ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Дифференциальное исчисление

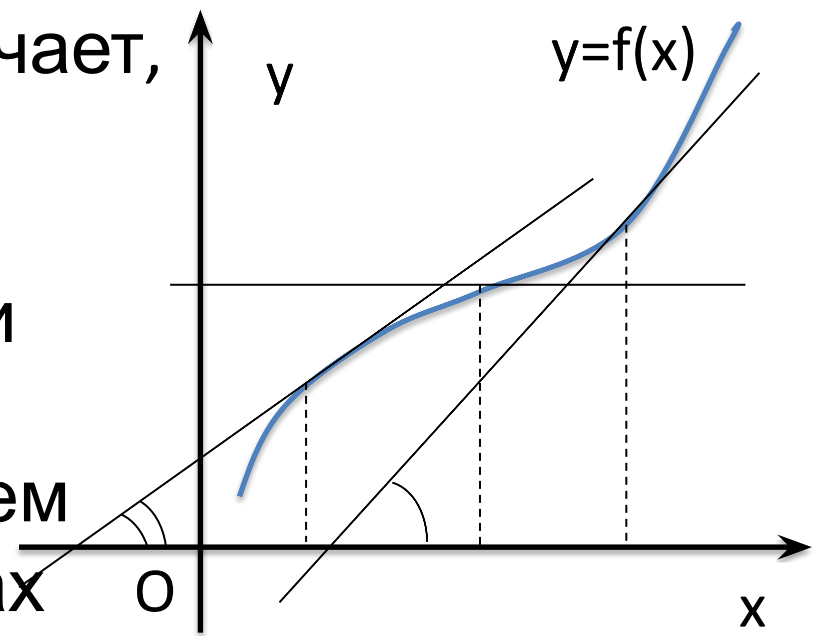
§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

2.1. Возрастание и убывание функций

Теорема (необходимые условия возрастания и убывания функции).

Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $x \in (a;b)$.

Геометрически теорема означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках



Теорема (достаточные условия возрастания и убывания функции).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для x є (a;b), то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

Примеры:

1)Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x-4$ на возрастание и убывание;

2)Исследовать функцию $f(x)= x - \ln x$ на возрастание и убывание;

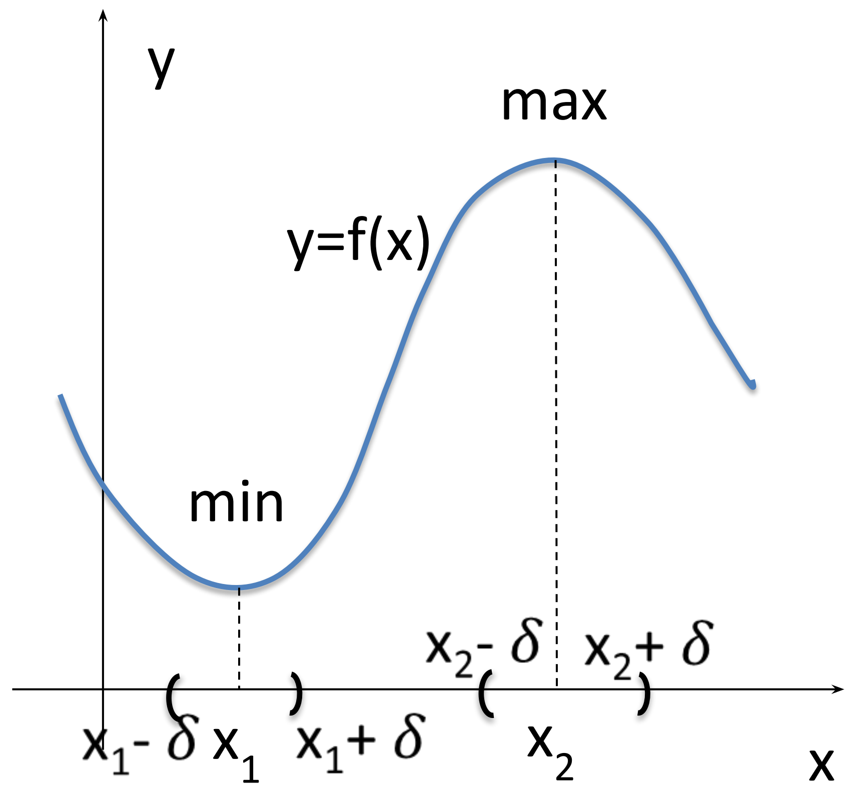
3) Исследовать функцию $f(x)= \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$ на возрастание и убывание

