

# **ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА**

*Тема 2.ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ.*

**Угрозов Валерий  
Вячеславович**

# Потоки платежей

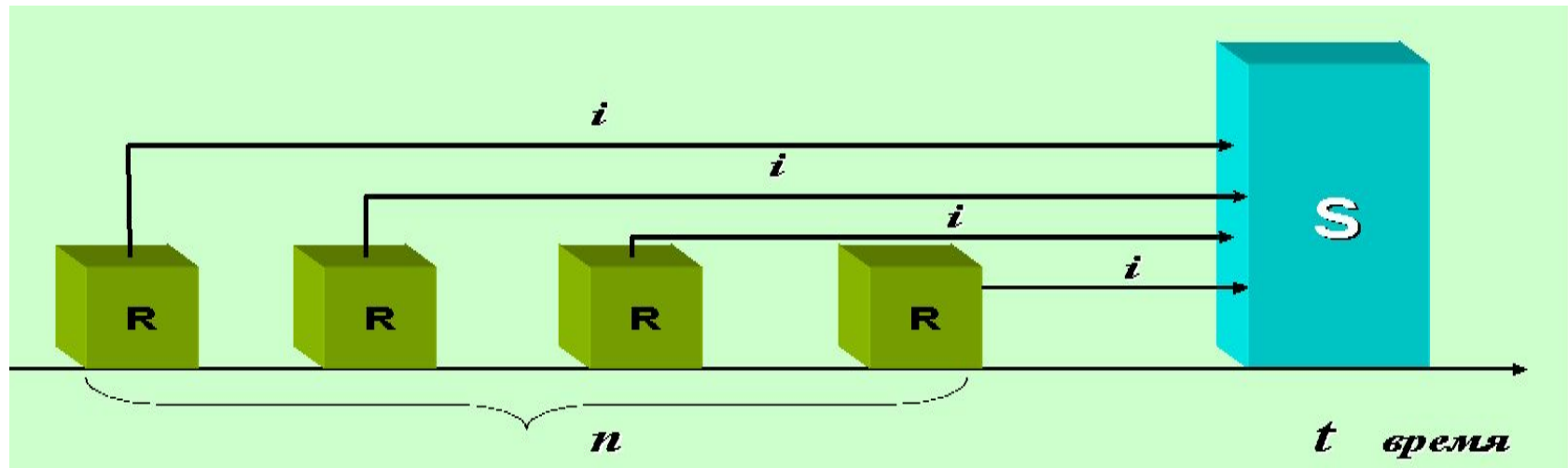
Финансовые контракты могут предусматривать не отдельные разовые платежи, **а серию платежей, распределенных во времени (регулярные выплаты)**. Например, погашение долгосрочного кредита, вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр.

**Поток платежей** представляет собой ряд последовательных выплат и поступлений, причем выплаты выражаются отрицательными величинами, а поступления - положительными.

**Обобщающими характеристиками потока платежей** являются наращенная сумма-  $S$  и современная величина-  $A$

# Наращенная сумма потока платежей

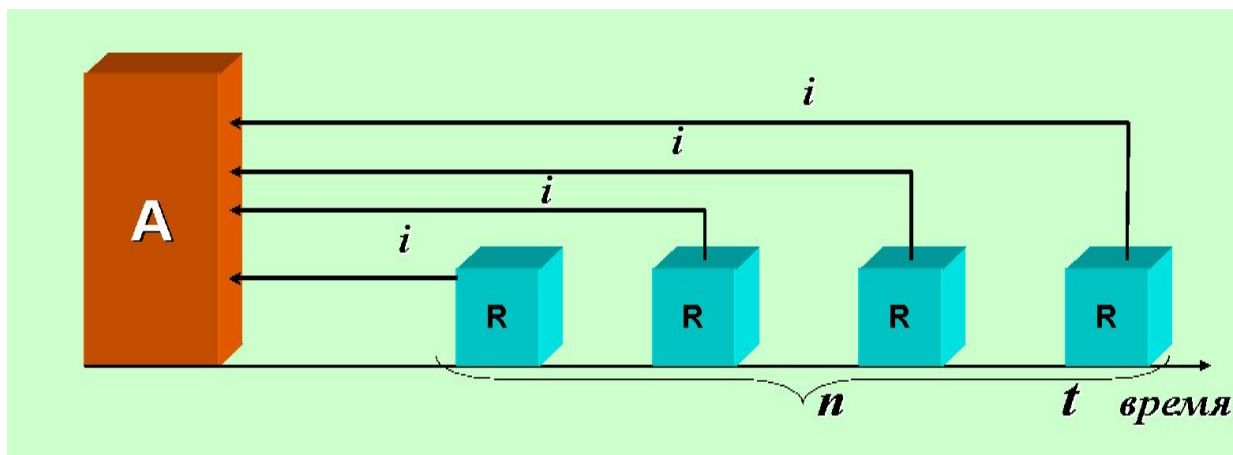
- **Наращенная сумма потока платежей ( $S$ )** - это сумма всех членов последовательности платежей  $R$  с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Логика финансовых операций по определению величины наращенной суммы потока платежей -  $S$  отражена на рис. 3.1. В качестве  $S$  может выступать итоговый размер создаваемого инвестиционного или какого-либо другого фонда или общая сумма задолженности.



