Фазовое пространство и фазовая плоскость

Универсальных методов исследования нелинейных систем нет. Наиболее распространёнными методами интегрирования нелинейных уравнений являются метод фазового пространства (фазовой плоскости) и метод гармонической линеаризации.

Метод фазового пространства основан на графическом представлении движения системы.

Фазовое пространство – пространство, каждой точке которого однозначно соответствует определённое состояние системы.

Параметры, характеризующие состояние системы, называются параметрами состояния.

Система n-го порядка характеризуется n параметрами состояния, то есть, её поведение должно отображаться в n- мерном пространстве.

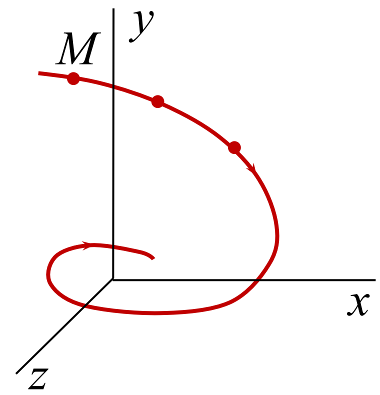
В трёхмерном пространстве можно оценить свойства систем третьего порядка.

Текущая точка $\boldsymbol{M}$, соответствующая состоянию системы в момент времени $\boldsymbol{t}$, называется ***изображающей точкой***.

С течением времени координаты системы меняются, в связи с чем меняются координаты изображающей точки.

Движение изображающей описывает в пространстве кривую, называемую ***фазовой траекторией***.

По виду фазовых траекторий можно судить о свойствах нелинейной системы.



Наибольшее распространение способ получил при исследовании нелинейных систем второго порядка. Метод фазового пространства при этом становится методом ***фазовой плоскости.***

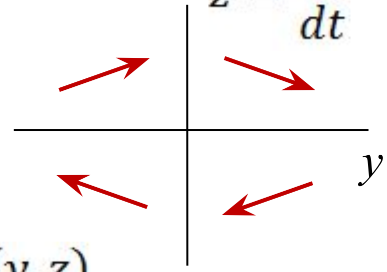
В качестве параметров состояния используют выходную величину ***y*** (по оси абсцисс) и её производную по времени $z = \dfrac{dy}{dt}$ (по оси ординат).

Как правило, исследуется свободное движение нелинейной системы:

система выводится из состояния равновесия (задаются начальные условия), затем воздействие снимается. Правая часть дифференциального уравнения равна нулю, так как внешних воздействий (задающего и возмущающих) нет.

Дифференциальное уравнение второго порядка представляется двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$z = \frac{dy}{dt}$$



Уравнение фазовой траектории получается исключением времени ***t*** из этих уравнений (делением второго на первое): $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{F(y,z)}{z}.$

*В верхней полуплоскости фазовые траектории направлены слева направо, так как при увеличении **y** её производная по времени **z** > 0. В нижней полуплоскости фазовые траектории направлены справа налево, так как при уменьшении **y** **z** < 0.*

*Ось **y** пересекается фазовыми траекториями под прямым углом, так как здесь скорость изменения **y** равна нулю.*

Изображение переходных процессов на фазовой плоскости

Рассмотрим, как изображаются переходные процессы на фазовой плоскости.

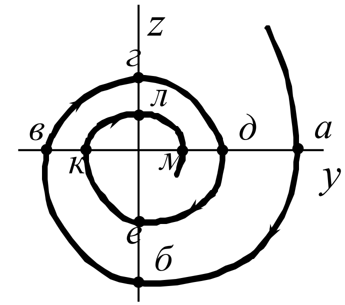
Предположим, переходной процесс – затухающие колебания.

Построим кривую $z = \frac{dy}{dt}$. *В точке* ***а*** *Z =* **?**

То же в точках ***в, д, к, м****.*

В точках ***б, г, е, л*** *Z*

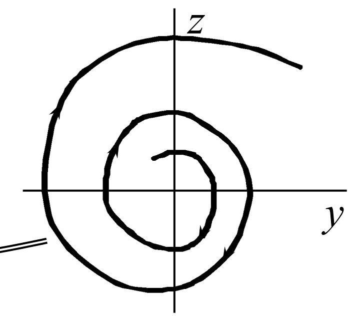
Кривая *Z* показана штриховой линией.



Нанесём эти точки на фазовую плоскость

Это фазовая траектория.

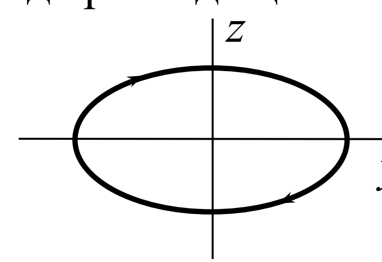
Проделаем то же для расходящихся колебаний (неустойчивая система).
Кривая $z = f(t)$ показана штриховой линией.
Фазовая траектория имеет вид



Вывод: затухающие колебания на фазовой плоскости изображаются в виде сходящихся спиральных кривых;

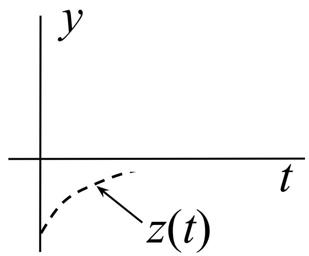
расходящиеся колебания на фазовой плоскости изображаются в виде расходящихся спиральных кривых.

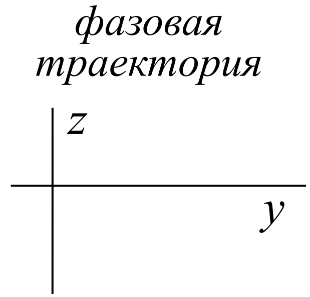
Незатухающий колебательный процесс изобразится в виде **?**
замкнутой кривой. За один период колебаний изображающая переместится по всему контуру фазовой траектории.



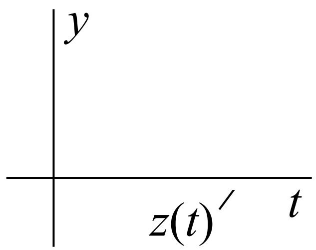
Если переходные процессы монотонные:

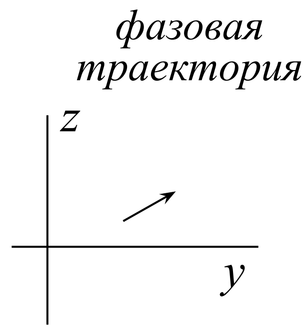
1) устойчивый:





2) неустойчивый:





По виду фазовых траекторий можно определить устойчивость системы и характер переходных процессов.

Переход от фазовых траекторий к временн***ы***м характеристикам осуществляется по специальным методикам.

Недостатком исследования систем методом фазовой плоскости является то, что этим методом можно исследовать только системы второго порядка.