Фазовые портреты. Особые точки

Свойства нелинейных систем, как правило, определяют по их свободному движению: задаются начальными условиями и по фазовым траекториям судят о виде переходных процессов.

При задании различных начальных условий на фазовой плоскости получается совокупность фазовых траекторий, которая называется **фазовым портретом**.

Фазовые портреты позволяют представить все возможные формы переходных процессов в системе при любых начальных условиях.

Особыми точками называются точки равновесного состояния системы. В этих точках движение прекращается, то есть, где $z = \frac{dy}{dt} = 0$ и $\frac{dz}{dt} = 0.$

Фазовые портреты линейных систем

1. Рассмотрим консервативное звено второго порядка, описывающееся уравнением

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

какой?

При различных начальных условиях колебания будут иметь разные амплитуды.

Для вывода уравнений фазовых траекторий представим исходное уравнение второго порядка в виде двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z; \\ T_2^2 \dfrac{dz}{dt} + y = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z; \\ \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{y}{T_2^2}. \end{cases}$$

Для исключения времени разделим второе уравнение системы на первое: $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{y}{T_2^2 z}$.

Разделим переменные: $zdz = -\dfrac{1}{T_2^2} ydy.$

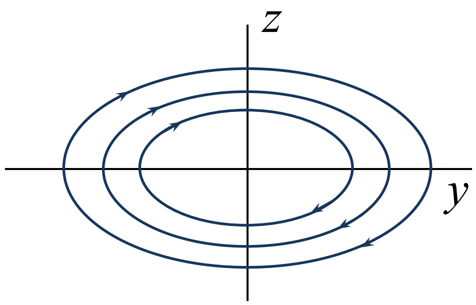
Проинтегрировав уравнение, получим $\dfrac{z^2}{2} = -\dfrac{y^2}{2T_2^2} + C,$ или $\dfrac{z^2}{2} + \dfrac{y^2}{2T_2^2} = C,$

где С – постоянная интегрирования (начальные условия).

Последнее уравнение можно записать как $\dfrac{z^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ Это уравнение ?

Полученное уравнение есть уравнение фазовых траекторий рассматриваемой системы.

Задаваясь различными начальными условиями, получим фазовый портрет системы.

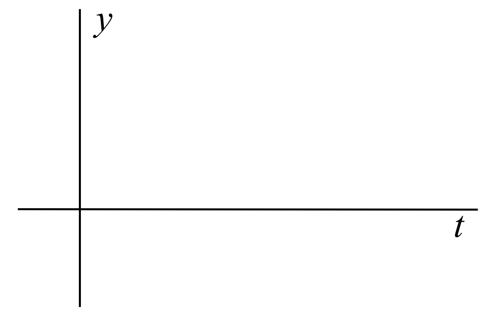


Здесь одна точка равновесного состояния – начало координат.

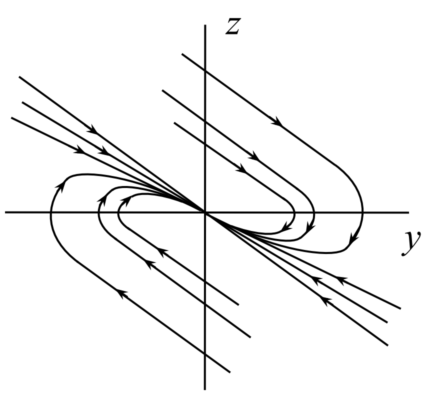
Это особая точка **типа центр**.

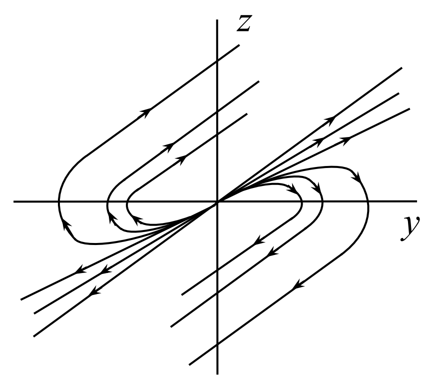
2. Апериодическое звено второго порядка ($T_1 \geq 2T_2$):

Переходной процесс:



Проведя аналогичные предыдущему примеру преобразования, получим фазовые портреты следующих видов:





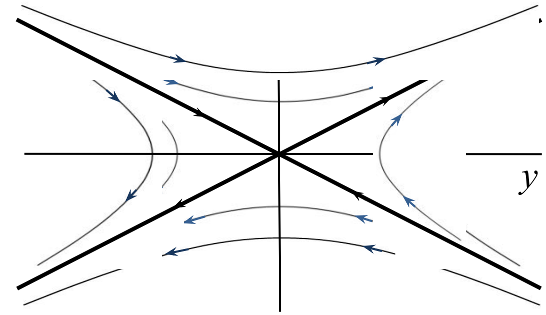
Точки равновесного состояния в обоих случаях в начале координат.

Это особые точки типа

устойчивый узел; **неустойчивый узел.**

Если переходной процесс следующего характера, фазовый портрет имеет вид

Здесь особая точка типа **седло** (в начале координат).



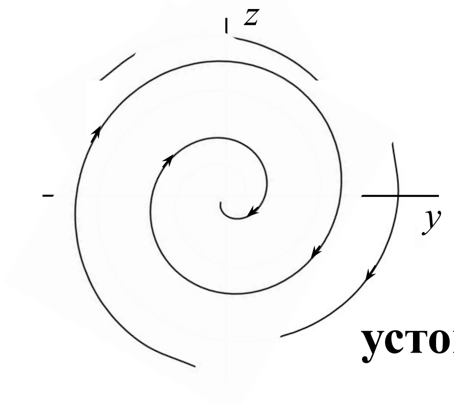
3. Колебательное звено ($T_1 < 2T_2$).