2.2. Максимум и минимум функций

►Точка x_0 **называется точкой максимума функции** y=f(x), если существует такая δ -окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

►Точка x_0 **называется точкой минимума функции,** если $\exists\delta > 0$ $\forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $f(x) > f(x_0)$.

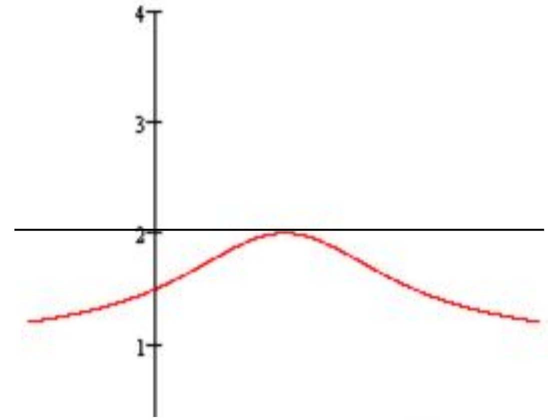
►Значение функции в точке максимума (минимума) называется **экстремумом функции**.



Теорема (необходимое условие экстремума функции).

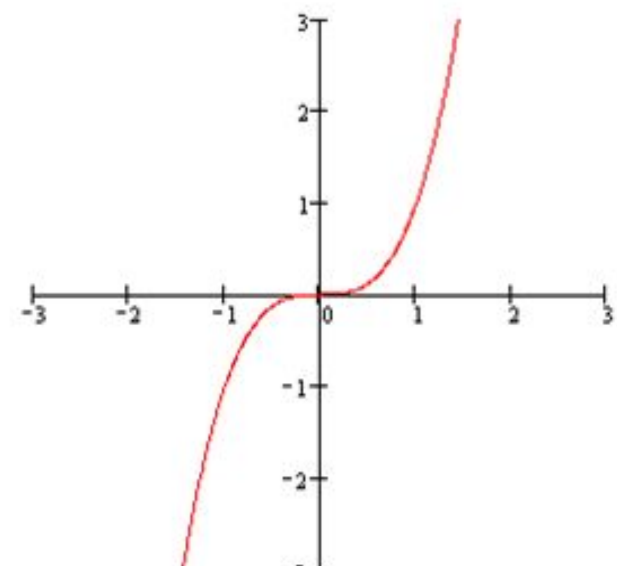
Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0)=$

Геометрически равенство $f'(x_0)=0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y=f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

