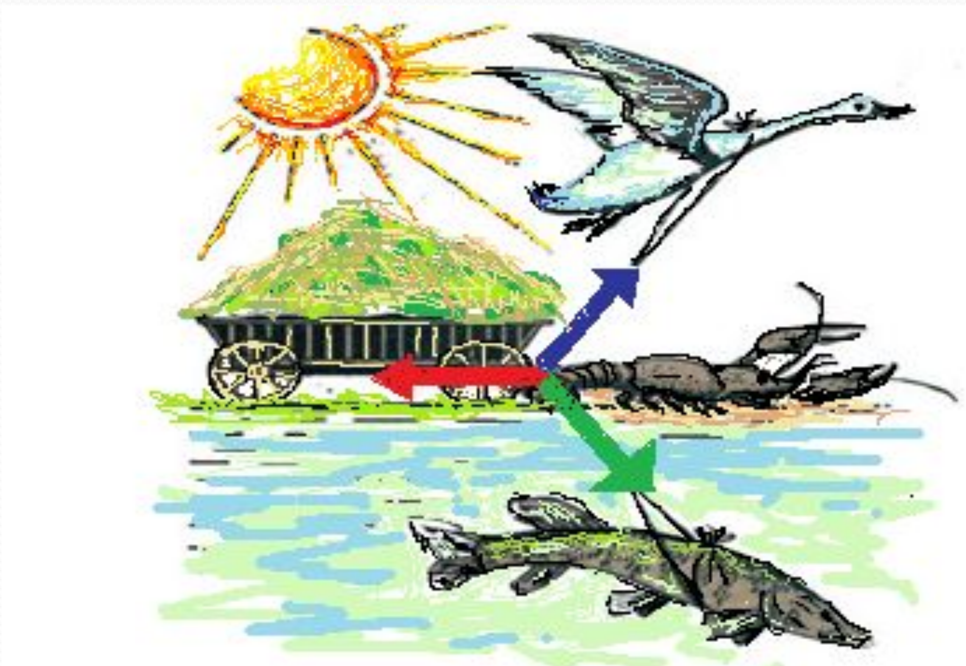
Необходимость в сложении скоростей возникает, когда объект участвует одновременно в двух движениях.

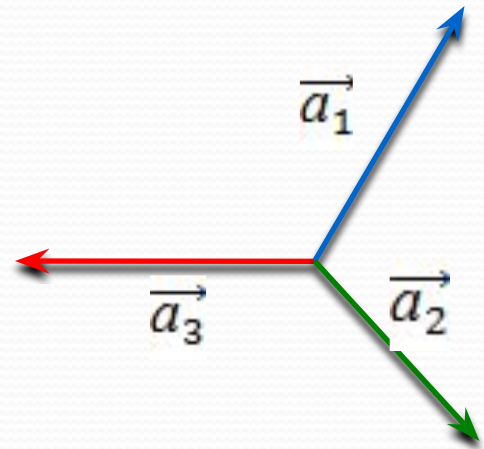


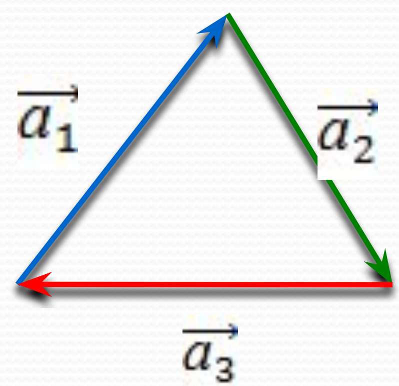
ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА

Суммой ***n*** произвольных векторов $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, …, $\vec{a_n}$ называется






$\overrightarrow{a_1}$
$\overrightarrow{a_2}$
$\overrightarrow{a_3}$


$\overrightarrow{a_1}$
$\overrightarrow{a_2}$
$\overrightarrow{a_3}$

Свойства суммы векторов:

1) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (*ассоциативность*);

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *коммутативность*);

