



**Финансовая**

**математика**

**Потоки платежей. Ренты.**

---

Поток платежей – это последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментами времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком: + поступление;  
– выплата.

Поток может быть конечным или бесконечным.

$\mathfrak{R} = \{R_k, t_k\}$  - поток платежей;

$t_k$  - момент платежа  $R_k$ .

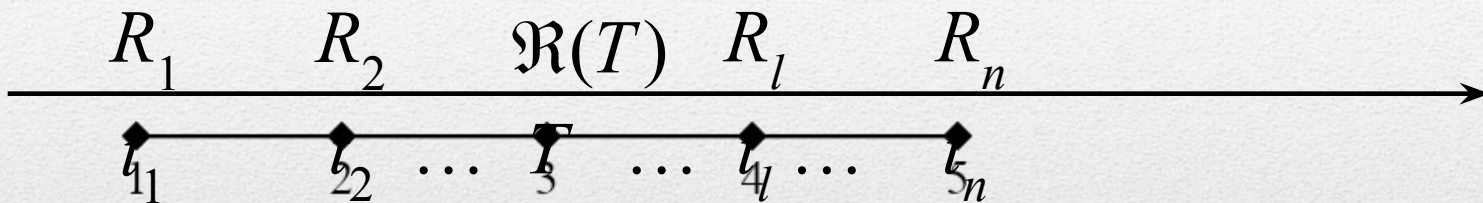
Ставка процента  $i$  обычно неизменна в течение всего потока.

---



Величина потока в момент времени  $T$ :

$$\mathfrak{R}(T) = \sum_k R_k (1+i)^{T-t_k}$$



$$\mathfrak{R}(T') = \mathfrak{R}(T)(1+i)^{T'-T}$$

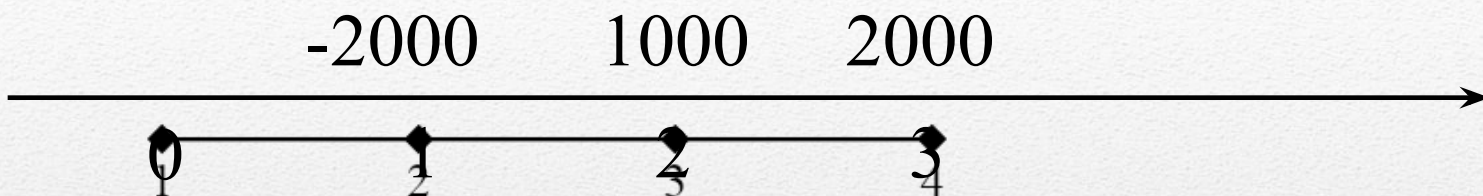
Обобщающие характеристики:

$\mathfrak{R}(0)$  – современная величина потока;

Если есть последний платеж, то величина потока в момент этого платежа называется конечной величиной потока.

---

Пример.



$$\mathfrak{R} = \{(-2000; 1); (1000, 2) (2000, 3)\}, \quad i = 0,1$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(0) &= -2000 \cdot (1 + 0,1)^{-1} + 1000 \cdot (1 + 0,1)^{-2} + \\ &+ 2000 \cdot (1 + 0,1)^{-3} = 510,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(3) &= -2000 \cdot (1 + 0,1)^2 + 1000 \cdot (1 + 0,1) + 2000 = \\ &= \mathfrak{R}(0) \cdot (1 + 0,1)^3 = 679,8 \end{aligned}$$



Поток положительных платежей  
с постоянными промежутками между ними  
называется рентой (аннуитетом).

---

## Параметры ренты:

- $R$  – величина отдельного платежа;
  - период ренты – временной интервал между двумя соседними платежами;
  - срок ренты ( $n$ ) – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;
  - $i$  – процентная ставка, используемая при наращении и дисконтировании платежей;
  - $m$  – число начислений процентов в году;
  - $p$  – число платежей в году;
  - моменты платежа внутри периода.
-



Моменты платежа внутри периода:

Если платеж поступает в конце очередного промежутка, то рента называется

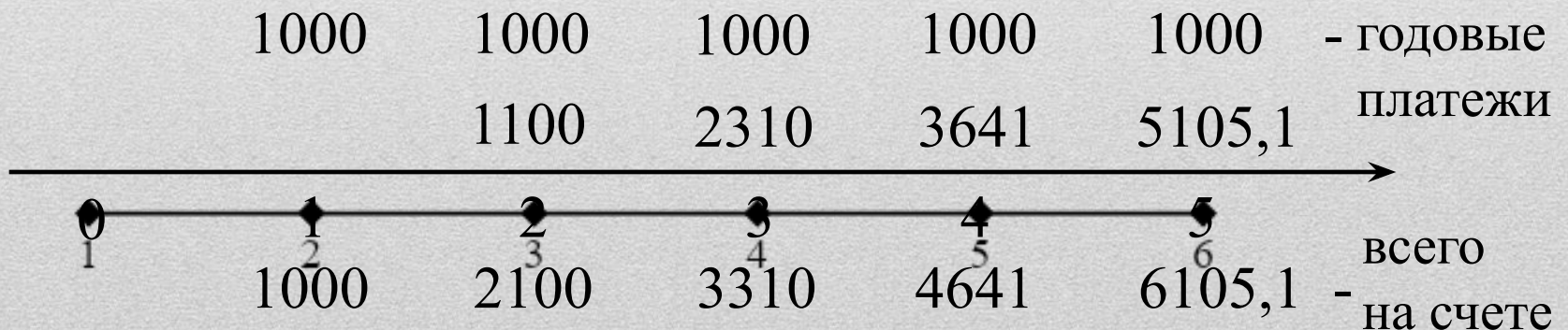
постнумерандо, если в начале – пренумерандо.