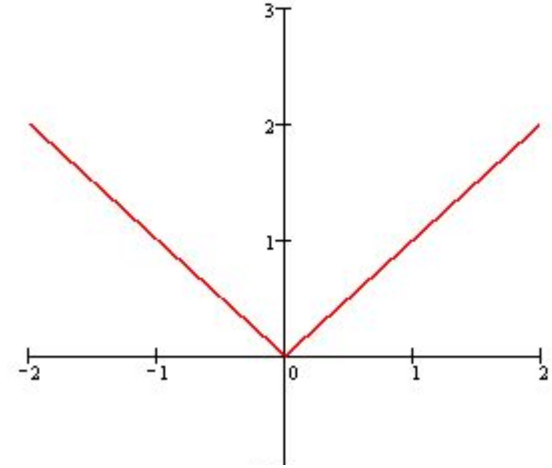


ЗАМЕЧАНИЯ

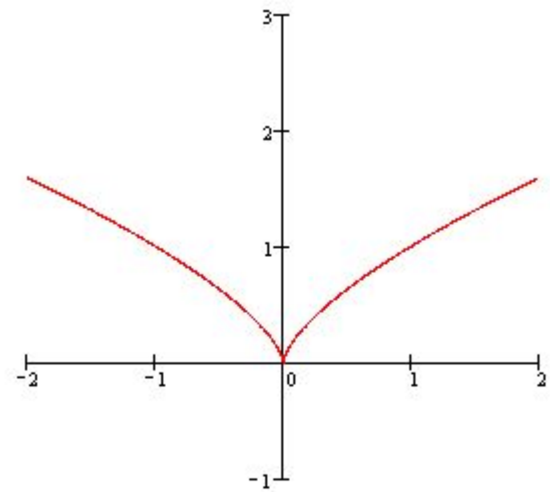
1) Обратная теорема неверна, т.е. если $f'(x_0)=0$, то это не значит, что x_0- точка экстремума.



2)Непрерывная функция y=I xI в точке x=0 производной не имеет, но точка x=0 — точка минимума.



3)Непрерывная функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке x=0 производная не существует, но точка x = 0 — точка минимума .



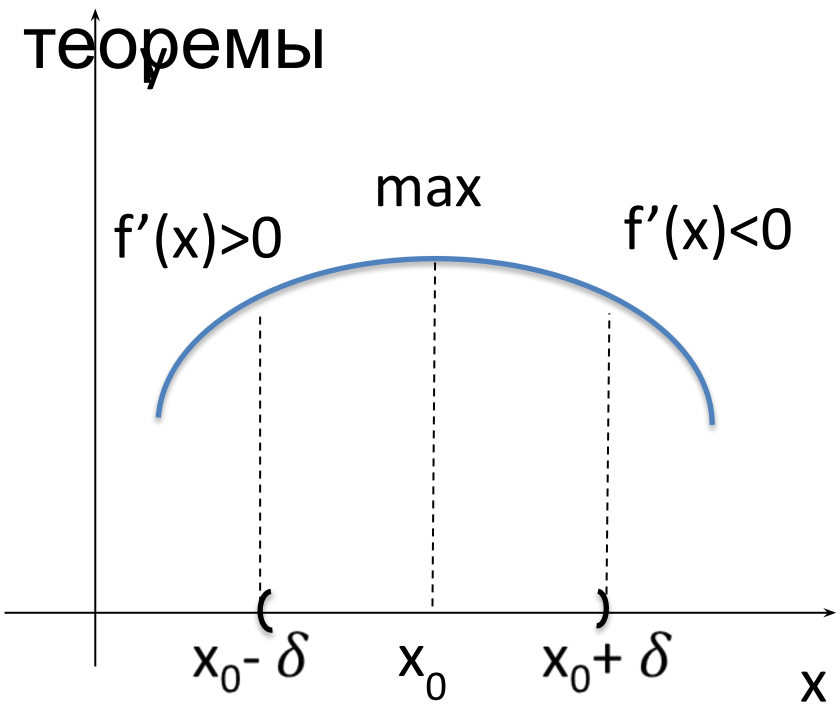
Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует.

