

Физические основы функционирования гидросистем

Гидростатика

Основы гидростатики

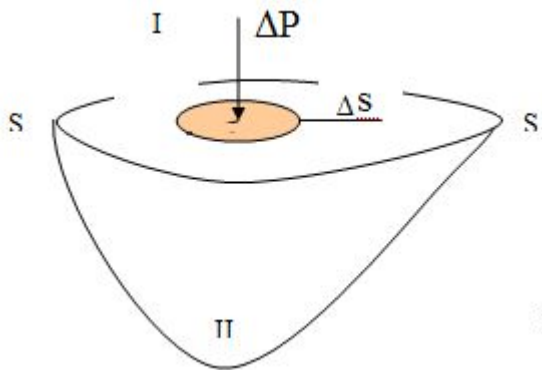
- **Гидростатикой** называют раздел гидромеханики, в котором рассматривают законы, действующие в жидкостях, находящихся в состоянии относительного покоя, т.е. когда отсутствуют перемещения частиц жидкости относительно друг друга.

Массовые силы

- Массовые силы пропорциональны массе выделенного объема или при постоянной плотности среды пропорциональны объему. Они действуют на все частицы этого объема. Массовыми силами являются силы веса, силы инерции, электромагнитные силы.
- $$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta m}$$

Поверхностные силы

- В покоящейся жидкости поверхностные силы направлены по нормали к элементу поверхности выделенного объема



$$\vec{p} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}^*}{\Delta s},$$


\vec{p} - гидростатическое давление

Свойства гидростатического давления

- Гидростатическое давление действует нормально к площадке действия и является сжимающим, т.е. оно направлено внутрь того объема жидкости, который мы рассматриваем.
- Гидростатическое давление P в любой точке одинаково по всем направлениям (т.е. не зависит от угла наклона площадки действия).

$$p_x = p_n = p_z = p$$

Закон Паскаля

-  **Давление на поверхность жидкости, произведенное внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях.**
- Очевидно, что если давление не зависит от ориентации площадки, проходящей через данную точку, и определяется только положением точки в жидкости, то давление p есть функция только координат x, y, z , т. е.

$$p = f(x, y, z).$$

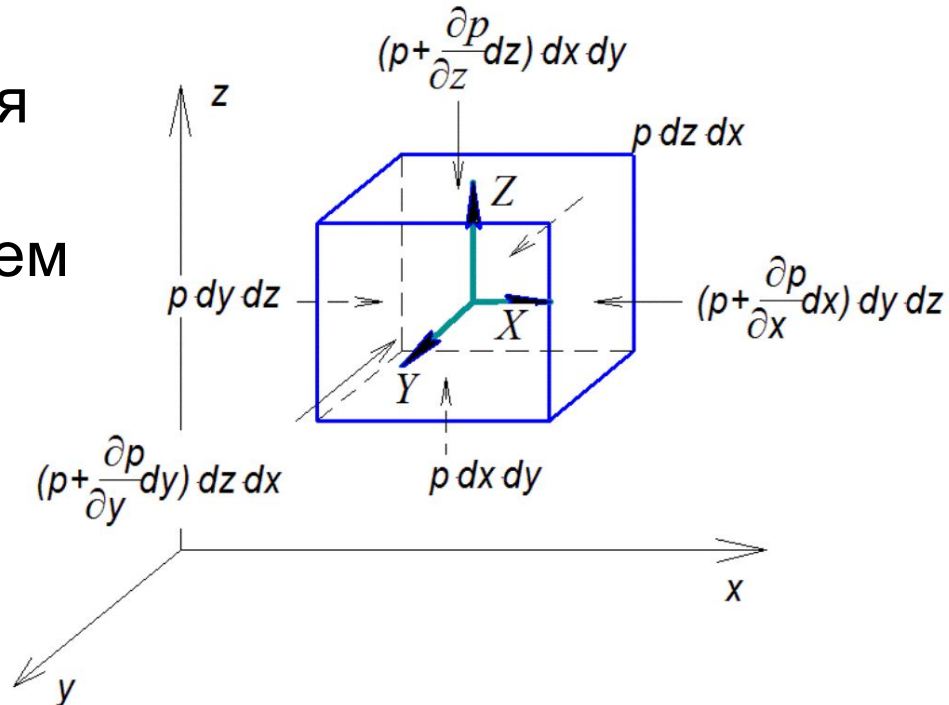
Основное уравнение гидростатики

Пусть на единицу массы параллелепипеда действует массовая сила \mathbf{F} её составляющими X , Y и Z . Если на три грани, пересекающиеся в точке, будет действовать давление p , то на соответствующих противоположных гранях величины давления будут равны:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx; \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} dx; \quad p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Составив уравнения равновесия в проекциях на оси x , y , z и приведя подобные члены, найдем :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z.$$



