

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 2.ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ.

**Угрозов Валерий
Вячеславович**

Потоки платежей

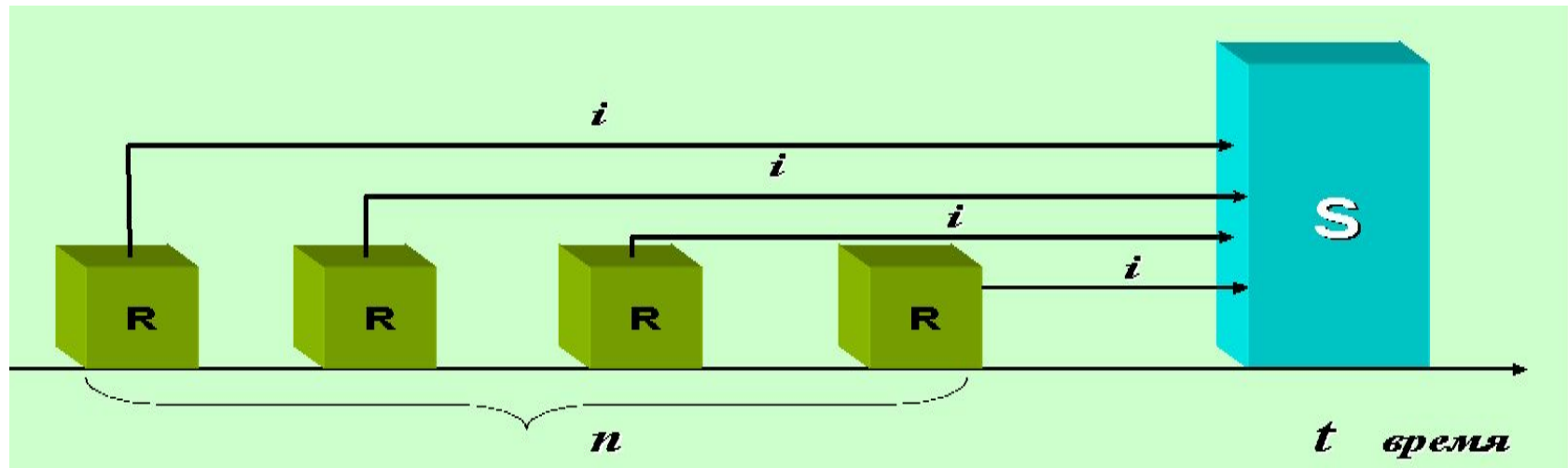
Финансовые контракты могут предусматривать не отдельные разовые платежи, **а серию платежей, распределенных во времени (регулярные выплаты)**. Например, погашение долгосрочного кредита, вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр.

Поток платежей представляет собой ряд последовательных выплат и поступлений, причем выплаты выражаются отрицательными величинами, а поступления - положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма- S и современная величина- A

Наращенная сумма потока платежей

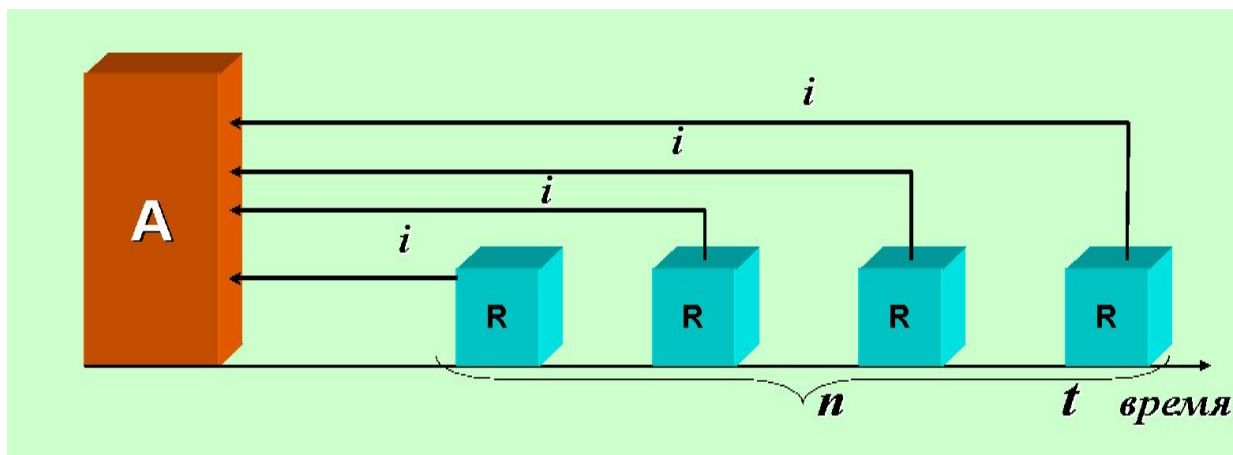
- **Наращенная сумма потока платежей (S)** - это сумма всех членов последовательности платежей R с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Логика финансовых операций по определению величины наращенной суммы потока платежей - S отражена на рис. 3.1. В качестве S может выступать итоговый размер создаваемого инвестиционного или какого-либо другого фонда или общая сумма задолженности.