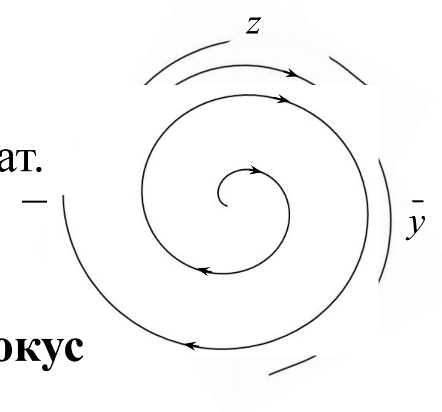
Переходной процесс:

устойчивое звено;

неустойчивое звено.

Фазовые портреты





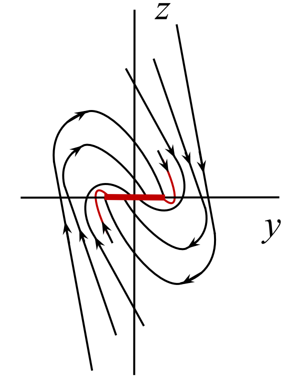
Равновесное состояние в начале координат.

Это особые точки типа

устойчивый фокус | **неустойчивый фокус**

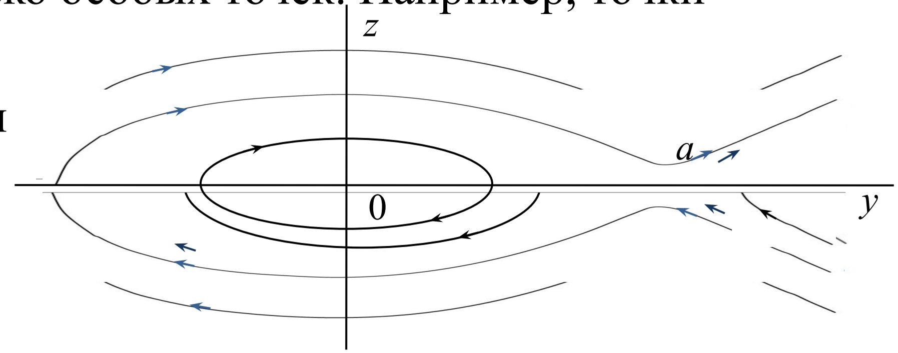
ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

На фазовых портретах нелинейных систем могут быть **особые отрезки** равновесных состояний (выделен).

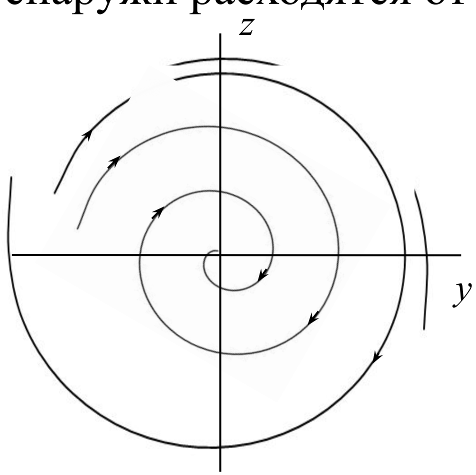


Также может быть несколько особых точек. Например, точки типа центр (0) и седло (*a*).

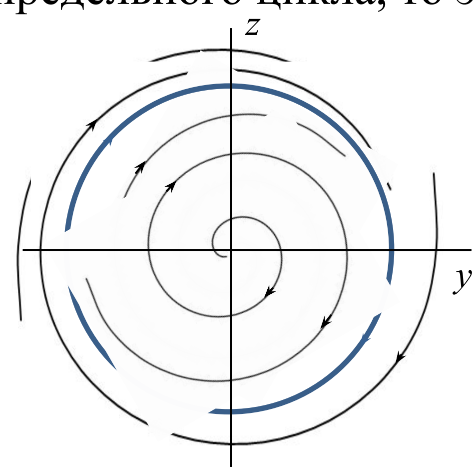
Линия, разделяющая области с разными типами фазовых траекторий, называется ***сепаратриссой*** (выделена).



Важными *особыми кривыми* являются **предельные циклы** – замкнутые кривые, соответствующие периодическим процессам. Если фазовые траектории внутри и снаружи расходятся от предельного цикла, то это **неустойчивый предельный цикл**.



Неустойчивый предельный цикл

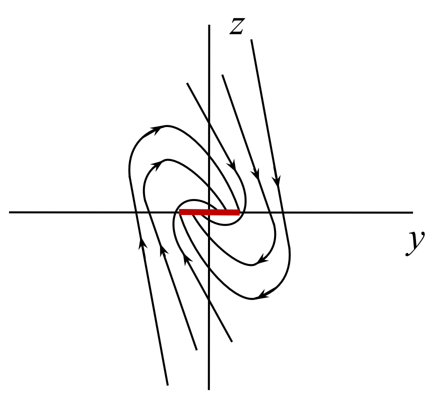


Устойчивый предельный цикл

Если фазовые траектории сходятся к предельному циклу – это **устойчивый предельный цикл**.

Суть устойчивого предельного цикла – **автоколебания**.

Автоколебания – свободные периодические колебания без внешних периодических воздействий.



портрет

а Фазовый

портрет