- Рис. 3.1. Схема формирования наращенной суммы  $S$  потока

# Современная величина потока платежей

- **Современная величина потока платежей ( $A$ )** - сумма всех его членов  $R$ , дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающих с началом потока платежей или предшествующих ему. Логiku финансовых операций по определению современной суммы  $A$  величины потока платежей легко понять из рис.3.2. Современная величина  $A$  может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки и пр.



- Рис. 3.2. Схема дисконтирования потока платежей (получения их современной суммы  $A$ )

# Основные параметры финансовой ренты

- **Финансовой рентой** (или **аннуитетом**) называют поток платежей, **все члены которого положительные величины**, а **временные интервалы постоянны**.
- Финансовая рента имеет следующие параметры:
  - - **член ренты ( $R$ )** – величина каждого отдельного платежа,
  - - **период ренты** – временной интервал между двумя соседними платежами,
  - - **срок ренты ( $n$ )** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода,
  - - **процентная ставка ( $i$ )** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

# Виды финансовых рент.

- **1) От продолжительности периода ренты:**
- **годовые** – ренты выплачиваются один раз в год ( $p = 1$ ),
- **p-срочные** – выплата рент производится  $p$  раз в год ( $p > 1$ ) равными платежами  $R$ .
- **2) По числу начислений процентов -  $m$  :**
- **с начислением один раз в год** ( $m = 1$ ),
- **с начислением  $m$  раз в год** ( $m > 1$ ),
- **ренты с непрерывным начислением.**
- **3) По величине членов различают:**
- **постоянные** имеют равные члены, когда величина каждого платежа остается неизменной во времени ( $R = const$ );
- **переменные ренты** – размер платежей может быть произвольным ( $R = var$ ) или изменяться по какому-либо математическому закону.
- **4) По вероятности выплаты членов :**
- **верные ренты** подлежат безусловной выплате, например при погашении кредита;
- **условные ренты** - выплата зависит от наступления некоторого случайного события. Число ее членов заранее неизвестно.

- **5) По числу членов :**  
*ограниченные* - с конечным и заранее известным числом членов ;  
*бесконечные* (вечные) – число членов ренты заранее неизвестно. Например, выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.
- **6) В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту:**  
*немедленные* – начало действия контракта начинается сразу после его подписания,  
*отложенные или отсроченные* – начало действия КОНТРАКТА сдвигается на более поздние сроки.
- **7) По моменту выплаты платежей выделяется два вида рент:**  
*обычные (постнумерандо)* - платежи осуществляются в конце каждого периода (наиболее часто встречаются);  
*авансовые (пренумерандо)* - выплаты производятся в начале каждого периода.



# Формулы наращенной суммы $S$ для финансовых рент

- **Обычная годовая рента.** Пусть в конце каждого года в течение  $n$  лет на расчетный счет вносится по  $R$  рублей, сложные проценты начисляются один раз в год по ставке  $i$ . В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины  $R(1+i)^{n-1}$ , так как на сумму  $R$  проценты начислялись в течение  $(n-1)$  года. Второй взнос увеличится до  $R(1+i)^{n-2}$  и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии:  $S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+\dots+R(1+i)^{n-1}$ , в которой первый член равен  $R$ , знаменатель  $(1+i)$ , число членов  $n$ . Отсюда:

- $$S = R \cdot s_{n;i} , \quad (3.1)$$

- где  $s_{n;i} = [(1+i)^n - 1]/i$  - **коэффициент наращенной ренты.**  $S$  зависит от срока ренты  $n$  и уровня процентной ставки  $i$ .