- Рис. 3.1. Схема формирования наращенной суммы S потока

Современная величина потока платежей

- **Современная величина потока платежей (A)** - сумма всех его членов R , дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающих с началом потока платежей или предшествующих ему. Логику финансовых операций по определению современной суммы A величины потока платежей легко понять из рис.3.2. Современная величина A может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки и пр.



- Рис. 3.2. Схема дисконтирования потока платежей (получения их современной суммы A)

Основные параметры финансовой ренты

- **Финансовой рентой** (или **аннуитетом**) называют поток платежей, **все члены которого положительные величины**, а **временные интервалы постоянны**.
- Финансовая рента имеет следующие параметры:
 - - **член ренты (R)** – величина каждого отдельного платежа,
 - - **период ренты** – временной интервал между двумя соседними платежами,
 - - **срок ренты (n)** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода,
 - - **процентная ставка (i)** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

Виды финансовых рент.

- **1) От продолжительности периода ренты:**
- **годовые** – ренты выплачиваются один раз в год ($p = 1$),
- **p-срочные** – выплата рент производится p раз в год ($p > 1$) равными платежами R .
- **2) По числу начислений процентов - m :**
- **с начислением один раз в год** ($m = 1$),
- **с начислением m раз в год** ($m > 1$),
- **ренты с непрерывным начислением.**
- **3) По величине членов различают:**
- **постоянные** имеют равные члены, когда величина каждого платежа остается неизменной во времени ($R = const$);
- **переменные ренты** – размер платежей может быть произвольным ($R = var$) или изменяться по какому-либо математическому закону.
- **4) По вероятности выплаты членов :**
- **верные ренты** подлежат безусловной выплате, например при погашении кредита;
- **условные ренты** - выплата зависит от наступления некоторого случайного события. Число ее членов заранее неизвестно.

- **5) По числу членов :**
ограниченные - с конечным и заранее известным числом членов ;
бесконечные (вечные) – число членов ренты заранее неизвестно. Например, выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.
- **6) В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту:**
немедленные – начало действия контракта начинается сразу после его подписания,
отложенные или отсроченные – начало действия КОНТРАКТА сдвигается на более поздние сроки.
- **7) По моменту выплаты платежей выделяется два вида рент:**
обычные (постнумерандо) - платежи осуществляются в конце каждого периода (наиболее часто встречаются);
авансовые (пренумерандо) - выплаты производятся в начале каждого периода.

Формулы наращенной суммы S для финансовых рент

- **Обычная годовая рента.** Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, сложные проценты начисляются один раз в год по ставке i . В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $(n-1)$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии: $S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+\dots+R(1+i)^{n-1}$, в которой первый член равен R , знаменатель $(1+i)$, число членов n . Отсюда:

- $$S = R \cdot s_{n;i} , \quad (3.1)$$

- где $s_{n;i} = [(1+i)^n - 1]/i$ - **коэффициент наращенной ренты.** S зависит от срока ренты n и уровня процентной ставки i .

Пример 3.1. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые 1 раз в год начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10%. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $n = 3$ года, $R = 10\,000\,000$ руб., $m = 1$, $i = 0,10$. Найти $S = ?$

- ***Решение***

Вычисления производится по формуле для обычной годовой ренты по формуле (3.1)

$$S = 10\,000\,000 * [(1 + 0,1)^3 - 1] / 0,1 = 33\,100\,000,00 \text{ руб.}$$

Годовая рента с начислением процентов m раз в году.

- Платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году, то каждый раз применяется ставка j/m , где j - номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид: $R(1 + j/m)^{m \cdot (n-1)}$, $R(1 + j/m)^{m \cdot (n-2)}$, ..., R . Если читать последнюю формулу справа налево, то можно увидеть геометрическую прогрессию, у которой R - первый член, $(1 + j/m)^m$ - знаменатель и n - число членов. Сумма членов этой прогрессии представляет собой наращенную сумму ренты:

- $S = R [(1 + j/m)^{m \cdot n} - 1] / [(1 + j/m)^m - 1]$ (3.2)

Пример 3.2. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые ежеквартально ($m = 4$) начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $n = 3$ года, $m = 4$, $R = 10\,000\,000$ руб.,

- $j = 0,10$. Найти $S = ?$

- **Решение.**

- Вычисления производится по формуле (3.2) для годовой ренты с начислением

процентов 4 раза в году :
$$S = 10\,000\,000 * [(1 + 0,1/4)^{(3*4)} - 1] / [(1 + 0,1/4)^4 - 1] = 33\,222\,157,88 \text{ руб.}$$

Рента p - срочная, с начислением процентов один раз в год ($m = 1$).

- **Рента выплачивается p раз в году равными платежами, проценты начисляются один раз в конце года $m=1$.** Пусть R - годовая сумма платежей, тогда R/p - размер отдельного платежа.
- Последовательность платежей с начисленными до конца срока- n процентами- i представляет собой геометрическую прогрессию вида: $R/p \cdot (1+i)^{n-1/p}$ $R/p \cdot (1+i)^{n-2/p}$, ..., R/p .
Наращенная сумма такой ренты- S будет равна сумме членов этой геометрической прогрессии, записанной в обратном порядке, у которой R/p - первый член, $(1+i)/p$ знаменатель, $n \cdot p$ - общее число членов, а сама S равна

$$S = R \cdot s_{n;i}^{(p)}, \quad (3.3)$$

- где $s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$ - коэффициент наращенной срочной ренты при $m = 1$.

Пример 3.3. В течение 3-х лет на расчетный счет в **конце каждого квартала** поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал), на которые **в конце каждого года начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых**. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $n = 3$ года, $m = 4$, $R = 10\,000\,000$ руб.,
 $p = 4$, $i = 0,10$.
- Найти $S = ?$

• **Решение**

Вычисления проведем по формуле (3.3):

- $$S = (10\,000\,000/4) * [(1+0,1)^3 - 1] / [(1+0,1)^{1/4} - 1]$$
$$= 34\,316\,60,35 \text{ руб.}$$

Рента p - срочная, когда число платежей совпадает с начислением процентов ($p = m$).

- Воспользуемся аналогией с годовой рентой и однократным начислением процентов в конце года, для которой

- $$S = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i} .$$

- Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год, тогда получаем:

$$S = R \frac{(1 + j/m)^{m \cdot n} - 1}{j} \quad (3.4)$$

Пример 3.4. В течение 3 лет на расчетный счет в **конце каждого квартала** поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые **ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых**. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $n = 3$ года, $p = m = 4$, $R = 10\,000\,000$ руб.,
- $j = 0,10$.
- Найти $S = ?$

• **Решение.** Вычисления

произведем по формуле (3.4):

- $$S = 10\,000\,000 * [(1 + 0,1/4)^{(3 \times 4)} - 1] / 0,1 = 34\,488\,882,42 \text{ руб.}$$

Рента p - срочная, с произвольным поступлением платежей $p \geq 1$, и произвольным начислением процентов $m \geq 1$ (общий случай).

- Первый член ренты R/p , уплаченный спустя $1/p$ года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами $s_1 = R/p * (1 + j/m)^{m * (n - 1/p)}$. Второй член ренты к концу срока возрастет до $s_2 = R/p * (1 + j/m)^{m * (n - 2/p)}$ и т.д. Последний член этой геометрической прогрессии равен R/p , ее знаменатель $(1 + j/m)^{m/p}$, число членов $n * m$. Соответственно наращенная сумма рассчитывается по формуле:

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_{np} = \frac{R}{p} \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} \quad (3.5)$$

Пример 3.5. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи ($p=4$) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые ежемесячно ($m=12$) начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $n = 3$ года, $m = 12$, $R = 10\,000\,000$ руб.,
- $p = 4$, $j = 0,10$. Найти $S = ?$

• **Решение.**

- Вычисляя по формуле (3.5) находим:
- $S = (10\,000\,000/4) * [(1+0,10/4)^{(3*4)} - 1] / [(1+0,10/4)^{(12/4)} - 1] = 34\,529\,637,96$ руб.