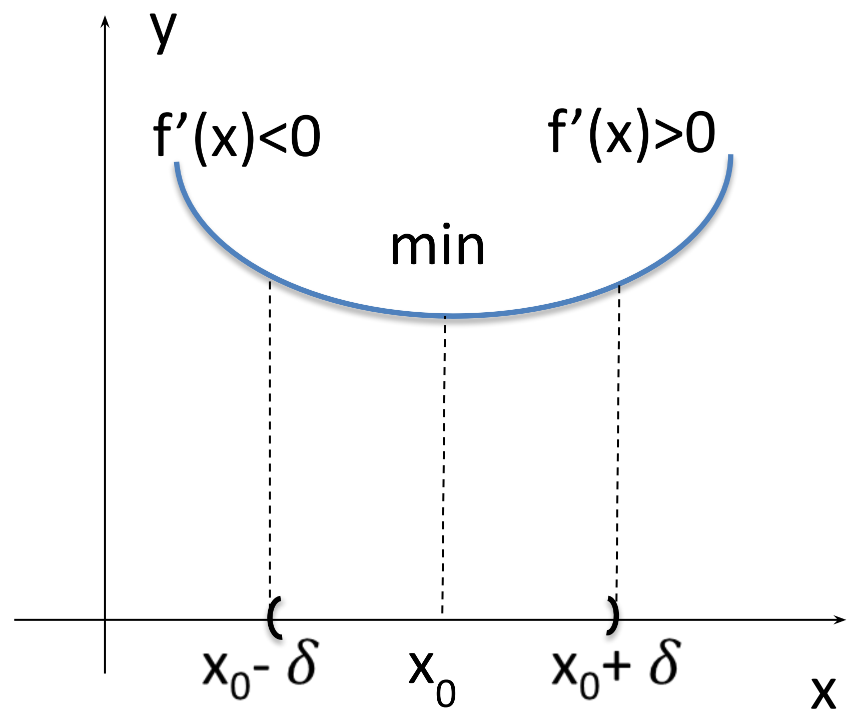
►Такие точки называются

Теорема (достаточное условие экстремума функции)

Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой δ -окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

Графическая интерпретация доказательства теоремы





Примеры:

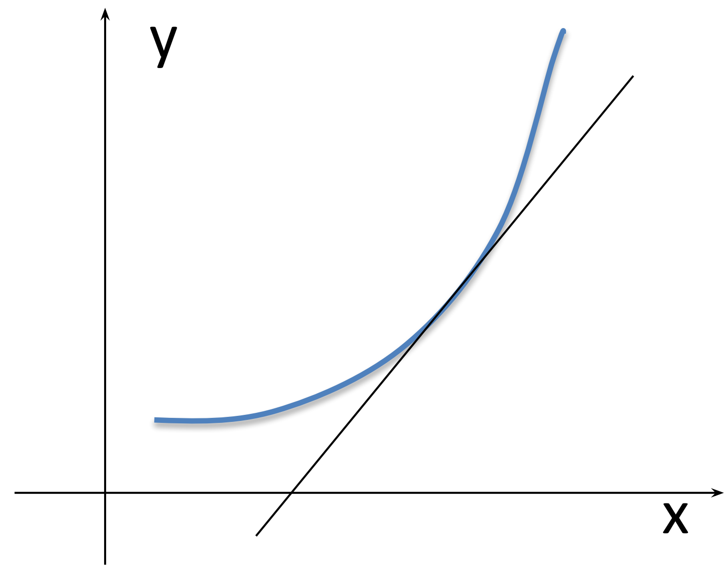
1)Найти экстремум функции $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$;

2)Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$;

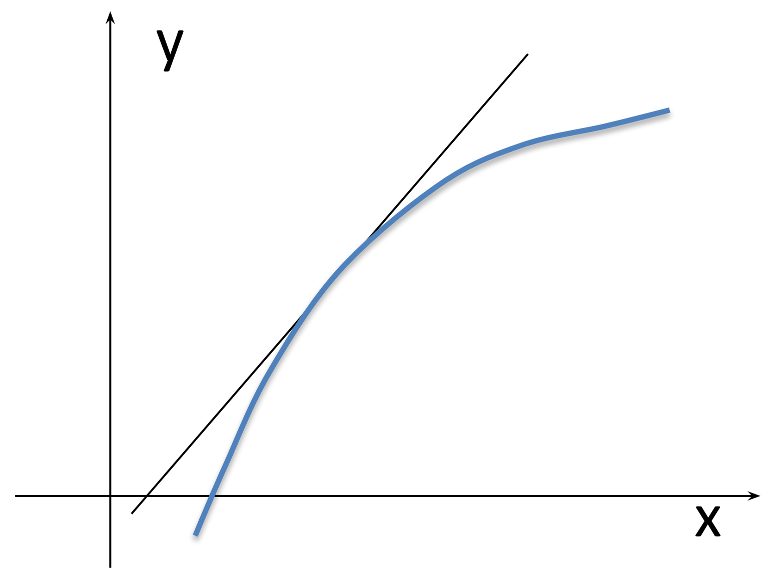
3))Найти экстремум функции $y = x \cdot e^x$.