Уравнения Эйлера

- Часто их записывают в следующем

виде:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

- Или в векторном виде $\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$

где -

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k} = \text{grad } p$$

- Если уравнения системы умножить последовательно на dx , dy , dz и сложить, то получим

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \rightarrow$$

откуда основное уравнение гидростатики:

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp$$

- Интегрируя это уравнение и считая, что плотность ρ постоянна, получим что гидростатическое давление в любой точке жидкости будет

$$p = \rho \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Поверхность уровня

- Если вдоль какой-либо поверхности давление неизменное, т.е. $p = \text{const}$ или $dp = 0$, то такая жидкость называется поверхностью равного давления или поверхностью уровня.

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0 \quad \text{или} \quad d\Phi = 0$$

Здесь принято, что $(Xdx + Ydy + Zdz) = d\Phi$

Т.е. массовые силы имеют потенциал и проекции массовых сил представлены в виде:

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

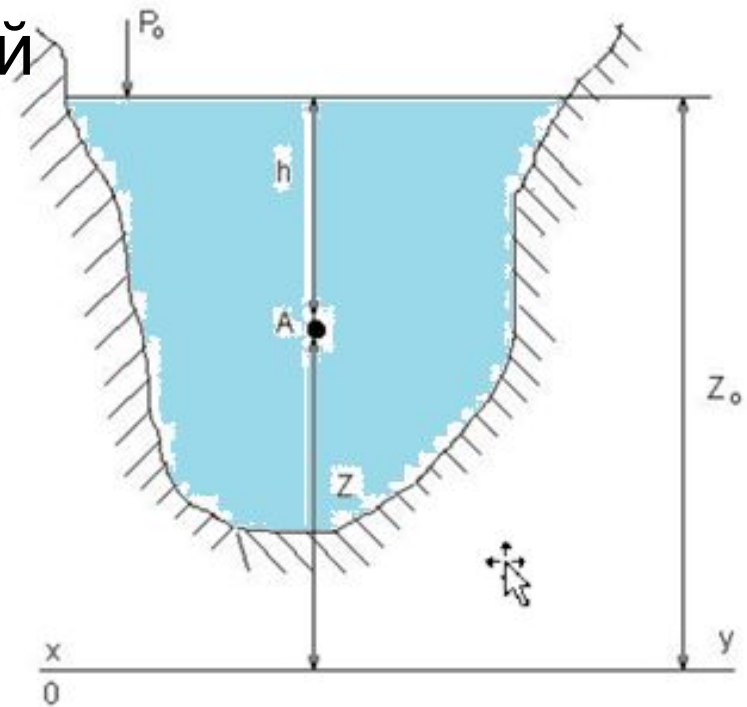
$$\rho \cdot d\Phi = dp.$$

Равновесие несжимаемой жидкости

- Если жидкость находится в равновесии под действием собственного веса, то проекции ускорений вызванных силой тяжести для выбранных координатных осей $X=0$, $Y=0$, $Z= -g$, где g -ускорение свободного падения.
- Тогда подставляя эти значения в основное уравнение гидростатики, получим
$$p = \rho \int (-g) dz$$

- Или проинтегрировав $p = -\rho gz + C$,
или $p + \rho gz = C$
- где C - постоянная интегрирования.

Для определения постоянной интегрирования рассмотрим находящийся в равновесии произвольный объем жидкости плотностью ρ . На поверхности жидкости имеется давление p_0 , расстояние от плоскости сравнения до равно Z_0 .

