ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 2.ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ.

Угрозов Валерий Вячеславович

Потоки платежей

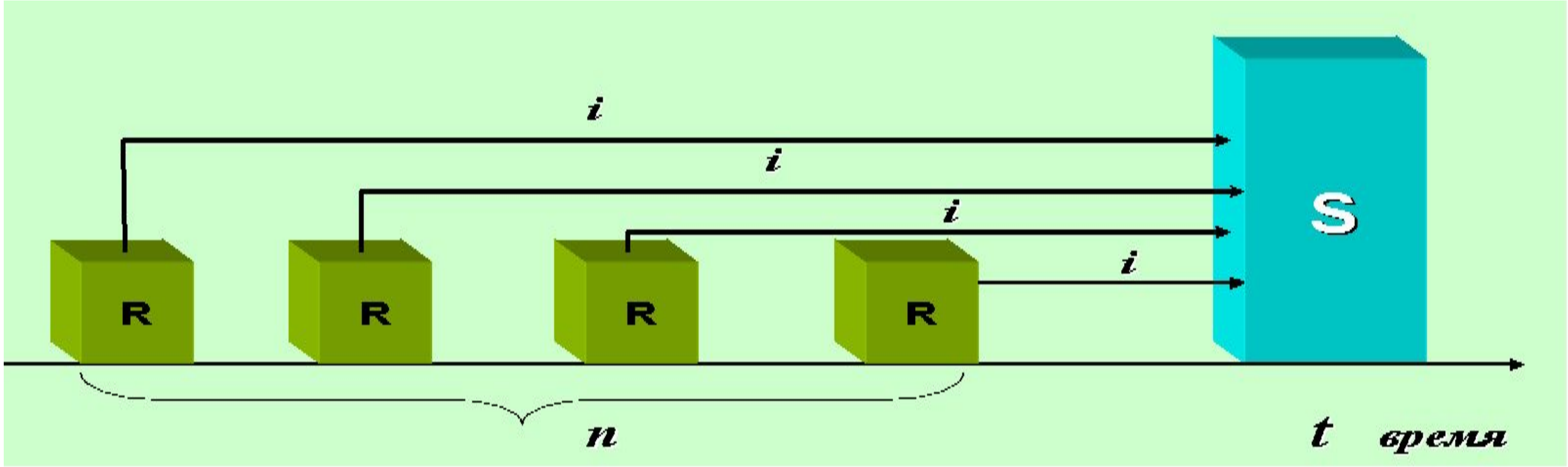
Финансовые контракты могут предусматривать не отдельные разовые платежи, **<u>а серию платежей</u>**, распределенных во времени (регулярные выплаты). Например, погашение долгосрочного кредита, вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр.

<u>Поток платежей</u> представляет собой ряд последовательных выплат и поступлений, причем выплаты выражаются отрицательными величинами, а поступления - положительными.

<u>Обобщающими характеристиками потока платежей</u> **являются наращенная сумма- S и современная величина-A**

Наращенная сумма потока платежей

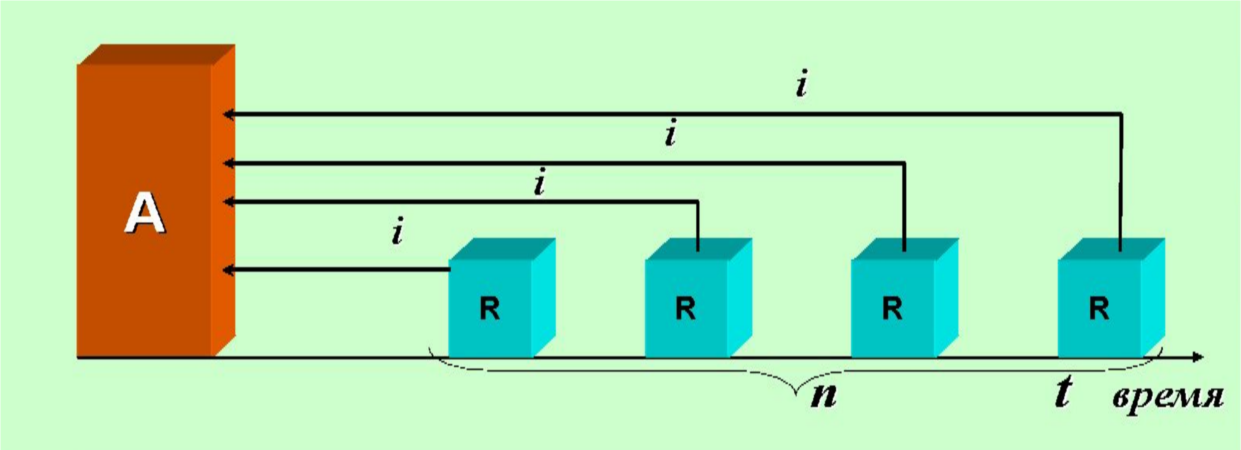
- ***Наращенная сумма потока платежей (S)*** - **это сумма всех членов последовательности платежей *R* с начисленными на них процентами к концу срока ренты.** Логика финансовых операций по определению величины наращенной суммы потока платежей - ***S*** отражена на рис. 3.1. В качестве ***S*** может выступать итоговый размер создаваемого инвестиционного или какого-либо другого фонда или общая сумма задолженности.