2.3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

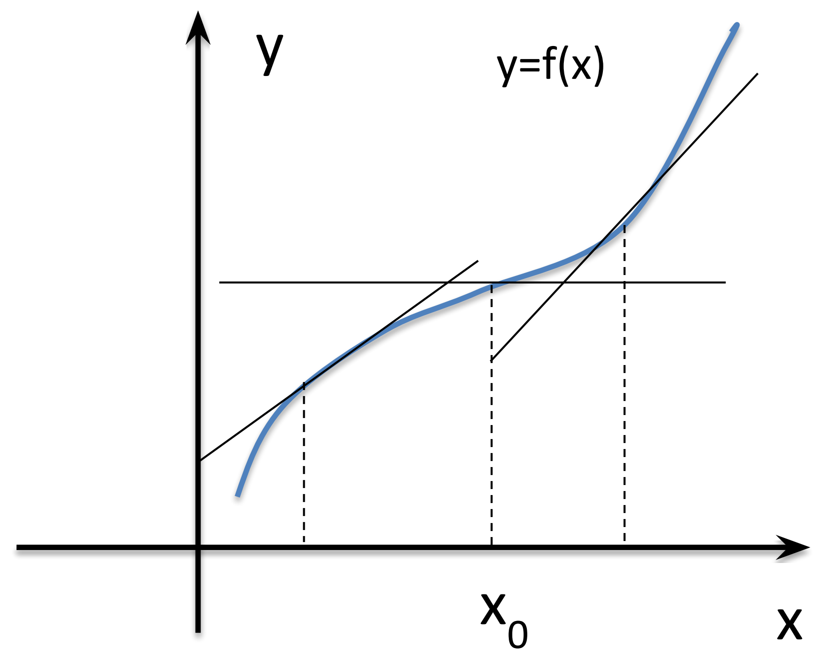
►График дифференцируемой функции y=*f*(x) **называется выпуклым вниз** на интервале (a;b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.



►График функции y=*f*(x) **называется выпуклым вверх** на интервале (a;b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.



►Точкой **перегиба** графика непрерывной функции $y=f(x)$ называется точка x_0 в которой выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз или наоборот.



Теорема. Если функция $y=f(x)$ во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x)>0$ $x\in(a;b)$ — график выпуклый вниз.

Теорема (необходимое условие существования точек перегиба). Если дифференцируемая функция у=*ƒ*(x) имеет точку перегиба, то ее вторая производная в этой точке равна нулю: $f''(x_0)=0$.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пример ы:

1)Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y=x^5-x+5$.

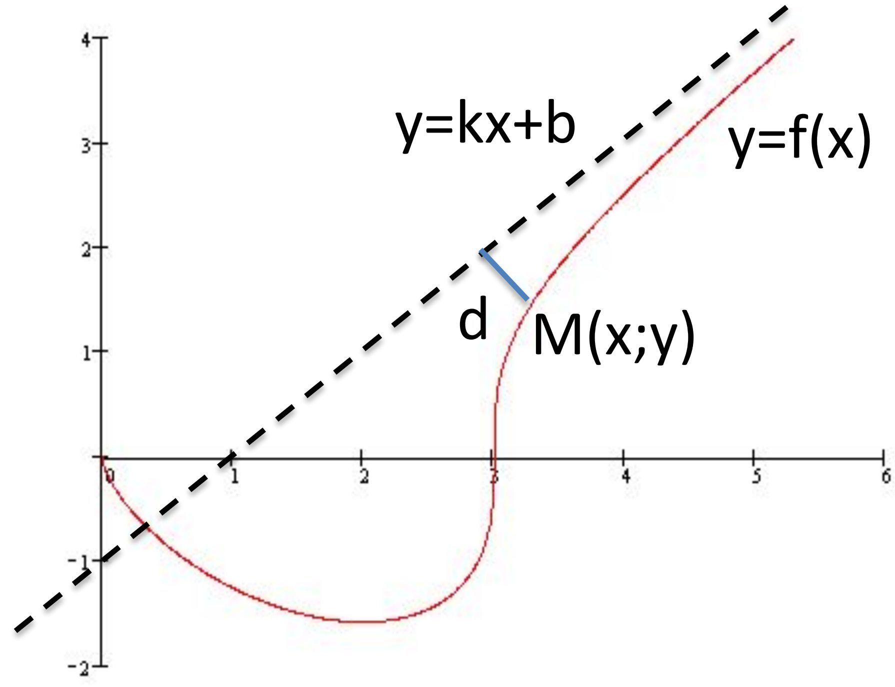
2)Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x \cdot e^x$.

