

**ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА**

**Дифференциальное
исчисление**

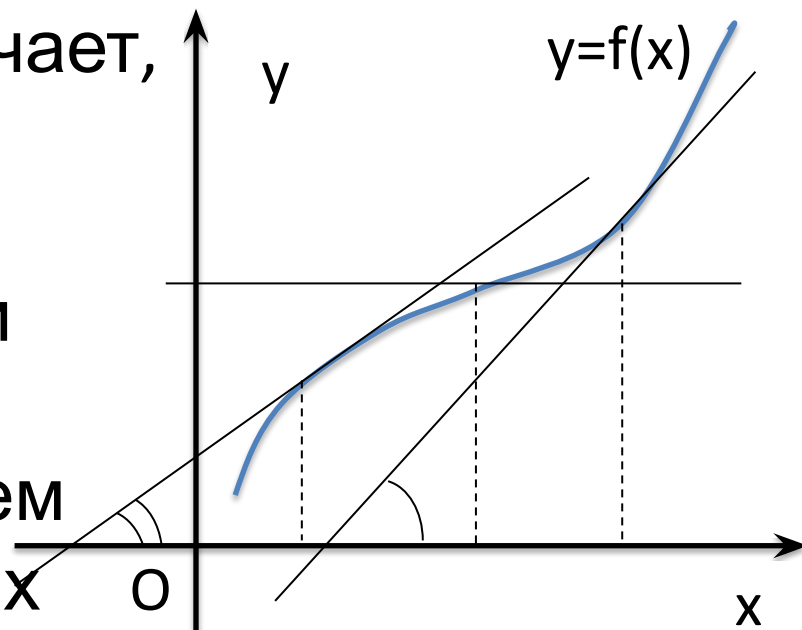
§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

2.1. Возрастание и убывание функций

Теорема (необходимые условия возрастания и убывания функции).

Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $x \in (a;b)$.

Геометрически теорема означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках



Теорема (достаточные условия возрастания и убывания функции).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Пример

1) Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на возрастание и убывание;

2) Исследовать функцию $f(x) = x - \ln x$ на возрастание и убывание;

3) Исследовать функцию $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$ на возрастание и убывание

2.2. Максимум и минимум

функций

► Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $y=f(x)$, если существует такая

δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

► Точка x_0 называется **точкой минимума**

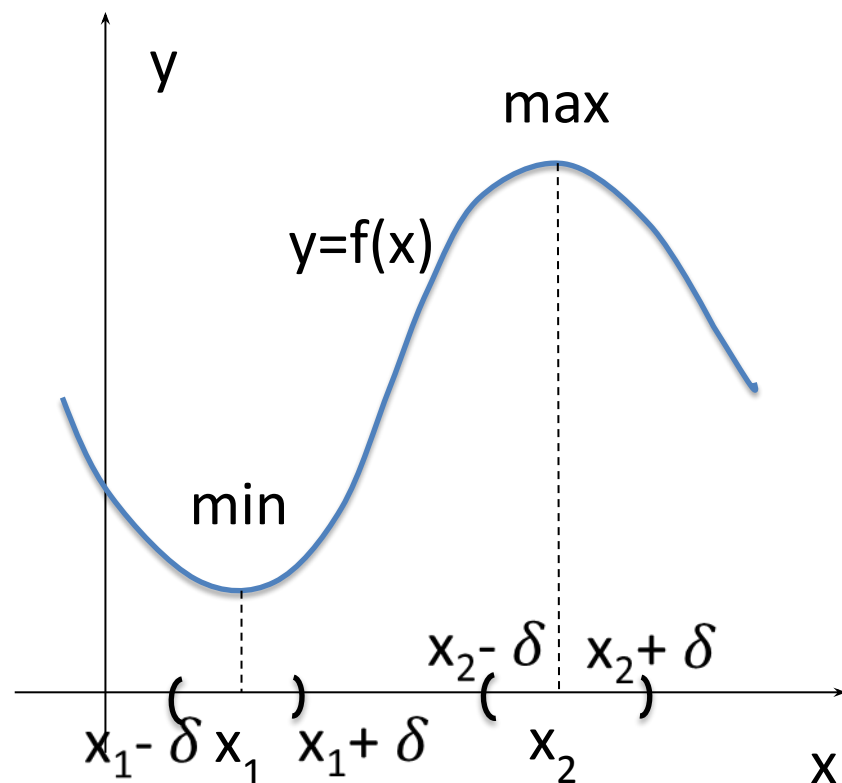
функции, если $\exists \delta > 0$

$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$f(x) > f(x_0)$.

► Значение функции в точке максимума (минимума) называется

экстремумом функции.

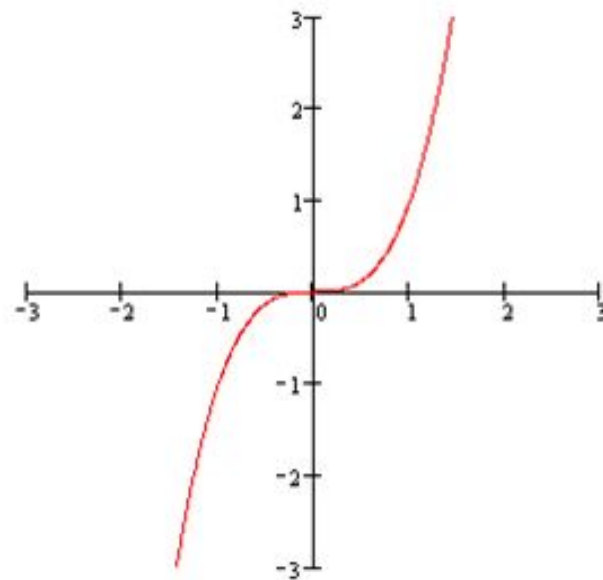
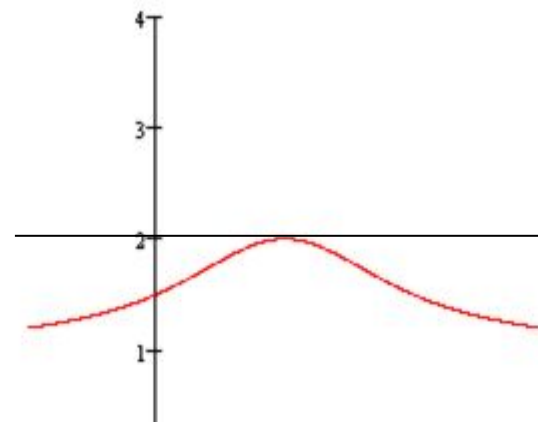


Теорема (необходимое условие экстремума функции)

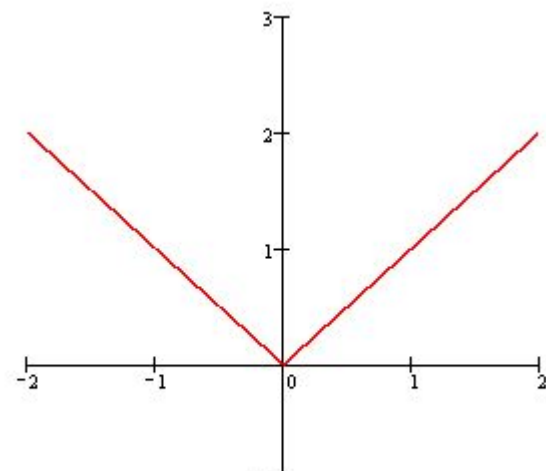
Дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0)=0$

Геометрически равенство $f'(x_0)=0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y=f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox .

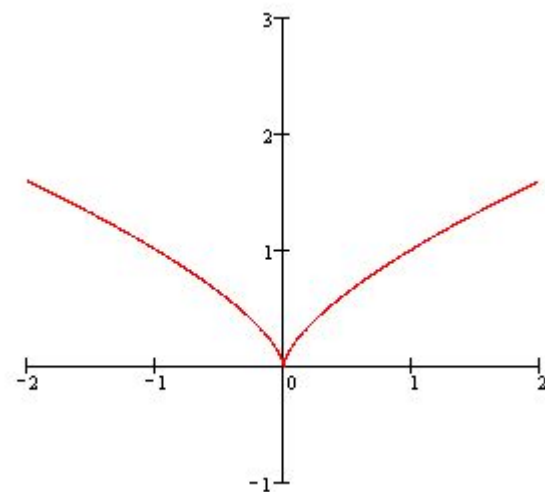
ЗАМЕЧАНИЕ
1) Обратная теорема неверна, т.е. если $f'(x_0)=0$, то это не значит, что x_0 - точка экстремума.



2) Непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x=0$ производной не имеет, но точка $x=0$ — точка минимума.



3) Непрерывная функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x=0$ производная не существует, но точка $x = 0$ — точка минимума.



Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует.

► Такие точки называются

Теорема (достаточное условие экстремума функции)

Если непрерывная функция $y=f(x)$

дифференцируема в некоторой δ -окрестности

критической точки x_0 и при переходе через нее

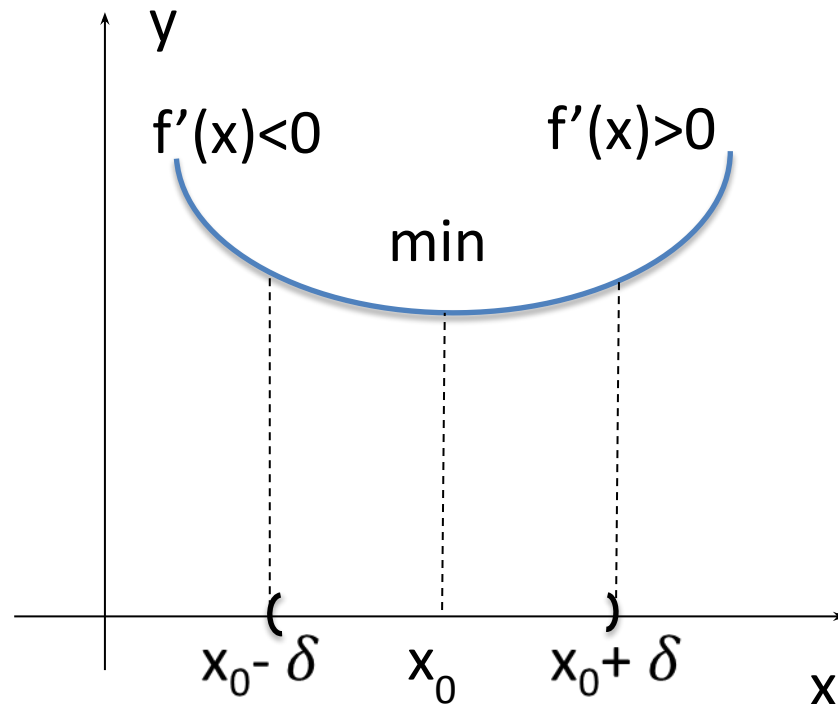
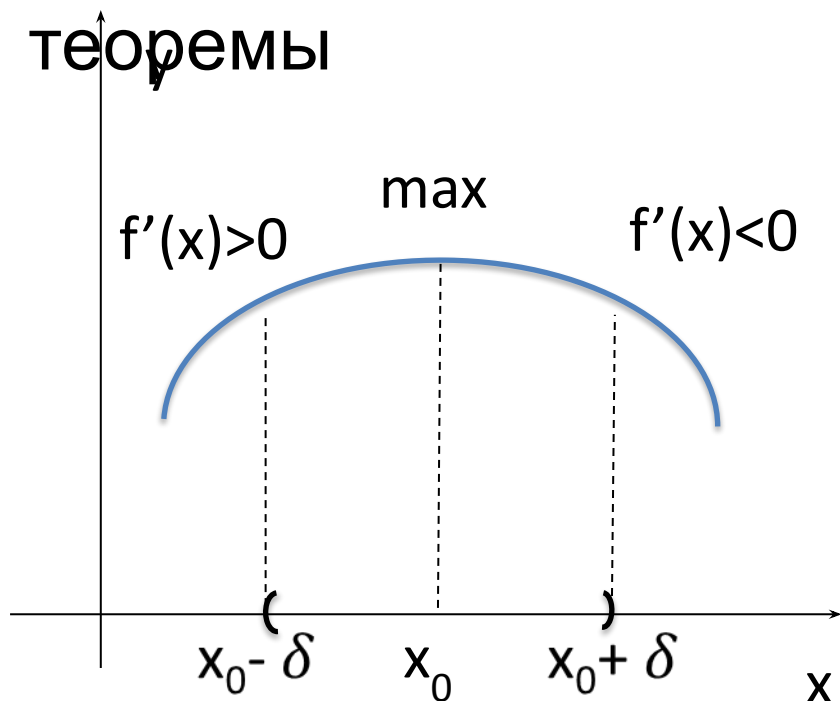
(слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с

плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с

минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

Графическая интерпретация доказательства

теоремы



Пример

1) Найти экстремум функции $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$;

2) Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$;

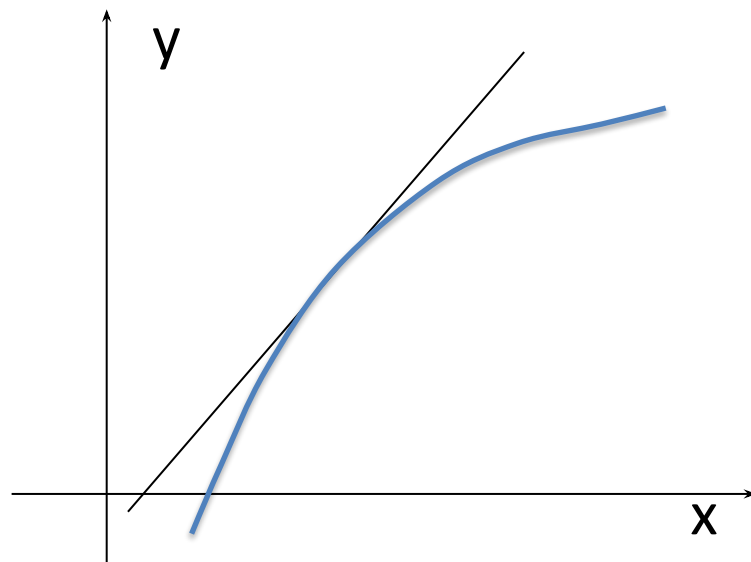
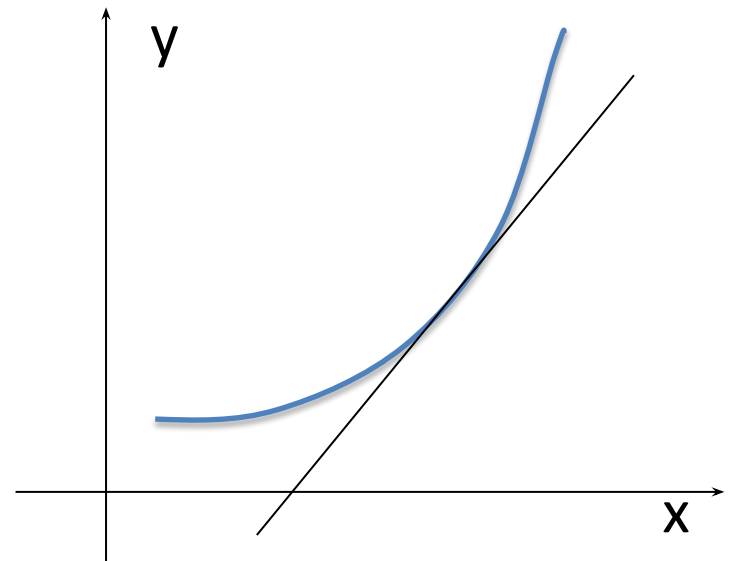
3)) Найти экстремум функции $y = x \cdot e^x$.