- Рис. 3.1. Схема формирования наращенной суммы ***S*** потока

Современная величина потока платежей

- ***Современная величина потока платежей (A) -*** сумма всех его членов ***R***, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающих с началом потока платежей или предшествующих ему. Логику финансовых операций по определению современной суммы ***A*** величины потока платежей легко понять из рис.3.2. Современная величина ***A*** может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки и пр.



- Рис. 3.2. Схема дисконтирования потока платежей (получения их современной суммы ***A***)

Основные параметры финансовой ренты

- ***Финансовой рентой (**или **аннуитетом)*** называют поток платежей, все члены которого положительные величины, а *временные интервалы постоянны.*
- Финансовая рента имеет следующие параметры:
- - ***член ренты (R)*** – величина каждого отдельного платежа,
- - ***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами,
- - ***срок ренты (n)*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода,
- - ***процентная ставка (i)*** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

Виды финансовых рент.

- 1) **От продолжительности периода ренты:**
- ***годовые*** – ренты выплачиваются ***один*** раз в год (***p* = 1**) ,
- ***p-срочные*** – выплата рент производится ***p*** раз в год (***p* > 1**) равными платежами ***R***.
- **2) По числу начислений процентов - *m*** :
- **с начислением *один раз* в год** (***m* = 1**),
- ***с начислением m раз в год*** (***m* > 1**),
- *ренты с* ***непрерывным начислением.***
- **3) По величине членов различают**:
- ***постоянные*** имеют равные члены, когда величина каждого платежа остается неизменной во времени (***R = const***) ;
- ***переменные ренты*** – размер платежей может быть произвольным (***R = var***) или изменяться по какому-либо математическому закону.
- **4) По вероятности выплаты членов** :
- ***верные ренты*** подлежат безусловной выплате, например при погашении кредита;
- ***условные ренты*** - выплата зависит от наступления некоторого случайного события. Число ее членов заранее неизвестно.

- **5)По числу членов :**
  ограниченные - с конечным и заранее известным числом членов ;
  бесконечные (вечные) – число членов ренты заранее неизвестно. Например, выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.
- **6) В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту**:
  немедленные – начало действия контракта начинается сразу после его подписания,
  отложенные или отсроченные – начало действия контракта сдвигается на более поздние сроки.
- **7) По моменту выплаты платежей выделяется два вида рент:**
  обычные **(*постнумерандо*) -** платежи осуществляются в конце каждого периода (наиболее часто встречаются);
  авансовые (***пренумерандо***) - выплаты производятся в начале каждого периода.

Формулы наращенной суммы S для финансовых рент

- ***Обычная годовая рента.*** Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по ***R*** рублей, сложные проценты начисляются один раз в год по ставке ***i***. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $\boldsymbol{R(1+i)^{n-1}}$, так как на сумму ***R*** проценты начислялись в течение (***n*** *-1*) года. Второй взнос увеличится до $\boldsymbol{R(1+i)^{n-2}}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии: $\boldsymbol{S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+\ldots+R(1+i)^{n-1}}$,в которой первый член равен ***R***, знаменатель (1+***i***), число членов n. Отсюда:
- $$\boldsymbol{S = R*s_{n;i}} \ , \qquad (3.1)$$
- где $\boldsymbol{s_{n;i} = [(1+i)^n -1]/i}$ - ***коэффициент наращения ренты.*** S зависит от срока ренты n и уровня процентной ставки *i*.