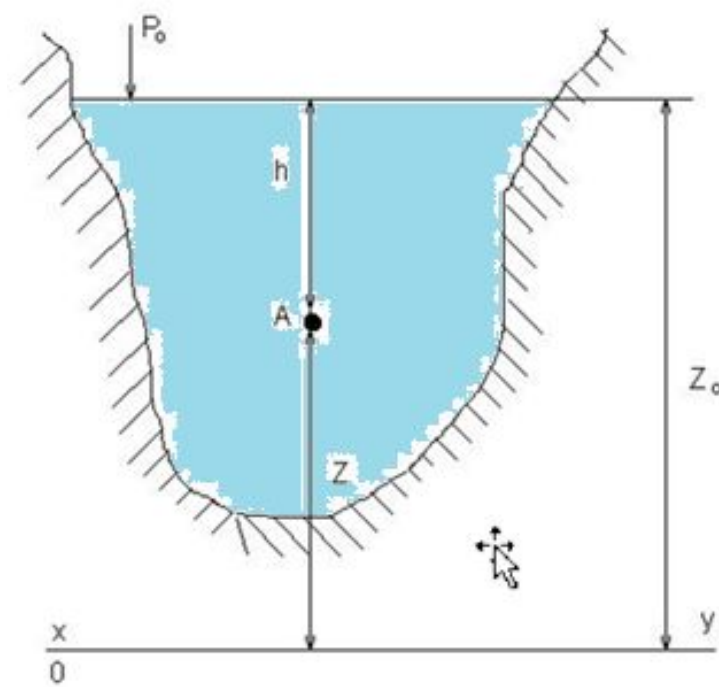


имее

$$p + \rho g z = C = p_0 + \rho g z_0$$

• Отсюда

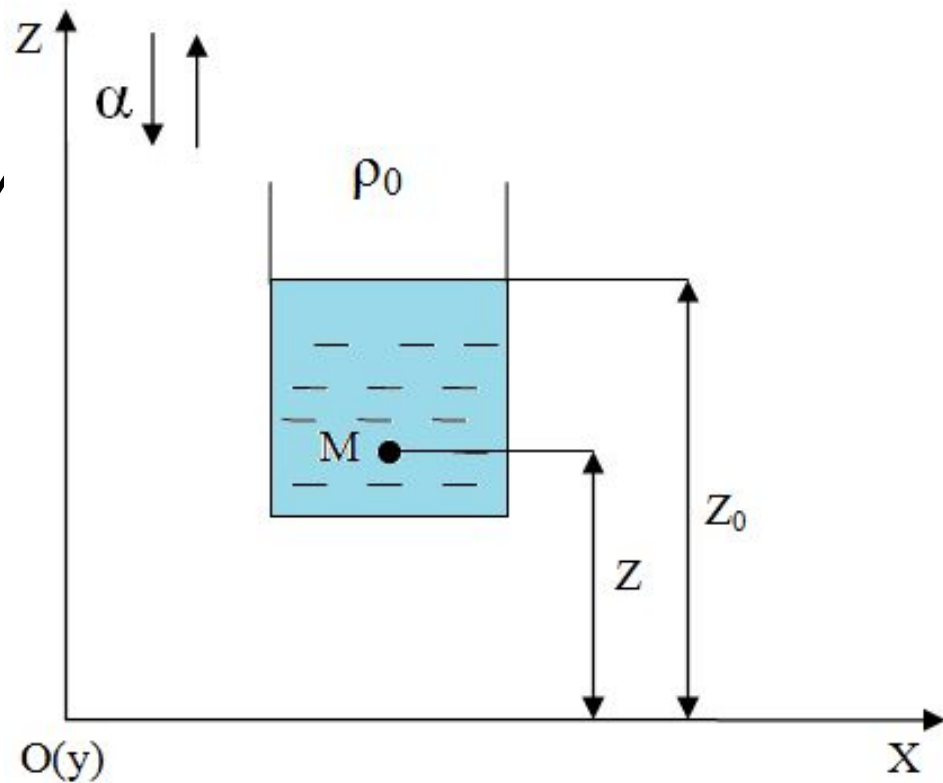
$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$



- Учитывая что $z_0 - z = h$ получим, что для несжимаемой жидкости, находящейся в равновесии под действием силы тяжести полное гидростатическое давление в точке $p = p_0 + \rho g h$ где p_0 - внешнее поверхностное давление, h - глубина погружения точки.

Относительное равновесие жидкости

- **Относительным равновесием** жидкости называется такое состояние, при котором каждая ее частица сохраняет свое положение относительно твердой стенки движущегося сосуда.



$$p = \rho \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$p = \text{const}; \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Движение по вертикали с постоянным ускорением a

- Проекции массовых сил на координатные оси будут:
 $X=0, Y=0, Z=-g+a$. Знак «-» соответствует равноускоренному подъему резервуара, «+»- спуску.
- Характер распределения давления получим следующий

$$p = \rho \int (-g \pm a) dz + C$$

где C - постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий на свободной поверхности $Z=Z_0$ и $P=P_0$.