**Пример 3.1.** В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые 1 раз в год начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10%. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано:  $n = 3$  года,  $R = 10\,000\,000$  руб.,  $m = 1$ ,  $i = 0,10$ . Найти  $S = ?$

- ***Решение***

Вычисления производится по формуле для обычной годовой ренты по формуле (3.1)

$$S = 10\,000\,000 * [(1 + 0,1)^3 - 1] / 0,1 = 33\,100\,000,00 \text{ руб.}$$

# Годовая рента с начислением процентов $m$ раз в году.

- Платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют  $m$  раз в году, то каждый раз применяется ставка  $j/m$ , где  $j$  - номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид:  $R(1 + j/m)^{m \cdot (n-1)}$ ,  $R(1 + j/m)^{m \cdot (n-2)}$ , ...,  $R$ . Если читать последнюю формулу справа налево, то можно увидеть геометрическую прогрессию, у которой  $R$  - первый член,  $(1 + j/m)^m$  - знаменатель и  $n$  - число членов. Сумма членов этой прогрессии представляет собой наращенную сумму ренты:

- $S = R [(1 + j/m)^{m \cdot n} - 1] / [(1 + j/m)^m - 1]$  (3.2)

**Пример 3.2.** В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые ежеквартально ( $m = 4$ ) начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано:  $n = 3$  года,  $m = 4$ ,  $R = 10\,000\,000$  руб.,

- $j = 0,10$ . Найти  $S = ?$

- **Решение.**

- Вычисления производится по формуле (3.2) для годовой ренты с начислением

процентов 4 раза в году : 
$$S = 10\,000\,000 * [(1 + 0,1/4)^{(3*4)} - 1] / [(1 + 0,1/4)^4 - 1] = 33\,222\,157,88 \text{ руб.}$$

# **Рента $p$ - срочная, с начислением процентов один раз в год ( $m = 1$ ).**

- **Рента выплачивается  $p$  раз в году равными платежами, проценты начисляются один раз в конце года  $m=1$ .** Пусть  $R$  - годовая сумма платежей, тогда  $R/p$  - размер отдельного платежа.
- Последовательность платежей с начисленными до конца срока-  $n$  процентами- $i$  представляет собой геометрическую прогрессию вида:  $R/p \cdot (1+i)^{n-1/p}$   $R/p \cdot (1+i)^{n-2/p}$ , ...,  $R/p$ .  
Наращенная сумма такой ренты-  $S$  будет равна сумме членов этой геометрической прогрессии, записанной в обратном порядке, у которой  $R/p$  - первый член,  $(1+i)/p$  знаменатель,  $n \cdot p$  - общее число членов, а сама  $S$  равна

$$S = R \cdot s_{n;i}^{(p)}, \quad (3.3)$$

- где  $s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$  - коэффициент наращенной  $p$ -срочной ренты при  $m = 1$ .

**Пример 3.3.** В течение 3-х лет на расчетный счет в **конце каждого квартала** поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал), на которые **в конце каждого года начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых**. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано:  $n = 3$  года,  $m = 4$ ,  $R = 10\,000\,000$  руб.,  
 $p = 4$ ,  $i = 0,10$ .
- Найти  $S = ?$

• ***Решение***

***Вычисления проведем по формуле (3.3):***

- $S = (10\,000\,000/4) * [(1+0,1)^3 - 1] / [(1+0,1)^{1/4} - 1]$   
 $= 34\,316\,60,35$  руб.

**Рента  $p$  - срочная, когда число платежей совпадает с начислением процентов ( $p = m$ ).**

- Воспользуемся аналогией с годовой рентой и однократным начислением процентов в конце года, для которой

- $$S = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i} .$$

- Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год, тогда получаем:

$$S = R \frac{(1 + j/m)^{m \cdot n} - 1}{j} \quad (3.4)$$

**Пример 3.4.** В течение 3 лет на расчетный счет в **конце каждого квартала** поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые **ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых**. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано:  $n = 3$  года,  $p = m = 4$ ,  $R = 10\,000\,000$  руб.,
- $j = 0,10$ .
- Найти  $S = ?$

• **Решение.** Вычисления

произведем по формуле (3.4):

- $$S = 10\,000\,000 * [(1 + 0,1/4)^{(3 \times 4)} - 1] / 0,1 = 34\,488\,882,42 \text{ руб.}$$



**Рента  $p$  - срочная, с произвольным поступлением платежей  $p \geq 1$ , и произвольным начислением процентов  $m \geq 1$  (общий случай).**

- Первый член ренты  $R/p$ , уплаченный спустя  $1/p$  года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами  $s_1 = R/p * (1 + j/m)^{m * (n - 1/p)}$ . Второй член ренты к концу срока возрастет до  $s_2 = R/p * (1 + j/m)^{m * (n - 2/p)}$  и т.д. Последний член этой геометрической прогрессии равен  $R/p$ , ее знаменатель  $(1 + j/m)^{m/p}$ , число членов  $n * m$ . Соответственно наращенная сумма рассчитывается по формуле:

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_{np} = \frac{R}{p} \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} \quad (3.5)$$

**Пример 3.5.** В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи ( $p=4$ ) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые ежемесячно ( $m=12$ ) начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано:  $n = 3$  года,  $m = 12$ ,  $R = 10\,000\,000$  руб.,
- $p = 4$ ,  $j = 0,10$ . Найти  $S = ?$

• **Решение.**

- Вычисляя по формуле (3.5) находим:
- $S = (10\,000\,000/4) * [(1+0,10/4)^{(3*4)} - 1] / [(1+0,10/4)^{(12/4)} - 1] = 34\,529\,637,96$  руб.

# Определение величины отдельного платежа простой ренты - $R$ .

- **I. Известна величина наращенной суммы- $S$  , а также процентная ставка  $i$  количество выплат  $n$ .**
- **Величина отдельного платежа-  $R$  по схеме постнумерандо.**

$$(3.6) \quad R_{no} = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

- **Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо**

$$(3.7) \quad R_{np} = \frac{S \cdot i}{(1+i) \cdot ((1+i)^n - 1)}$$

Пример 3.6. Через 3 года на расчетном счете необходимо иметь 10 млн руб. Определить размер **ежегодных платежей** : а) в *конце года* (*постнумерандо*); в) в начале года - *пренумерандо* по сложной процентной ставке 12% годовых.

• Дано:  $n = 3$  года,  $S = 10\,000\,000$  руб.,  $i = 0,12$  .

• Найти  $R_{по}$  и  $R_{пр} = ?$

• **Решение.**

• а) Вычисляя по формуле (3.6) находим:

$$R_{по} = 10\,000\,000 * 0,12 / [(1 + 0,12)^3 - 1] = \mathbf{2\,963\,489,81}$$

руб.

• в) Вычисляя по формуле (3.7) находим:

$$R_{пр} = (10\,000\,000 * 0,12) / [(1 + 0,12)((1 + 0,12)^3 - 1)] = \mathbf{2\,645\,973,04}$$

руб.

## II-й случай. Определение величины отдельного платежа простой ренты при известной современной стоимости $A$ .

- Известна современная стоимость-  $A$ , процентная ставка-  $i$ , количество выплат-  $n$ .
- **Величина отдельного платежа по схеме постнумерандо.**

$$(3.8) \quad R_{no} = \frac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n}$$

- **Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо**

$$(3.9) \quad R_{np} = \frac{Ai}{(1+i)(1 - 1/(1+i)^n)}$$

**Пример 3.7.** Предприниматель взял кредит в размере *10 млн руб.* сроком на 3 года под 14% годовых. Рассчитать размер **ежегодных погасительных платежей**, если они будут выплачиваться а) *в конце года* ; б) *в начале года*

- Дано:  $n = 3$  года,  $A = 10\,000\,000$  руб.,  $i = 0,14$  .
- Найти  $R_a$  и  $R_b = ?$
- **Решение.**
- а) Вычисляя по формуле (3.8) находим:  
 $R_a = (10\,000\,000 * 0,14) / [1 - 1 / (1 + 0,14)^3] = 4\,307\,314,80$  руб.
- б) Вычисляя по формуле (3.9) находим:
- $R = (10\,000\,000 * 0,14) / [(1 + 0,14)(1 - 1 / (1 + 0,14)^3)] = 3\,778\,346,32$  руб.

# Определение срока простой ренты - n

- I-й случай. Известна наращенная сумма- $S$ , процентная ставка- $i$ , отдельный платеж - $R$
- Срок простой ренты при платежах по *постнумерандо*.

$$n = \frac{\ln(1 + S \cdot i / R)}{\ln(1 + i)} \quad (3.10)$$

- Срок простой ренты при платежах по *пренумерандо*.

(3.11)

$$n = \ln\left(1 + \frac{S \cdot i}{R \cdot (1 + i)}\right) / \ln(1 + i)$$

**Пример 3.8.** На момент окончания финансового соглашения заемщик должен выплатить 30 000 000 руб. Платежи размером 5 000 000 руб. поступают ежегодно в конце года, с начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты а) *постнумерандо*; в) *пренумерандо*

- Дано:  $R = 5\,000\,000$  руб.,  $S = 30\,000\,000$  руб.,
- $i = 0,15$ . Найти  $na$  и  $nb = ?$  **Решение.**
- а) По формуле (3.10) находим:
- $na = \ln(1 + 30\,000\,000 * 0,15 / 5\,000\,000) / \ln(1 + 0,15) = 4,59$  года.
- в) По формуле (3.11) находим:  
 $nb = \ln(1 + 30\,000\,000 * 0,15 / (5\,000\,000 * (1 + 0,15))) / \ln(1 + 0,15) = 4,14$  года.