Пример 3.1. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые 1 раз в год начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10%. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{R}$ = 10 000 000 руб., $\boldsymbol{m}$ =1, $\boldsymbol{i}$ **=** 0,10 .Найти ***S = ?***
- ***Решение***

  Вычисления производится по формуле для обычной годовой ренты по формуле (3.1)

  $S = 10\,000\,000 * [(1+ 0,1)^3 - 1] / 0,1 =$

  33 100 000,00 *руб.*

Годовая рента с начислением процентов m раз в году.

- Платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют *m* раз в году, то каждый раз применяется ставка j/m, где j - номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид: $R(1+ j/m)^{m*(n-1)}$, $R(1+ j/m)^{m*(n-2)}$, . . . , R .Если читать последнюю формулу справа налево, то можно увидеть геометрическую прогрессию, у которой R - первый член, $(1+j/m)^m$ –знаменатель и n - число членов. Сумма членов этой прогрессии представляет собой наращенную сумму ренты:
- $$S = R\,[(1 + j / m)^{m*n} - 1] / [(1 + j / m)^m - 1] \quad (3.2)$$

Пример 3.2. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые ежеквартально (m = 4) начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{m}$ = 4, $\boldsymbol{R}$ = 10 000 000 руб.,
- $\boldsymbol{j}$ **=** 0,10 .Найти $\boldsymbol{S}$ **= ?**
- **Решение.**
- Вычисления производится по формуле (3.2) для <u>годовой ренты с начислением процентов 4 раза в году</u>: S = 10 000 000*[(1+0,1/4)$^{(3*4)}$ - 1] / [(1+0,1/4)^4 - 1] = 33 222 157,88 *руб.*

Рента p - срочная, с начислением процентов один раз в год ($m = 1$).

- ***Рента выплачивается p раз в году равными платежами, проценты начисляются один раз в конце года m=1.*** Пусть ***R*** - годовая сумма платежей, тогда ***R/p*** - размер отдельного платежа.
- *П*оследовательность платежей с начисленными до конца срока- n процентами-i представляет собой геометрическую прогрессию вида: $R/p*(1+i)^{n-1/p}$ $R/p*(1+i)^{n-2/p}$ *,…,R/p.* Наращенная сумма такой ренты- S будет равна сумме членов этой геометрической прогрессии, записанной в обратном порядке, у которой *R/p* - первый член*, (1+i)/p* знаменатель*, n*p -* общее число членов, а сама S равна
- $$S = R*s^{(p)}_{n;i}\ , \qquad (3.3)$$
- где $s^{(p)}_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$ - коэффициент наращения *p*-
- срочной ренты при *m* =1.

Пример 3.3. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал), на которые в конце каждого года начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: n = 3 года, m = 1, R = 10 000 000 руб., p = 4, i = 0,10.
- Найти ***S = ?***
- ***Решение***
  Вычисления проведем по формуле (3.3):
- $S = (10\ 000\ 000/4)*[(1+0,1)^3 - 1]/ [(1+0,1)^{1/4} - 1]$ ***=34 316 60,35 руб.***

Рента р - срочная*, когда *число платежей совпадает с начислением процентов (р = m).

- Воспользуемся аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой
-
$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$
- Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год, тогда получаем:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{m\cdot n} - 1}{j} \quad (3.4)$$

Пример 3.4. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m}$ = 4, $\boldsymbol{R}$ = 10 000 000руб.,
- $\boldsymbol{j}$ **=** 0,10.
- Найти **S = ?**
- **Решение.** Вычисления произведем по формуле (3.4):
- $S = 10\,000\,000 \cdot [(1+0{,}1/4)^{(3 \times 4)} - 1] / 0{,}1 =$ 34 488 882,42 руб.

Рента p - срочная, с произвольным поступлением платежей p ≥ 1, и произвольным начислением процентов m ≥ 1 (общий случай).