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

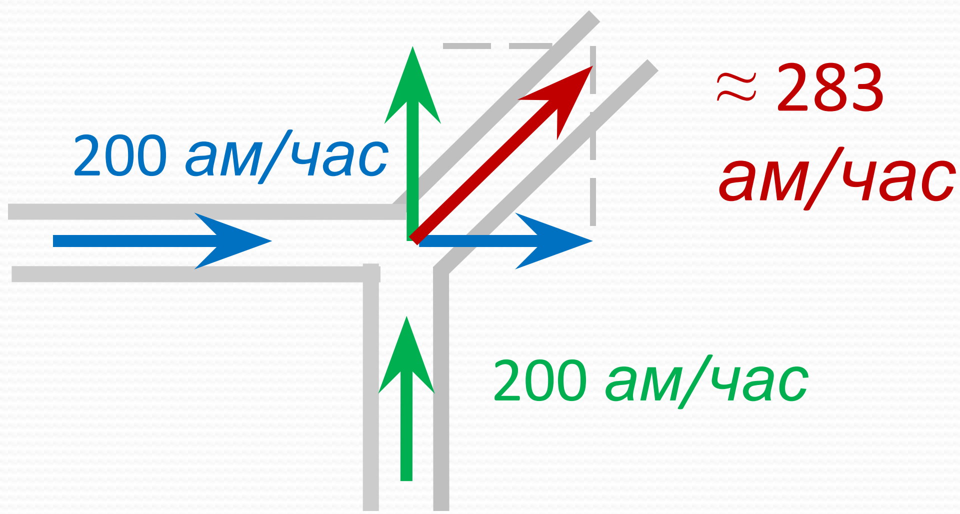
Поток автомобилей на дороге

характеризуется

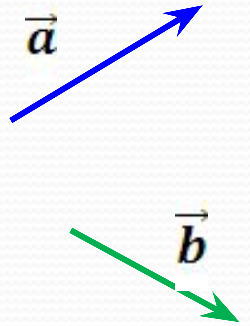
числом проходящих за единицу времени автомашин

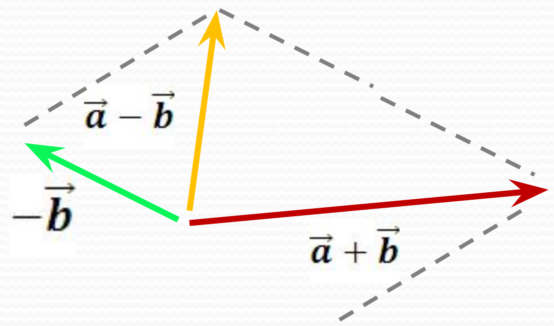
направлением

Рассмотрим перекресток трех дорог, на котором по двум дорогам сливаются два потока автомобилей по 200 автомашин в час на каждой.



Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.





$$\vec{x} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

Задача. Самолёт летит относительно воздуха со скоростью v_o = 800 км/ч. Ветер дует с запада на восток со скоростью ***u*** = 15 м/с. С какой скоростью ***v*** самолёт будет двигаться относительно земли и под каким углом α к меридиану надо держать курс, чтобы перемещение было: на юг; на запад; на восток?

Решение. При движении самолета его скорость относительно земли равна сумме скоростей самолета относительно воздуха и ветра:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{u}$$

Воспользовавшись правилом треугольника, найдем скорость самолета относительно земли при ее движении на юг, учитывая, что *u* =15*м/с* = 54*км/ч*.

$$1\text{м} = 0{,}001\text{км};\ 1\text{сек} = \frac{1}{3600}\text{часа. Скорость } v\ \text{км/час}$$
$$= 0{,}001 : \frac{1}{3600} = 3{,}6\ \text{км/час.}$$

$$1\ \text{м/с} = 3{,}6\ \text{км/час.}$$

Из прямоугольного треугольника АВС:

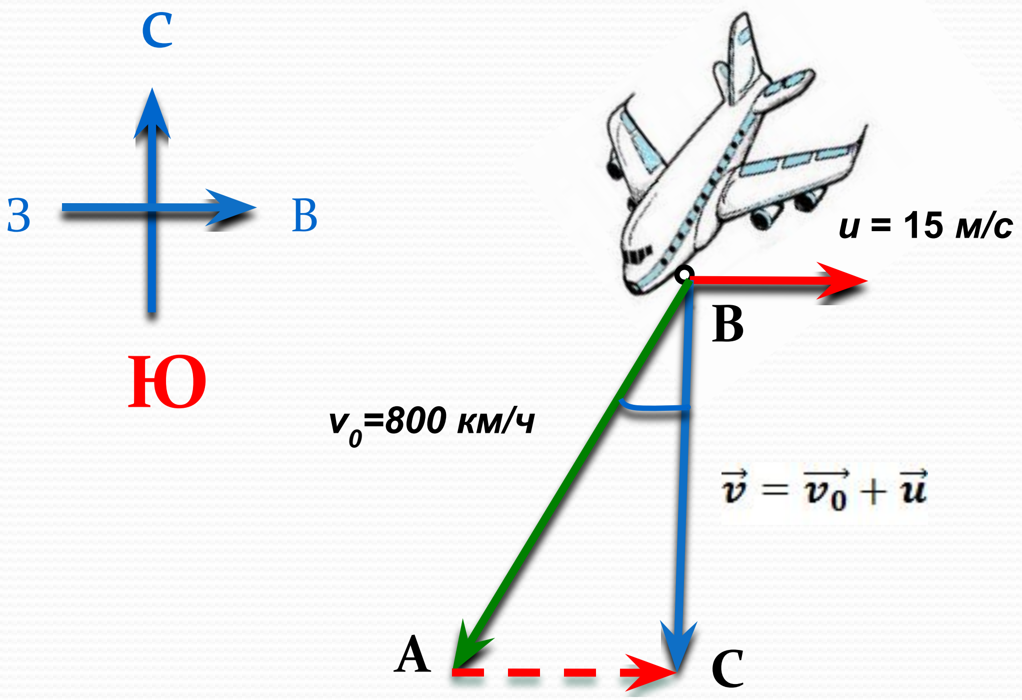
а) $v = \sqrt{v_0^2 - u^2} = \sqrt{800^2 - 54^2} \approx$

$$\approx 798{,}2\ км/ч;$$

б) $v = v_0 cos\alpha$; $cos\alpha = \frac{v}{v_0} = \frac{798{,}2}{800} \approx$ 0,998;

$$\alpha = 4^0.$$

Курс на юго-запад.

