

# Фазовое пространство и фазовая плоскость

Универсальных методов исследования нелинейных систем нет. Наиболее распространёнными методами интегрирования нелинейных уравнений являются метод фазового пространства (фазовой плоскости) и метод гармонической линеаризации.

Метод фазового пространства основан на графическом представлении движения системы.

*Фазовое пространство – пространство, каждой точке которого однозначно соответствует определённое состояние системы.*

Параметры, характеризующие состояние системы, называются параметрами состояния.

Система  $n$ -го порядка характеризуется  $n$  параметрами состояния, то есть, её поведение должно отображаться в  $n$ - мерном пространстве.

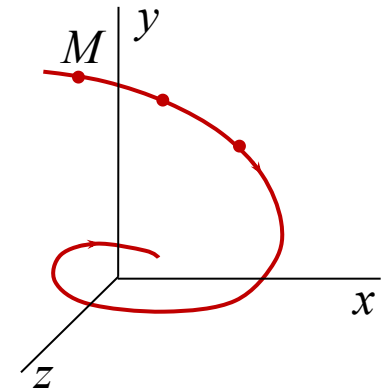
В трёхмерном пространстве можно оценить свойства систем третьего порядка.

Текущая точка  $M$ , соответствующая состоянию системы в момент времени  $t$ , называется *изображающей точкой*.

С течением времени координаты системы меняются, в связи с чем меняются координаты изображающей точки.

Движение изображающей описывает в пространстве кривую, называемую *фазовой траекторией*.

По виду фазовых траекторий можно судить о свойствах нелинейной системы.



Наибольшее распространение способ получил при исследовании нелинейных систем второго порядка. Метод фазового пространства при этом становится методом **фазовой плоскости**.

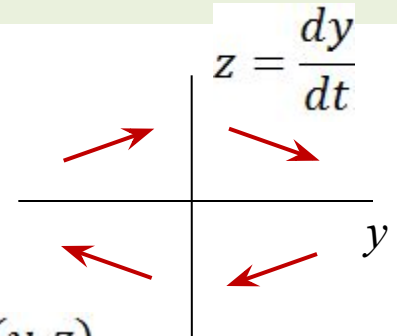
В качестве параметров состояния используют выходную величину  $y$  (по оси абсцисс) и её производную по времени  $z = \frac{dy}{dt}$  (по оси ординат).

Как правило, исследуется свободное движение нелинейной системы:

*система выводится из состояния равновесия (задаются начальные условия), затем воздействие снимается. Правая часть дифференциального уравнения равна нулю, так как внешних воздействий (задающего и возмущающих) нет.*

Дифференциальное уравнение второго порядка представляется двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

Уравнение фазовой траектории получается исключением времени  $t$  из этих уравнений (делением второго на первое): 
$$\frac{dz}{dy} = \frac{F(y, z)}{z}.$$



*В верхней полуплоскости фазовые траектории направлены слева направо, так как при увеличении  $y$  её производная по времени  $z > 0$ . В нижней полуплоскости фазовые траектории направлены справа налево, так как при уменьшении  $y$   $z < 0$ .*

*Ось  $y$  пересекается фазовыми траекториями под прямым углом, так как здесь скорость изменения  $y$  равна нулю.*

# Изображение переходных процессов на фазовой

## ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим, как изображаются переходные процессы на фазовой плоскости.

Предположим, переходной процесс – затухающие колебания.

Построим кривую  $z = \frac{dy}{dt}$ . В точке **a**  $Z = ?$

То же в точках **в, д, к, м**.

В точках **б, г, е, л**  $Z$

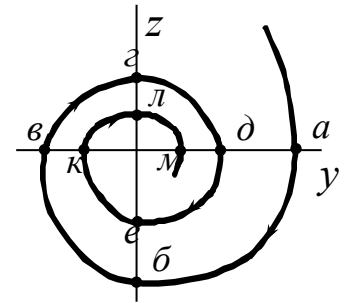
Кривая  $Z$  показана штриховой линией.

Нанесём эти точки на фазовую плоскость

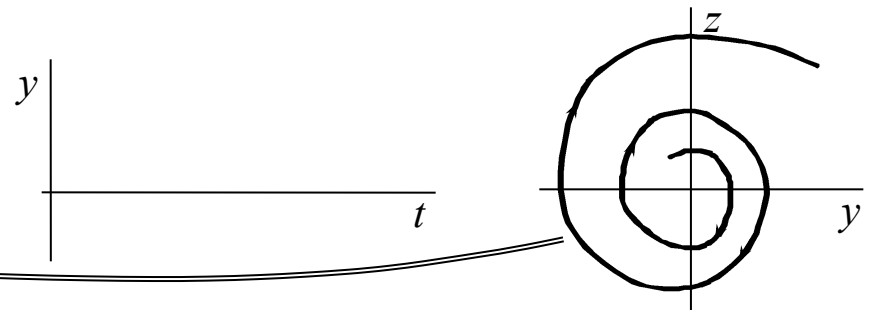
Проделаем то же для расходящихся колебаний (неустойчивая система).

Кривая  $z = f(t)$  показана штриховой линией.

Фазовая траектория имеет вид



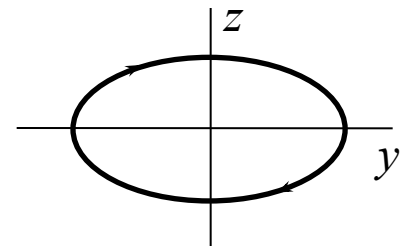
Это фазовая траектория.



**Вывод:** затухающие колебания на фазовой плоскости изображаются в виде сходящихся спиральных кривых;

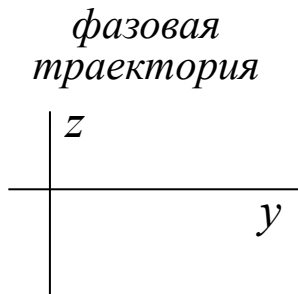
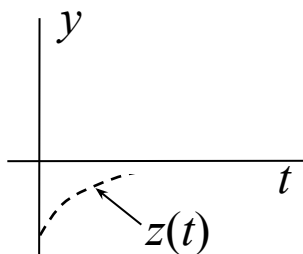
расходящиеся колебания на фазовой плоскости изображаются в виде расходящихся спиральных кривых.

Незатухающий колебательный процесс изобразится в виде ? замкнутой кривой. За один период колебаний изображающая переместится по всему контуру фазовой траектории.

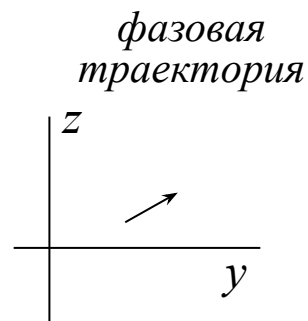
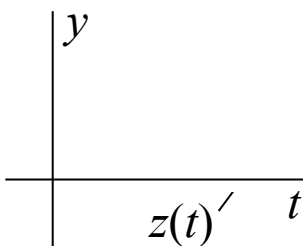


Если переходные процессы монотонные:

1) устойчивый:



2) неустойчивый:



По виду фазовых траекторий можно определить устойчивость системы и характер переходных процессов.

Переход от фазовых траекторий к временным характеристикам осуществляется по специальным методикам.

Недостатком исследования систем методом фазовой плоскости является то, что этим методом можно исследовать только системы второго порядка.