2.3. Выпуклость графика функции. Точки

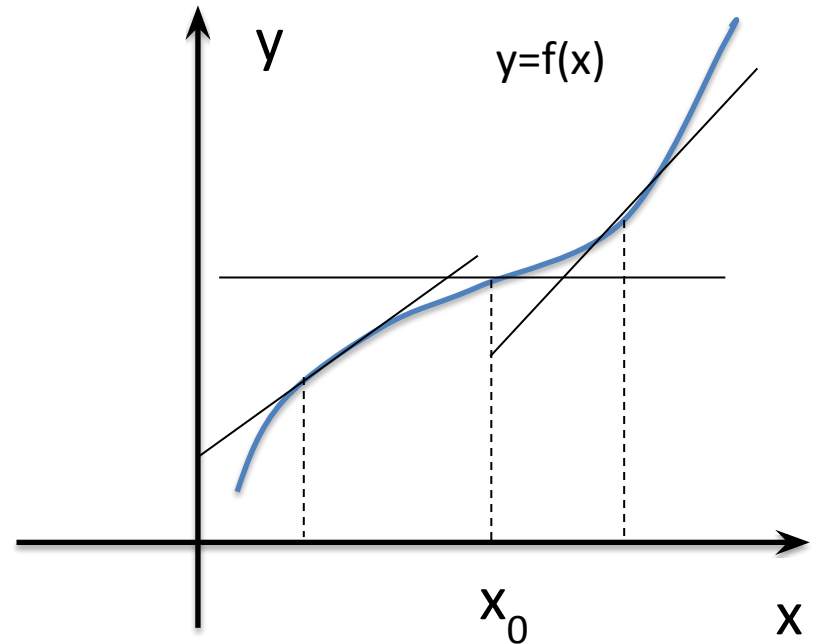
перегиба

► График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется **выпуклым вниз** на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом

интервале.
► График функции $y=f(x)$ называется **выпуклым вверх** на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.



► Точкой перегиба графика непрерывной функции $y=f(x)$ называется точка x_0 в которой выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз или наоборот.



Теорема. Если функция $y=f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ $x \in (a;b)$ — график выпуклый вниз.

Теорема (необходимое условие существования точек перегиба). Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет точку перегиба, то ее вторая производная в этой точке равна нулю: $f''(x_0)=0$.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 , в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пример

1) Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

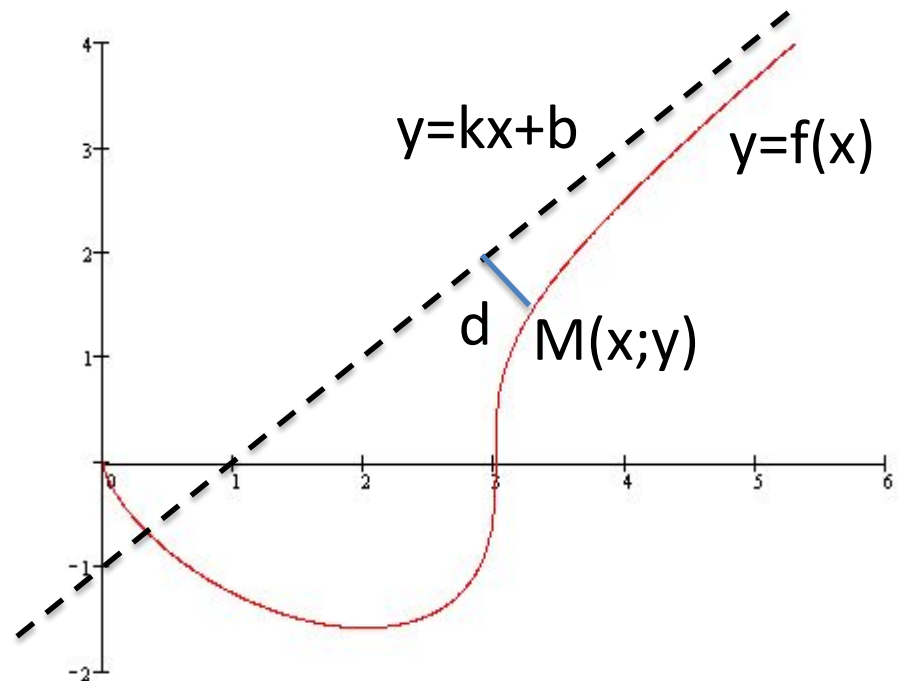
2) Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x \cdot e^x$.

3) Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = \frac{x-1}{x^5}$.

2.4. Асимптоты графика

функции
▶ **Асимптотой** графика функции $y=f(x)$ называется прямая $y=kx+b$, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой .

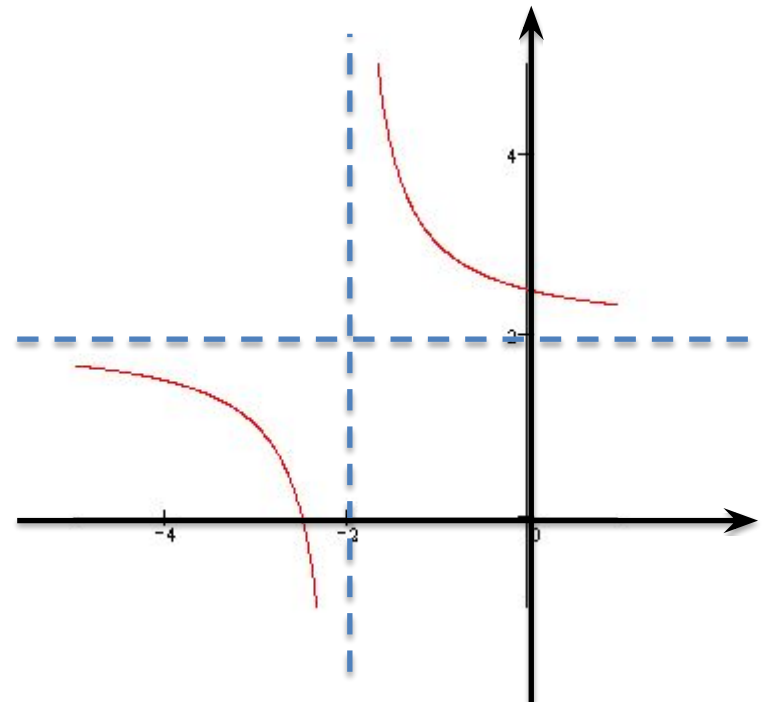
Асимптоты могут быть
вертикальными,
наклонными и
горизонтальными.



Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой этой точки) и **хотя бы один** из пределов функции $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \pm\infty$.

Тогда прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$.

Вертикальные асимптоты $x = a$ следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения.