## 2-й случай. Определение срока простой ренты $n$ при известной современной стоимости ренты $A$

- Известна современная стоимость-  $A$ , *отдельный платеж ренты* –  $R$ , процентная ставка-  $i$ .
- Определение срока простой ренты при платежах по *постнумерандо*:

$$n = - \frac{\ln(1 - \frac{Ai}{R})}{\ln(1 + i)} \quad (3.12)$$

- Определение срока простой ренты при платежах по *пренумерандо*

$$(3.13) \quad n = -\ln\left(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}\right) / \ln(1 + i)$$

**Пример 3.9.** Организация взяла кредит в размере 30 000 000 руб. с условием погашения ежегодными платежами по 6 000 000 руб. и начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты при погашении:  
а) в конце года (*постнумерандо*); б) в начале года (*пренумерандо*)

- Дано:  $A = 30\,000\,000$  руб.,  $R = 6\,000\,000$  руб.,
- $i = 0,15$ . Найти  $na$  и  $nb = ?$

• **Решение.**

- а) Вычисляя по формуле (3.12) находим:

$$n = -\ln(1 - 30\,000\,000 \cdot 0,15 / 6\,000\,000) / \ln(1 + 0,15) = \mathbf{9,92 \text{ года.}}$$

- а) Вычисляя по формуле (3.13) находим

$$n = -\ln(1 - 30\,000\,000 \cdot 0,15 / (6\,000\,000 \cdot (1 + 0,15))) / \ln(1 + 0,15) = \mathbf{7,56 \text{ года.}}$$

## Современная величина $A$ обычной годовой финансовой ренты.

Если член годовой ренты равен  $R$ , процентная ставка  $i$ , срок ренты  $n$  и проценты начисляются один раз в конце года. Тогда  $a_1, a_2, \dots, a_n$  - приведенные к началу ренты величины первого, второго и т.д. платежей :

$$a_1 = R \frac{1}{1+i} = Rv; a_2 = R \frac{1}{(1+i)^2} = Rv^2; \dots; a_n = R \frac{1}{(1+i)^n} = Rv^n$$

где  $v = \frac{1}{1+i}$  - дисконтный множитель.

Приведенные величины  $a_1, a_2, \dots, a_n$  образуют геометрическую прогрессию, сумма которой равна  $A$ :

$$A = \sum_{k=1}^n a_k = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}$$

где  $a_{n;i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  - коэффициент приведения ренты.

**Пример 3.10.** В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года ( $p = 1$ ) поступает по 10 млн руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной процентной ставке в 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано:  $n = 3$  года,  $m = 1$ ,  $R = 10\,000\,000$  руб,
- $p = 1$ ,  $j = 0,10$ . Найти  $A = ?$
- **Решение.**
- Вычисляя по формуле (3.14) получим :
- $A = 10\,000\,000 * [1 - (1 + 0,1)^{-3}] / 0,1 = 24\,868\,519,91$  руб.

**Современная величина  $p$ -срочной  
финансовой ренты с произвольными  
значениями  $p \geq 1$  и  $m \geq 1$ .**

- Формула (3.15) является общей для нахождения современной величины ренты, когда  $p$  и  $m$  могут принимать произвольные значения

$$A = R \frac{1 - \left( \frac{1 + j/m}{(3.15)} \right)^{-m \cdot n}}{p \left[ (1 + j/m)^{m/p} - 1 \right]}$$

**Пример 3.11.** В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи ( $p=4$ ) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал). Ежемесячное дисконтирование ( $m=12$ ) производится по сложной ставке 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано:  $n = 3$  года,  $m = 12$ ,  $R = 10\,000\,000$  руб.,  $p = 4$ ,
- $j = 0,10$ . Найти  $S = ?$

• **Решение**

- Вычисляя по формуле (1.37) получим:
- $A = (10\,000\,000/4) * [1 - (1 + 0,1/12)^{(-3*12)}] / [(1 + 0,1/12)^{(12/4)} - 1] = 25\,612\,003,42$  руб.

## 1.3.5. Определение величины процентной ставки простой ренты

- При заключении финансовых сделок важно знать их доходность, которая определяется процентной ставкой ренты за один период начисления. При этом считается, что известны следующие значения: отдельный платеж  $R$ , срок займа  $n$  и наращенная сумма  $S$  (или современная стоимость  $A$ ). В Excel данная задача решается с помощью финансовой функции СТАВКА.