Конечная годовая рента постнумерандо

( $p = 1; m = 1$ ).

$R$  – годовой платеж;  $n$  – длительность ренты;

$i$  – годовая ставка.



Наращенная величина конечной годовой ренты постнумерандо.

$$\begin{aligned} S &= R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \square + R(1+i)^2 + R(1+i) + R = \\ &= R\left(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \square + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right) = \\ &= R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \end{aligned}$$

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s(n, i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{— множитель наращенной ренты постнумерандо}$$



Современная величина конечной годовой ренты постнумерандо.

$$A = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \square + \frac{R}{(1+i)^n} =$$

$$= R \left( (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \square + (1+i)^{-n} \right) = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$a(n, i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \text{ — коэффициент приведения ренты}$$

$$A(1+i)^n = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S$$

$$a(n, i) = \frac{s(n, i)}{(1+i)^n}$$

$$s(n, i) = a(n, i)(1+i)^n$$

Как изменяются коэффициенты с ростом процентной ставки?

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot \frac{(1+0,1)^5 - 1}{0,1} = 6105,1$$

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 1000 \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-5}}{0,1} = 3790,79$$

---



Характеристики конечной годовой ренты пренумерандо.

$$\begin{aligned} S_{\overline{n}|i} &= R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + \dots + R(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i) = \\ &= R(1+i) \left( 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$S_{\overline{n}|i} = R(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$  – множитель наращенной ренты пренумерандо

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{S_{\overline{n}|i}}{(1+i)^n} = R(1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = R \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$\{R; n; j\}; (p = 1; m > 1)$

$R(1 + j/m)^{m(n-1)}; R(1 + j/m)^{m(n-2)}; \dots; R(1 + j/m)^m; R$

$$S = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^m - 1}$$

$\{R; n; i\}; (p > 1; m = 1)$

$R$  – годовая сумма, разовый платеж –  $R/p$

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{(1/p)np} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{p((1+i)^{1/p} - 1)}$$



$\{R; n; j\}; (p = m > 1)$

$$S = \frac{R}{p} \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m) - 1} = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j}$$

$R$  – годовой платеж!

---

$\{R; n; j\}; (p \geq 1; m \geq 1, \text{возможно, } p \neq m)$

Общее число разовых платежей  $R/p - np$ .

Первый платеж  $R/p$  внесен спустя  $1/p$  года после начала к концу срока будет равен

$$\frac{R}{p} \cdot (1 + j/m)^{m \left( n - \frac{1}{p} \right)} = \frac{R}{p} \cdot (1 + j/m)^{mn - \frac{m}{p}}.$$

Второй платеж

$$\frac{R}{p} \cdot (1 + j/m)^{m \left( n - \frac{2}{p} \right)} = \frac{R}{p} \cdot (1 + j/m)^{mn - 2 \frac{m}{p}}.$$

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1 + j/m)^{(m/p)np} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{p \left( (1 + j/m)^{m/p} - 1 \right)}$$



Пример.  $R = 1000; n = 5; i = 0,1; m=p=1$

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot \frac{(1+0,1)^5 - 1}{0,1} = 6105,1$$

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 1000 \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-5}}{0,1} = 3790,79$$

$$\begin{aligned} \boxed{S} &= R(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot (1+0,1) \cdot \frac{(1+0,1)^5 - 1}{0,1} = \\ &= S(1+i) = 6105,1 \cdot 1,1 = 6715,61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= R(1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 1000 \cdot (1+0,1) \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-5}}{0,1} = \\ &= \boxed{S} / (1+i)^n = A(1+i) = 3790,79 \cdot 1,1 = 4169,87 \end{aligned}$$

---

Пример.  $R = 1000; n = 5; i = 0,1;$

$$m = p = 4; R_q = 250$$

$$S = \frac{R}{p} \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j/m} = 250 \cdot \frac{(1 + 0,1/4)^{4 \cdot 5} - 1}{0,1/4} = 6386,16$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{j/m} = 250 \cdot \frac{1 - (1 + 0,025)^{-20}}{0,025} = 3897,29$$

$$\boxed{S} = S(1 + j/m) = 6386,16 \cdot 1,025 = 6545,82$$

$$\boxed{A} = A(1 + i) = 3897,29 \cdot 1,025 = 3994,72$$

---



## Определение параметров годовой ренты.

$\{R; n; i\}$  ( $p = m = 1$ )

**1)** Если заданы  $R; n; i$ , то  $A=R \cdot a(n, i)$ ;  $S=R \cdot s(n, i)$

**2)** Если заданы  $R; A$  или  $S; i$ , то из формул

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}; \quad S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

получим:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)^*}{\ln(1+i)}; \quad n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

\* Имеет смысл только при  $R > Ai$

---

округление  $n$ :

у  $p$ -срочной ренты результат округляется до ближайшего целого.

Например:  $n = 6,28$ ;  $p = 4$ . Тогда  $np = 25,12$ ;  
 $[np] = 25$ . Окончательно имеем  $n = 6,25$ .

---



**3)** Если заданы  $A$  или  $S$ ;  $n$ ;  $i$ , то

$$R = \frac{A}{a(n, i)}; \quad R = \frac{S}{s(n, i)}$$