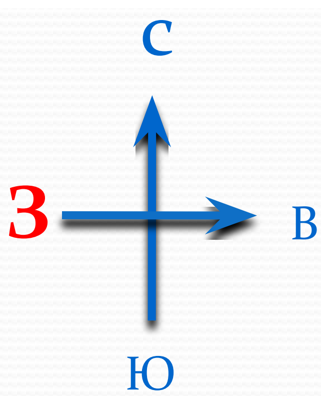


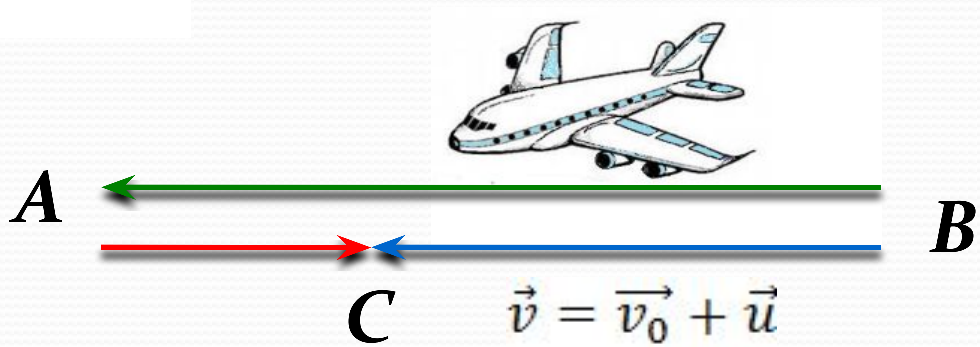
Воспользовавшись правилом треугольника, найдем скорость самолета относительно земли при ее движении на запад.

Модуль вектора $\overrightarrow{BC}$ равен сумме модулей векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$, то есть $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{AC}|$:

$$v = 800 + 54 = 854 \text{ км/ч}.$$

Кур на восход.





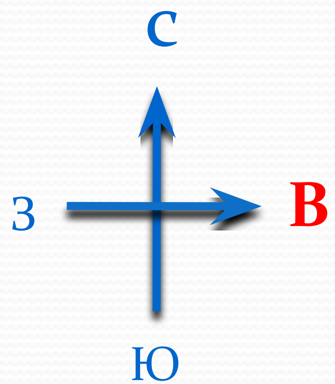
$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{u}$$

Воспользовавшись правилом треугольника, найдем скорость самолета относительно земли при ее движении на восход.

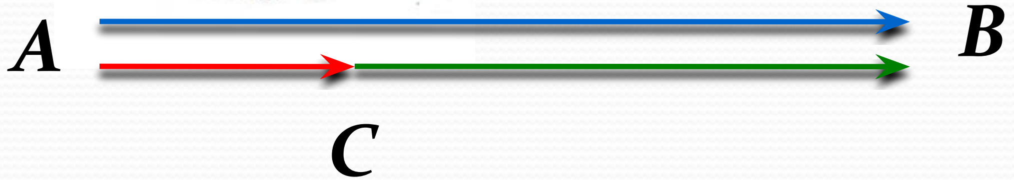
Модуль вектора $\overrightarrow{BC}$ равен сумме модулей векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$, то есть $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{AC}|$:

$$v = 800 + 54 = 854 \text{ км/ч}.$$

Кур на восход.



$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{u}$$



Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное $\alpha \neq 0$ число называется вектор $\vec{p}$, удовлетворяющий следующим условиям:

a) $|\vec{p}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

b) если $\alpha > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$; если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{p}$.

Произведение нулевого вектора на произвольное число или числа нуль на произвольный вектор есть нуль–вектор.

Произведение вектора на число обладает следующими

св $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; ***а*** $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

1) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

2) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

3) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

4)

Теорема. Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число α, удовлетворяющее условию $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.

Пусть вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$.

Возможны следующие три случая:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; 3) $\vec{a} = \vec{0}$.

$$\left.\begin{aligned} &\vec{e_1} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \vec{e_1} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ &\vec{e_2} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \vec{e_2} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ &|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{e_1} = \vec{e_2} \quad \Rightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad \Rightarrow \vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

$$\alpha = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

ЗАДАЧА

На чертеже дан единичный вектор $\overline{a}$. Построить векторы

$\overline{p}_1 = 2\overline{a}$ $\qquad$ $\overline{p}_2 = -3\overline{a}$