- Тогда давление в любой точке, можно определять по формуле $P = P_0 + \rho g \left(1 \pm \frac{a}{g}\right) (z_0 - z)$

Поверхности равного давления

- Составим уравнение поверхности уровня $-(g \pm a)dz = 0$
- Если $g \neq 0$ то $dz=0$, а $z=const$, т.е. поверхности равного давления представляют собой горизонтальные плоскости.

Горизонтальное перемещение резервуара с жидкостью с постоянным ускорением a

- В этом случае $X = -a$,
 $Y = 0$, $Z = -g$.

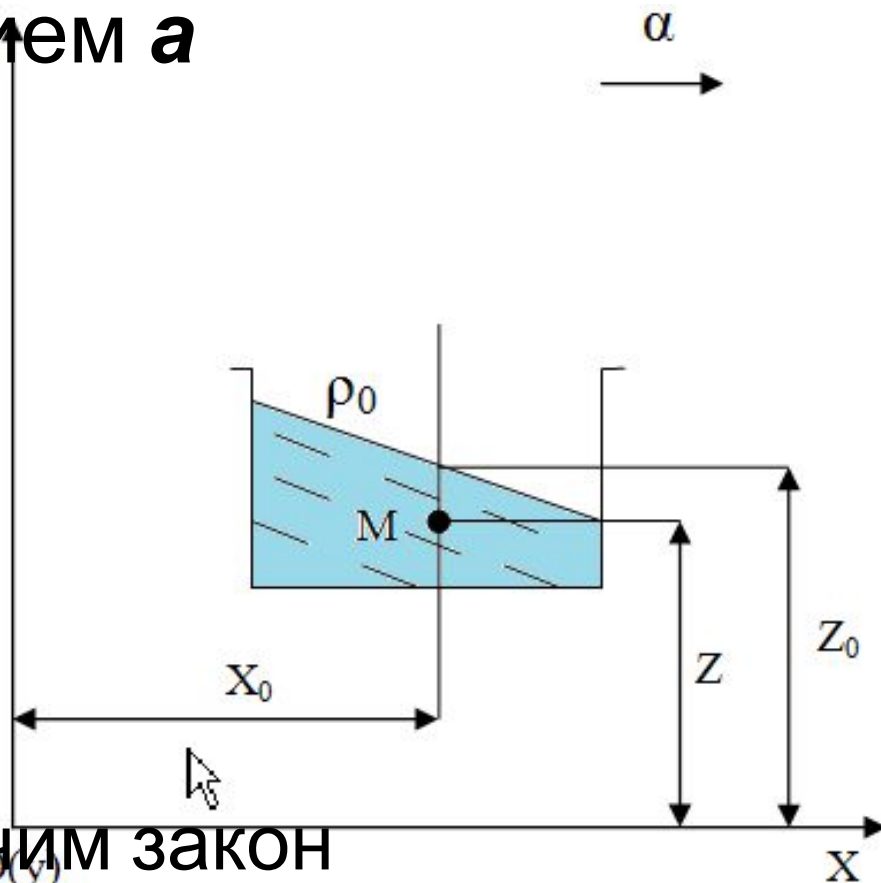
Закон распределения давления получим в виде

$$p = \rho \int [(-a)dx + (-g)dz]$$

- После интегрирования с учетом граничных

условий $x=x_0$, $z=z_0$, $p=p_0$ получим закон распределения давления в следующем виде