- Первый член ренты *R/p,* уплаченный спустя 1/*p* года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами -s1=$R/p*(1+j/m)^{m*(n-1/p)}$.Второй член ренты к концу срока возрастет до s2= $R/p*(1+j/m)^{m*(n-2/p)}$ и т.д. Последний член этой геометрической прогрессии равен *R/p,* ее знаменатель $(1+j/m)^{m/p}$, число членов n**m.Соответственно* наращенная сумма рассчитывается по формуле:
-

$$S = s1+s2+\ldots+snp = \frac{R}{p}\,\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1} \qquad (3.5)$$

Пример 3.5. В течение 3-х лет на расчетный счет в <u>конце каждого квартала</u> поступают платежи (*p*=4) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), <u>на которые ежемесячно (*m*=12) начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых</u>. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано:***n*** = 3 года, ***m*** = 12,***R*** = 10 000 000 руб.,
- ***p*** = 4, ***j* =** 0,10 .Найти ***S = ?***
- ***Решение.***
- Вычисляя по формуле (3.5) находим:
- S = (10 000 000/4)*[(1+0,10/4) $^{(3x4)}$ -1] / [(1+0,10/4) $^{(12/4)}$ -1] =34 529 637,96 руб.

Определение величины отдельного платежа ***простой ренты*** - R.

- **I.** **Известна величина наращенной суммы-S , а также** процентная ставка ***I и*** количество выплат n.
- ***Величина отдельного платежа- R по схеме постнумерандо.***

(3.6)

$$R_{по} = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

- ***Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо***

(3.7)

$$R_{пр} = \frac{S \cdot i}{(1+i) \cdot ((1+i)^n - 1)}$$

Пример 3.6. Через 3 года на расчетном счете необходимо иметь 10 млн руб. Определить размер ежегодных платежей : а) в *конце года (постнумерандо)*;в) в начале года - *пренумерандо* по сложной процентной ставке 12% годовых.

- Дано: ***n*** = 3 года,***S*** = 10 000 000 руб.,***i*** **=** 0,12 .
- Найти ***Rпо и Rпр= ?***
- **Решение.**
- **а)** Вычисляя по формуле (3.6)находим: $R_{по}$= 10 000 000*0,12/[(1+0,12)^3 -1] = **2 963 489,81 руб.**
- **в)** Вычисляя по формуле (3.7) находим: $R_{пр}$ = (10 000 000*0,12)/[(1+0,12)((1+0,12)^3 -1)] = **2 645 973,04** руб.

II-й случай. Определение величины отдельного платежа простой ренты при известной современной стоимости А.

- ***Известна современная стоимость- А,*** *процентная ставка-* ***i****,количество выплат- n.*
- ***Величина отдельного платежа по схеме постнумерандо.***

(3.8)

$$R_{no} = \frac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n}$$

- ***Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо***

(3.9)

$$R_{np} = \frac{Ai}{(1+i)(1 - 1/(1+i)^n)}$$

Пример 3.7. Предприниматель взял кредит в размере *10 млн руб.* *сроком на 3 года* под *14% годовых*. Рассчитать размер ежегодных погасительных платежей, если они будут выплачиваться а) *в конце года ; b)в начале года*

- Дано: n = 3 года, A = 10 000 000 руб., i = 0,14 .
- Найти ***Ra и Rb = ?***
- **Решение.**
- **а)** Вычисляя по формуле (3.8) находим: $Ra = (10\,000\,000 * 0{,}14)/[1-1/(1+0{,}14)^3]$ = **4 307 314,80 руб**.
- *b)* Вычисляя по формуле (3.9) находим:
- $R = (10\,000\,000 * 0{,}14)/[(1+0{,}14)(1-/(1+0{,}14)^3)]$ ***= 3 778 346,32 руб.***

Определение срока простой ренты - n

- **I-й случай. Известна наращенная сумма-S *, процентная ставка-i , отдельный платеж -R***
- Срок простой ренты при платежах по *постнумерандо*.

(3.10)

$$n = \frac{\ln(1 + S \cdot i / R)}{\ln(1 + i)}$$

- Срок простой ренты при платежах по *пренумерандо*.