3)Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y=\frac{x-1}{x^5}$.

2.4. Асимптоты графика функции

- **Асимптотой** графика функции y=f(x) называется прямая y=kx+b, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой .

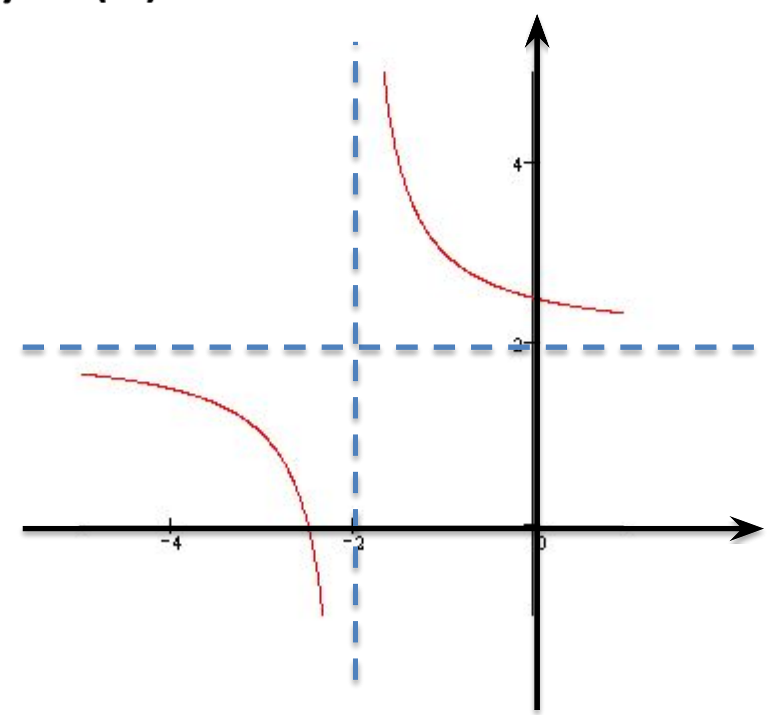
Асимптоты могут быть **вертикальными, наклонными и горизонтальными**.



Теорема 1.Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой этой точки) и **хотя бы один** из пределов функции $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \pm\infty$.

Тогда прямая x = a является **вертикальной асимптотой** графика функции y=f(x).