$$p = p_0 + \rho a(x_0 - x) + \rho g(z_0 - z)$$



Поверхность равного давления

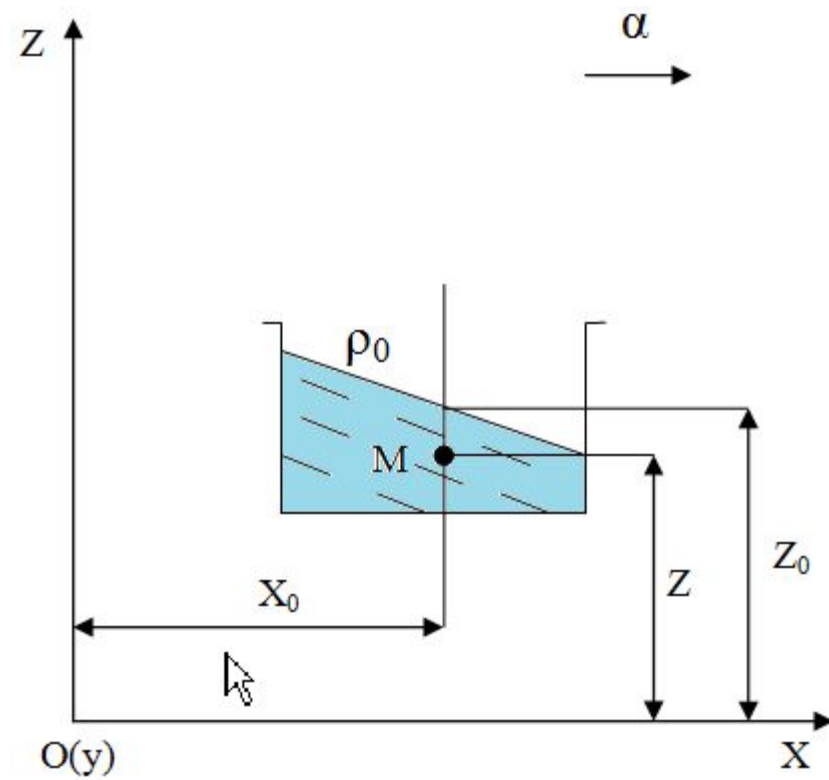
- определится уравнением $-(adx + gdz) = 0$

После интегрирования будем иметь

$$ax + gz = const$$

Или
$$z = const - \frac{ax}{g}$$

Т.о. поверхностями равного давления будут плоскости, углы наклона которых к горизонтальной плоскости определяются угловым коэффициентом, равным $-a/g$



Вращение цилиндрического сосуда с жидкостью с постоянной угловой скоростью

- В этом случае проекции массовых сил:

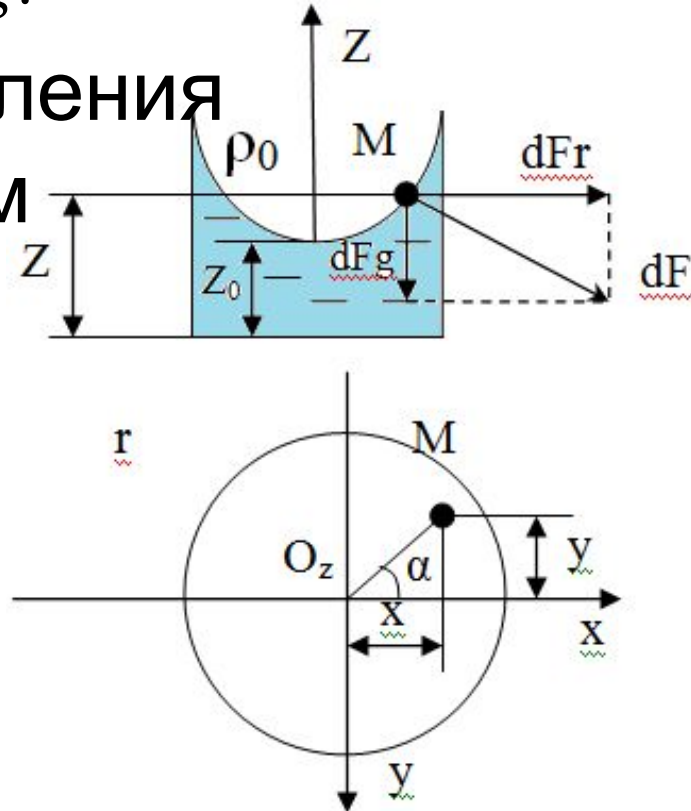
$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g.$$

- Поверхность равного давления определяется уравнением

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$$

Или проинтегрировав

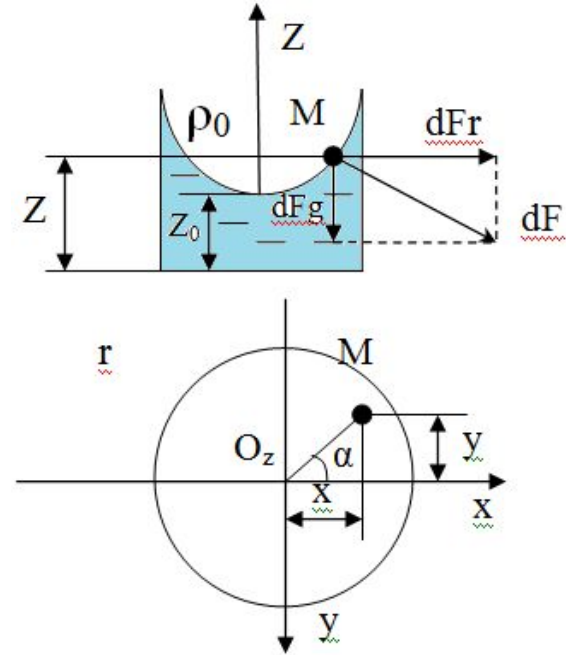
$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = \text{const}$$