(3.11)

$$n = \ln(1 + \frac{S \cdot i}{R \cdot (1 + i)}) / \ln(1 + i)$$

Пример 3.8. На момент окончания финансового соглашения заемщик должен выплатить 30 000 000 руб. Платежи размером 5 000 000 руб. поступают ежегодно в конце года, с начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты а)*постнумерандо;в) пренумерандо*

- Дано:***R*** = 5 000 000 руб.,***S*** = 30 000 000 руб.,
- ***i =*** 0,15 .Найти ***na и nb= ?*** **Решение.**
- **а)** По формуле (3.10) находим:
- *na* = *ln* (1+30 000 000*0,15/5 000 000) / ln(1+0,15) = **4,59 года**.
- *в)* По формуле (3.11) находим: ***nв = ln(1+30 000 000*0,15/(5 000 000*(1+0,15)) / ln(1+0,15) = 4,14 года.***

2-й случай. Определение срока простой ренты *n* при известной современной стоимости ренты *A*

- Известна современная стоимость- A, *отдельный платеж ренты* – R, процентная ставка- *i.*
- Определение срока простой ренты при платежах по *постнумерандо:*

(3.12)

$$n = -\frac{\ln(1 - Ai / R)}{\ln(1 + i)}$$

- Определение срока простой ренты при платежах по пре*нумерандо*

(3.13)

$$n = -\ln(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}) / \ln(1+i)$$

Пример 3.9. Организация взяла кредит в размере 30 000 000 руб. с условием погашения ежегодными платежами по 6 000 000 руб. и начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты при погашении: а) в конце года (*постнумерандо*); b) в начале года (*пренумерандо*)

- Дано: ***A*** = 30 000 000 руб., ***R*** = 6 000 000 руб.,
- ***i* =** 0,15. Найти ***na и nb = ?***
- **Решение.**
- а)Вычисляя по формуле (3.12) находим: ***n*** = - *ln* (1-30 000 000*0,15/6 000 000) / *ln*(1+0,15) = **9,92 года**.
- а)Вычисляя по формуле (3.13) находим
- n = -*ln* (1-30 000 000*0,15/(6000 000*(1+0,15)) / *ln*(1+0,15) = **7,56 года**.

Современная величина A обычной годовой финансовой ренты.

Если член годовой ренты равен ***R***, процентная ставка ***i,*** срок ренты n и проценты начисляются один раз в конце года. Тогда a1,a2,…an- приведенные к началу ренты величины первого, второго и т.д. платежей :

$$a_1 = R\frac{1}{1+i} = Rv; a_2 = R\frac{1}{(1+i)^2} = Rv^2; \ldots; a_n = R\frac{1}{(1+i)^n} = Rv^n$$

где $v = \frac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель.

Приведенные величины-a1,a2,…,an- образуют геометрическую прогрессию, ***сумма которой равнаA***:

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i} \quad (3.14)$$

где $a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ - **коэффициент приведения ренты.**

Пример 3.10. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года ($p = 1$) поступает по 10 млн руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной процентной ставке в 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано: $n = 3$ года, $m = 1$, $R = 10\ 000\ 000$ руб,
- $p = 1$, $j = 0{,}10$. Найти $A = ?$
- **Решение.**
- Вычисляя по формуле (3.14) получим :
- $A = 10\ 000\ 000 * [1 - (1+0{,}1)^{-3}]/0{,}1 =$ 24 868 519,91 руб.

Современная величина p-срочной финансовой ренты с произвольными значениями p ≥ 1 и m ≥ 1.

- Формула (3.15) является общей для нахождения современной величины ренты, когда *p* и *m* могут принимать произвольные значения

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-m\cdot n}}{p\,[(1+j/m)^{m/p}-1]} \quad (3.15)$$

Пример 3.11. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи (p=4) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал). Ежемесячное дисконтирование (m=12) производится по сложной ставке 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{m}$ = 12, $\boldsymbol{R}$ = 10 000 000 руб., $\boldsymbol{p}$ = 4,
- $\boldsymbol{j}$ **=** 0,10 .Найти ***S = ?***
- ***Решение***
- Вычисляя по формуле (1.37) получим:
- $A = (10\,000\,000/4)*[1 - (1+0,1/12)^{(-3*12)}] / [(1+0,1/12)]^{(12/4)} - 1] = 25\,612\,003,42$ руб.

1.3.5. Определение величины процентной ставки простой ренты

- При заключении финансовых сделок важно знать их доходность, которая определяется процентной ставкой ренты за один период начисления. При этом считается, что известны следующие значения: отдельный платеж ***R***, срок займа **n** и наращенная сумма ***S*** (или современная стоимость ***A***). В Excel данная задача решается с помощью финансовой функции СТАВКА.