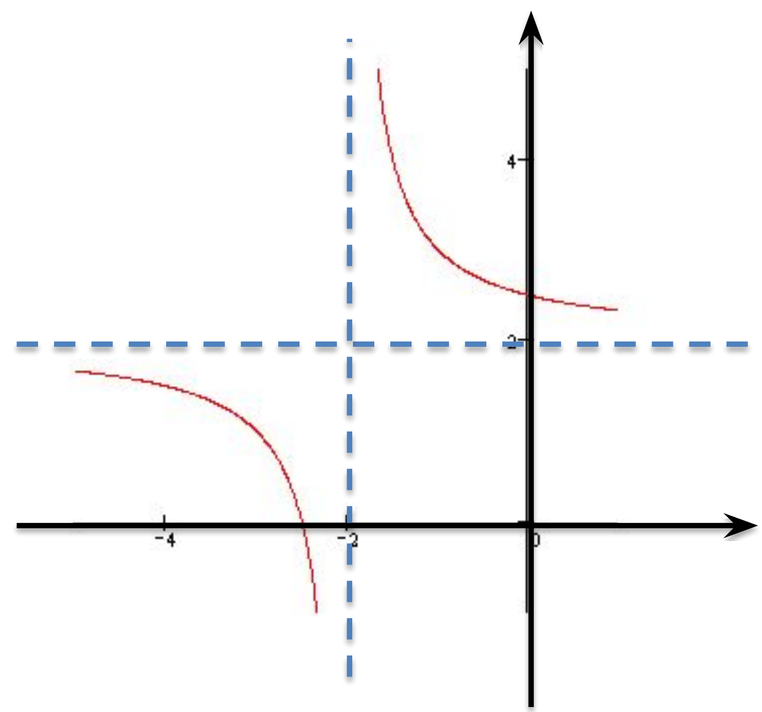
Вертикальные асимптоты x = a следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения.



Теорема 2. Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Тогда прямая y = b является **горизонтальной асимптотой** графика функции y=f(x).

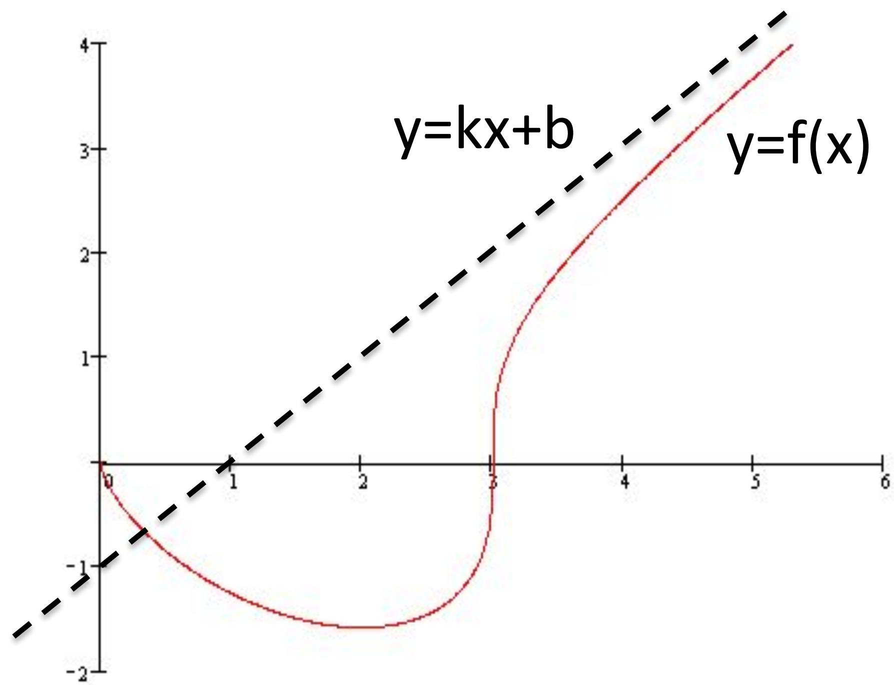
Замечание.

Если конечен один из пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, то функция имеет лишь левостороннюю или правостороннюю горизонтальную асимптоту.



Теорема 3. Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы функции $\mathbf{k}=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty}\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{b}=\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty}(\mathbf{y}-\mathbf{kx})$. Тогда прямая y = kx+b является **наклонной асимптотой** графика функции y=f(x).

Замечание 1. Наклонная асимптота, так же, как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.



Замечание 2. Если хотя бы один из пределов $\mathbf{k}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ или $\mathbf{b}=\lim\limits_{x\to\infty}(\mathbf{y}-\mathbf{kx})$ не существует или равен бесконечности, то кривая y=f(x) наклонной асимптоты не имеет.