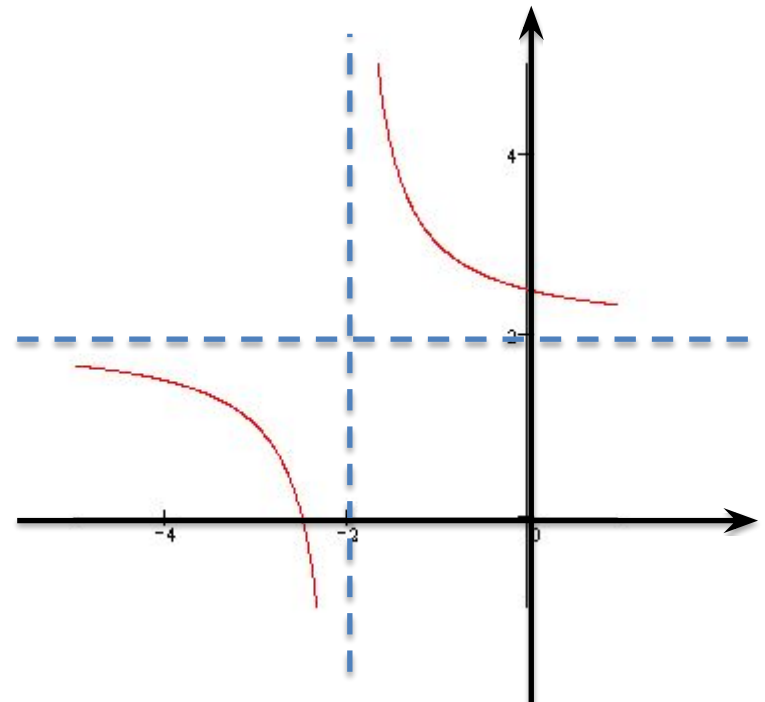


Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Тогда прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$.

Замечани

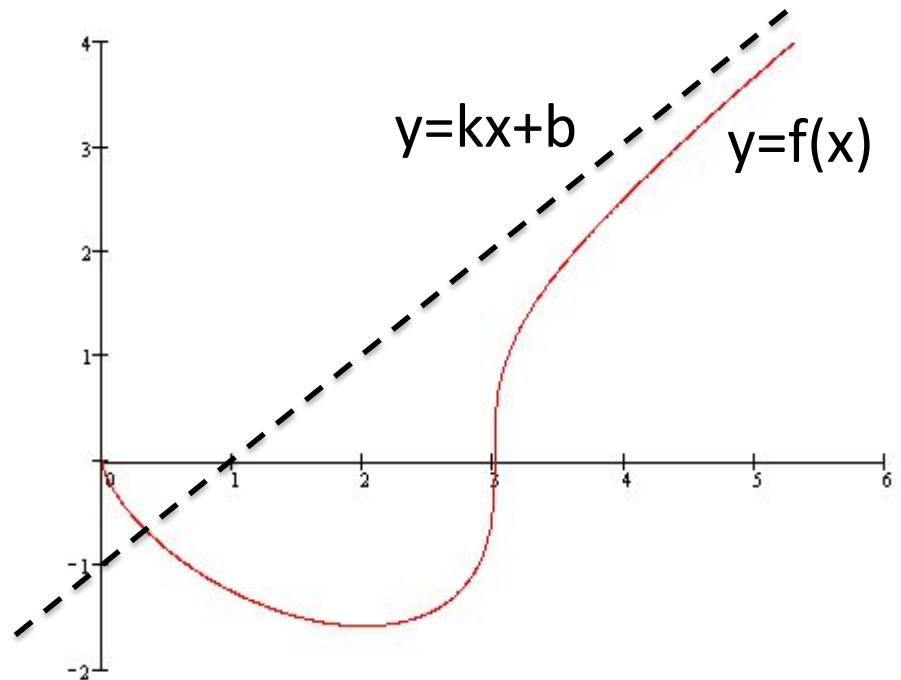
е.

Если конечен один из пределов $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, то функция имеет лишь левостороннюю или правостороннюю горизонтальную асимптоту.



Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы функции $\mathbf{k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ и $\mathbf{b} = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$. Тогда прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$.

Замечание 1. Наклонная асимптота, так же, как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.