Определение величины отдельного платежа простой ренты - R .

- **I. Известна величина наращенной суммы- S , а также процентная ставка i количество выплат n .**
- **Величина отдельного платежа- R по схеме постнумерандо.**

$$(3.6) \quad R_{no} = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

- **Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо**

$$(3.7) \quad R_{np} = \frac{S \cdot i}{(1+i) \cdot ((1+i)^n - 1)}$$

Пример 3.6. Через 3 года на расчетном счете необходимо иметь 10 млн руб. Определить размер **ежегодных платежей** : а) в *конце года* (*постнумерандо*); в) в начале года - *пренумерандо* по сложной процентной ставке 12% годовых.

- Дано: $n = 3$ года, $S = 10\,000\,000$ руб., $i = 0,12$.

- Найти $R_{по}$ и $R_{пр} = ?$

- **Решение.**

- а) Вычисляя по формуле (3.6) находим:

$$R_{по} = 10\,000\,000 * 0,12 / [(1 + 0,12)^3 - 1] = \mathbf{2\,963\,489,81}$$

руб.

- в) Вычисляя по формуле (3.7) находим:

$$R_{пр} = (10\,000\,000 * 0,12) / [(1 + 0,12)((1 + 0,12)^3 - 1)] = \mathbf{2\,645\,973,04}$$

руб.

II-й случай. Определение величины отдельного платежа простой ренты при известной современной стоимости A .

- Известна современная стоимость- A , процентная ставка- i , количество выплат- n .
- **Величина отдельного платежа по схеме постнумерандо.**

$$(3.8) \quad R_{no} = \frac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n}$$

- **Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо**

$$(3.9) \quad R_{np} = \frac{Ai}{(1+i)(1 - 1/(1+i)^n)}$$

Пример 3.7. Предприниматель взял кредит в размере *10 млн руб.* сроком на 3 года под 14% годовых. Рассчитать размер **ежегодных погасительных платежей**, если они будут выплачиваться а) *в конце года* ; б) *в начале года*

- Дано: $n = 3$ года, $A = 10\,000\,000$ руб., $i = 0,14$.
- Найти R_a и $R_b = ?$
- **Решение.**
- а) Вычисляя по формуле (3.8) находим:
 $R_a = (10\,000\,000 * 0,14) / [1 - 1 / (1 + 0,14)^3] = 4\,307\,314,80$ руб.
- б) Вычисляя по формуле (3.9) находим:
- $R = (10\,000\,000 * 0,14) / [(1 + 0,14)(1 - 1 / (1 + 0,14)^3)] = 3\,778\,346,32$ руб.

Определение срока простой ренты - n

- I-й случай. Известна наращенная сумма- S , процентная ставка- i , отдельный платеж - R
- Срок простой ренты при платежах по *постнумерандо*.

$$n = \frac{\ln(1 + S \cdot i / R)}{\ln(1 + i)} \quad (3.10)$$

- Срок простой ренты при платежах по *пренумерандо*.

(3.11)

$$n = \ln\left(1 + \frac{S \cdot i}{R \cdot (1 + i)}\right) / \ln(1 + i)$$

Пример 3.8. На момент окончания финансового соглашения заемщик должен выплатить 30 000 000 руб. Платежи размером 5 000 000 руб. поступают ежегодно в конце года, с начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты а) *постнумерандо*; в) *пренумерандо*

- Дано: $R = 5\,000\,000$ руб., $S = 30\,000\,000$ руб.,
- $i = 0,15$. Найти na и $nb = ?$ **Решение.**
- а) По формуле (3.10) находим:
- $na = \ln(1 + 30\,000\,000 * 0,15 / 5\,000\,000) / \ln(1 + 0,15) = 4,59$ года.
- в) По формуле (3.11) находим:
 $nb = \ln(1 + 30\,000\,000 * 0,15 / (5\,000\,000 * (1 + 0,15))) / \ln(1 + 0,15) = 4,14$ года.