Учитывая, что $x^2 + y^2 = r^2$
 получим $\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = const$

• Откуда $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + const.$

• Т.о. при вращении сосуда с жидкостью
 вокруг вертикальной оси поверхностями
 равного давления будет семейство
 параболоидов вращения, осью которых
 является ось Oz .



Закон распределения давления

- Закон распределения давления получим

из

$$p = \rho \int (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

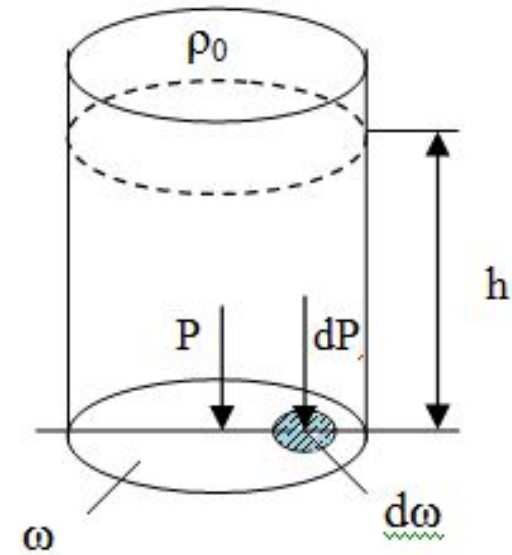
или

$$p = \rho \int (\omega^2 r dr - g dz)$$

- После интегрирования с учетом граничных условий $r = 0, z = z_0, p = p_0$ получим закон распределения давления:
$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g (z - z_0)$$

Давление жидкости на плоские поверхности

- Сила давления на эту площадку $dP = p d\omega = (p_0 + \rho gh) d\omega$.
- Равнодействующая сила давления определится так



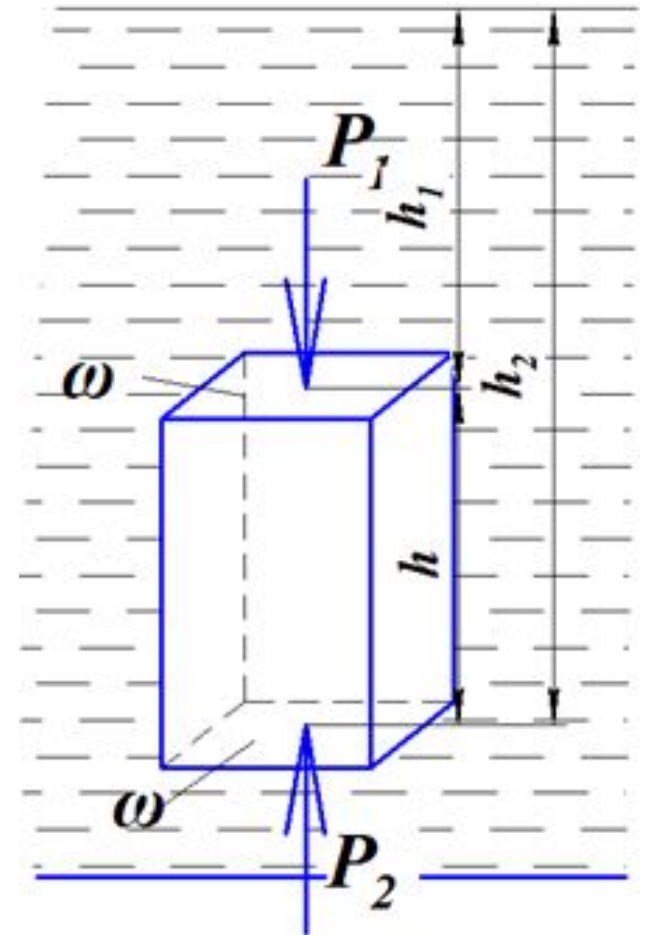
Закон Архимеда

Рассмотрим силы давления жидкости на тело, погруженное в эту жидкость.