Замечание 2. Если хотя бы один из пределов $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ или $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$ не существует или равен бесконечности, то кривая $y=f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

Замечание 3. Асимптоты графика функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$ следует отдельно рассматривать случай, когда $x \rightarrow +\infty$ и когда $x \rightarrow -\infty$.

Примеры:

1) Найти асимптоты графика функции $y =$

$x e^x$.

2) Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

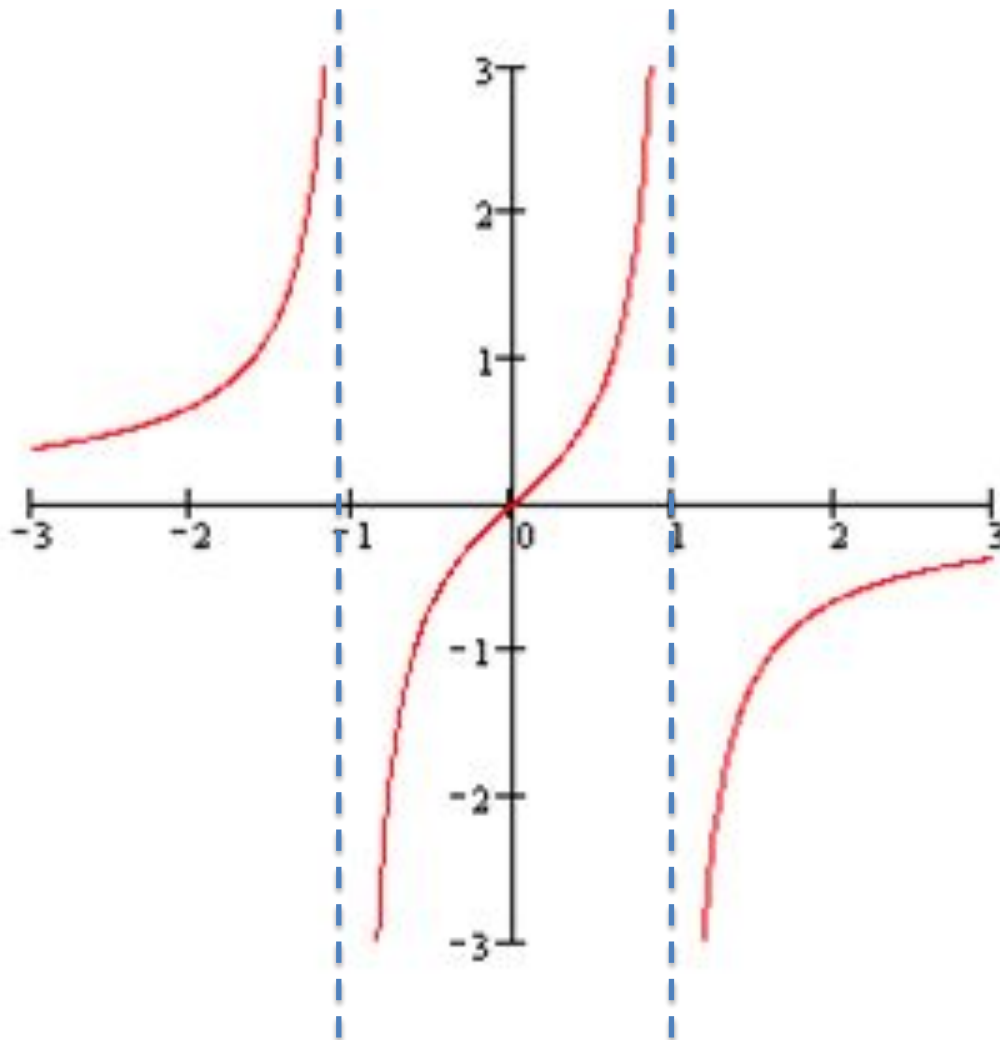
2.5. Общая схема исследования функции

и построения графика

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Примеры:

1) Исследовать функцию $y = \frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.



2) Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ и построить ее график.