2-й случай. Определение срока простой ренты n при известной современной стоимости ренты A

- Известна современная стоимость- A , *отдельный платеж ренты* – R , процентная ставка- i .
- Определение срока простой ренты при платежах по *постнумерандо*:

$$n = - \frac{\ln(1 - \frac{Ai}{R})}{\ln(1 + i)} \quad (3.12)$$

- Определение срока простой ренты при платежах по *пренумерандо*

$$(3.13) \quad n = -\ln\left(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}\right) / \ln(1 + i)$$

Пример 3.9. Организация взяла кредит в размере 30 000 000 руб. с условием погашения ежегодными платежами по 6 000 000 руб. и начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты при погашении:
а) в конце года (*постнумерандо*); б) в начале года (*пренумерандо*)

- Дано: $A = 30\,000\,000$ руб., $R = 6\,000\,000$ руб.,
- $i = 0,15$. Найти na и $nb = ?$

• **Решение.**

- а) Вычисляя по формуле (3.12) находим:

$$n = -\ln(1 - 30\,000\,000 \cdot 0,15 / 6\,000\,000) / \ln(1 + 0,15) = \mathbf{9,92 \text{ года.}}$$

- а) Вычисляя по формуле (3.13) находим

$$n = -\ln(1 - 30\,000\,000 \cdot 0,15 / (6\,000\,000 \cdot (1 + 0,15))) / \ln(1 + 0,15) = \mathbf{7,56 \text{ года.}}$$

Современная величина A обычной годовой финансовой ренты.

Если член годовой ренты равен R , процентная ставка i , срок ренты n и проценты начисляются один раз в конце года. Тогда a_1, a_2, \dots, a_n - приведенные к началу ренты величины первого, второго и т.д. платежей :

$$a_1 = R \frac{1}{1+i} = Rv; a_2 = R \frac{1}{(1+i)^2} = Rv^2; \dots; a_n = R \frac{1}{(1+i)^n} = Rv^n$$

где $v = \frac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель.

Приведенные величины a_1, a_2, \dots, a_n образуют геометрическую прогрессию, сумма которой равна A :

$$A = \sum_{k=1}^n a_k = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}$$

где $a_{n;i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ - коэффициент приведения ренты.

Пример 3.10. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года ($p = 1$) поступает по 10 млн руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной процентной ставке в 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано: $n = 3$ года, $m = 1$, $R = 10\,000\,000$ руб,
- $p = 1$, $j = 0,10$. Найти $A = ?$
- **Решение.**
- Вычисляя по формуле (3.14) получим :
- $A = 10\,000\,000 * [1 - (1 + 0,1)^{-3}] / 0,1 = 24\,868\,519,91$ руб.

**Современная величина p -срочной
финансовой ренты с произвольными
значениями $p \geq 1$ и $m \geq 1$.**

- Формула (3.15) является общей для нахождения современной величины ренты, когда p и m могут принимать произвольные значения

$$A = R \frac{1 - \left(\frac{1 + j/m}{(3.15)} \right)^{-m \cdot n}}{p \left[(1 + j/m)^{m/p} - 1 \right]}$$

Пример 3.11. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи ($p=4$) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал). Ежемесячное дисконтирование ($m=12$) производится по сложной ставке 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано: $n = 3$ года, $m = 12$, $R = 10\,000\,000$ руб., $p = 4$,
- $j = 0,10$. Найти $S = ?$

• **Решение**

- Вычисляя по формуле (1.37) получим:
- $A = (10\,000\,000/4) * [1 - (1 + 0,1/12)^{(-3*12)}] / [(1 + 0,1/12)^{(12/4)} - 1] = 25\,612\,003,42$ руб.

1.3.5. Определение величины процентной ставки простой ренты

- При заключении финансовых сделок важно знать их доходность, которая определяется процентной ставкой ренты за один период начисления. При этом считается, что известны следующие значения: отдельный платеж R , срок займа n и наращенная сумма S (или современная стоимость A). В Excel данная задача решается с помощью финансовой функции СТАВКА.