- сила гидростатического давления жидкости на верхнее основание $P_1 = \rho g h_1 \omega$
- сила гидростатического давления жидкости на нижнее основание $P_2 = \rho g h_2 \omega$

$$P = P_1 - P_2 = \rho g \omega (h_1 - h_2)$$

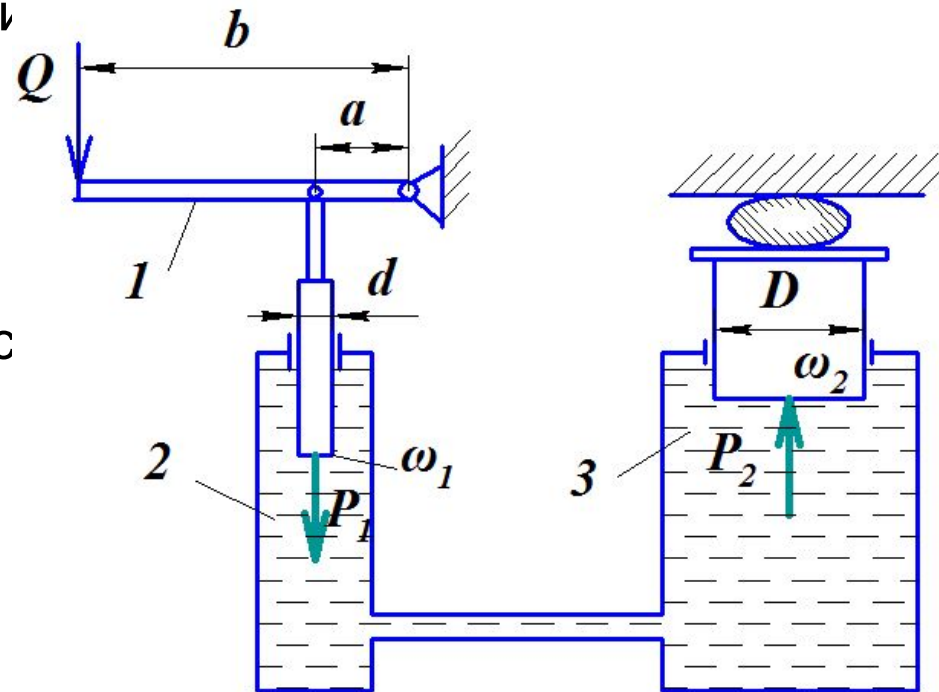
или $P = \rho g V$



Домкрат

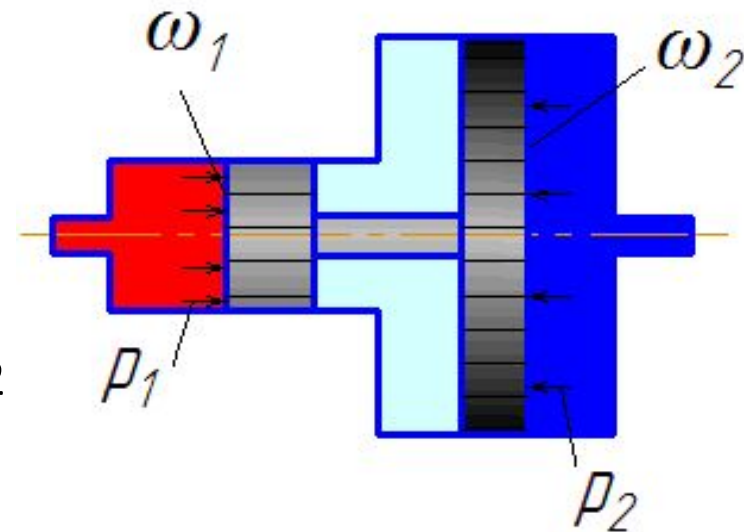
- В машиностроении широко используется передача энергии и давления с помощью различных гидравлических механизмов, в которых применяются одни и те же принципы работы, основанные на практической не сжимаемости жидкости (высоком модуле упругости) и преобразовании сил по закону Паскаля.
- Для анализа особенностей работы домкрата рассмотрим рисунок .
- Так как давление от приложенной внешней силы по закону Паскаля равномерно распространяется во все стороны, то под действием силы P_1 жидкость вытесняется в соседний сосуд под давлением $p = F_1/\omega_1$ и действует на поверхность поршня площадью ω_2 с силой, равной

$$P_2 = P_1 \cdot \omega_2 / \omega_1, \text{ при этом}$$
$$P_2/P_1 = \omega_2 / \omega_1.$$



Мультипликатор

- Применяется для повышения давления в отдельных элементах гидросистемы, например, в различных приспособлениях. На поверхность площадью ω_2 действует давление p_2 и возникает сила F , которая через шток передается на поверхность площадью ω_1 . В результате возникает давление $p_1 = F / \omega_1$, т. е.
$$p_1/p_2 = \omega_2/\omega_1$$



Равновесие тел погруженных в жидкость

На тело, погруженное полностью или частично в жидкость, действуют две силы:

Сила тяжести тела G , приложенная в его центре тяжести C .