Замечание 3. Асимптоты графика функции y=f(x) при x→+ ∞ и x→- ∞ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов $\mathbf{k}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ и $\mathbf{b}=\lim\limits_{x\to\infty}(\mathbf{y}-\mathbf{kx})$ следует отдельно рассматривать случай, когда x→+∞ и когда x→- ∞.

Примеры:

1)Найти асимптоты графика функции $y = xe^x$;

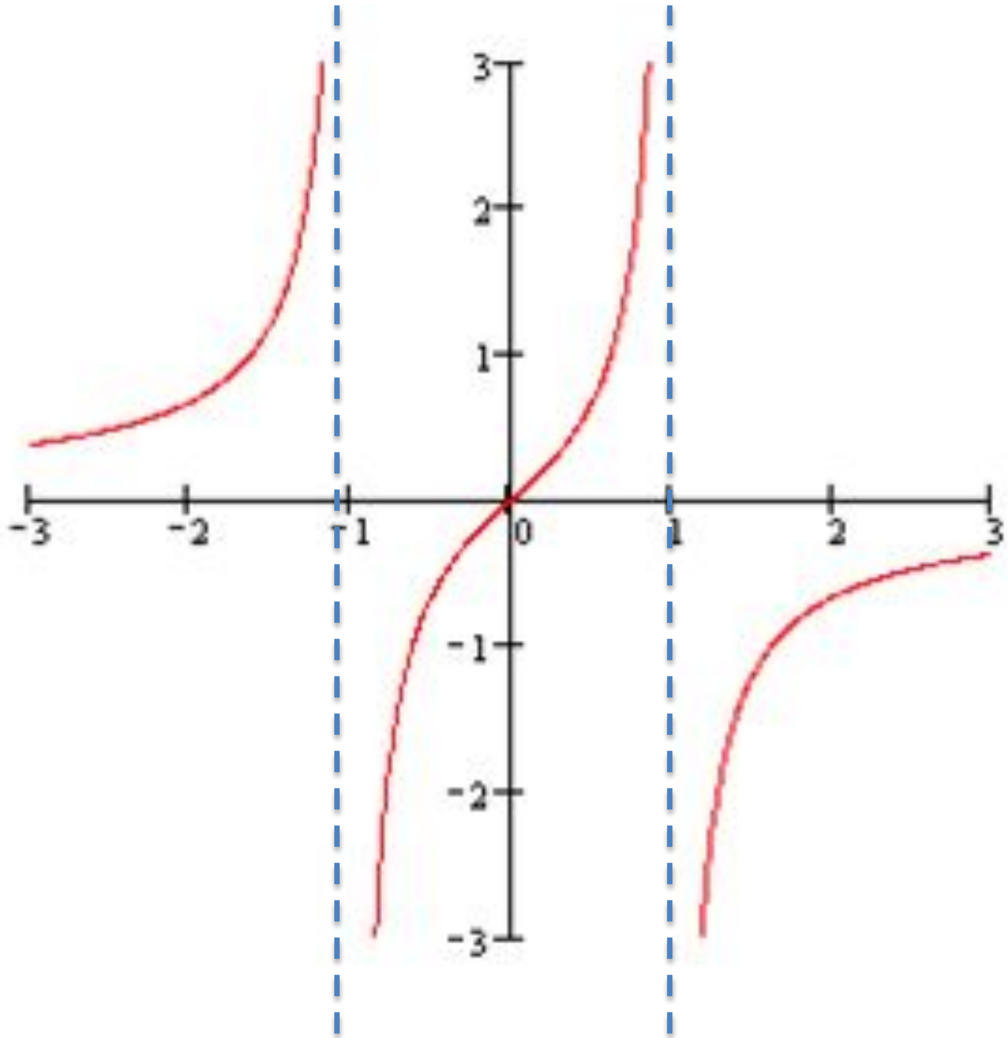
2)Найти асимптоты графика функции $y=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$.

2.5. Общая схема исследования функции
и построения графика

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Примеры:

1)Исследовать функцию $y = \frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.



2)Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ и построить ее график.