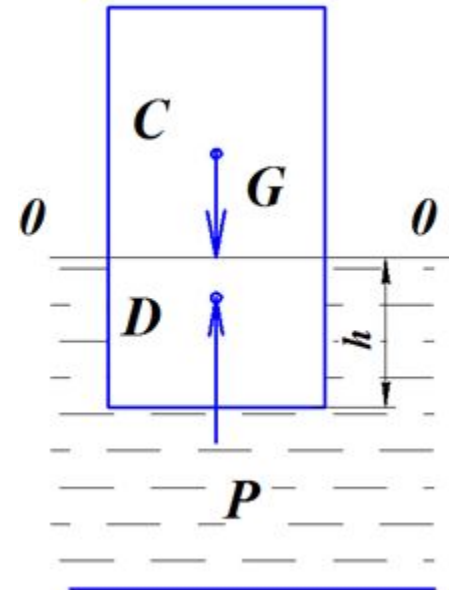
Выталкивающая сила P , приложенная в центре давления или, как называют еще, в центре водоизмещения D . Центром водоизмещения является центр тяжести вытесненного объема жидкости.

В зависимости от соотношения сил G и P могут быть три состояния тела.

Если G больше P , тело тонет.

Если $G=P$, тело находится внутри жидкости в безразличном состоянии (тело плавает в погруженном состоянии).

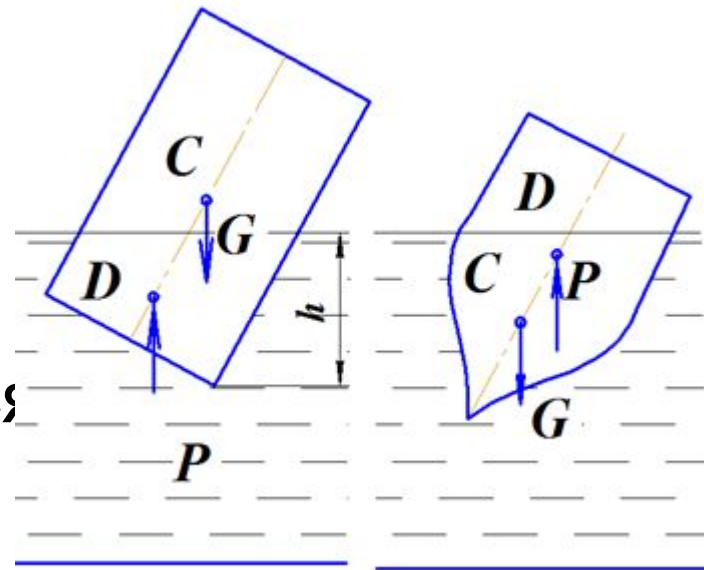
Если G меньше P , то тело всплывает до тех пор, пока сила тяжести вытесненной жидкости не станет равна силе тяжести тела G .



- Для равновесия тела, плавающего на свободной поверхности, необходимо, чтобы центр тяжести и центр давления (водоизмещения) лежали на одной вертикали. В случае когда центр тяжести тела и центр давления не лежат на одной вертикали (например, при крене тела), появляется пара сил P и G , которая стремится вращать тело.

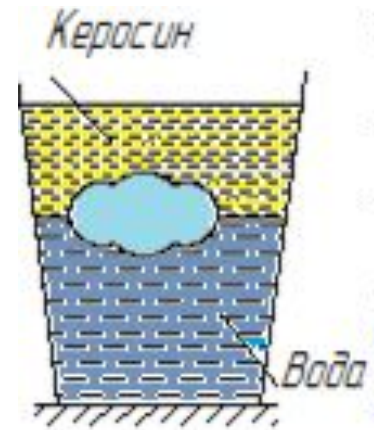
- **Остойчивостью**

плавающего тела называется его способность возвращаться в исходное положение после получения некоторого крена.



Задача

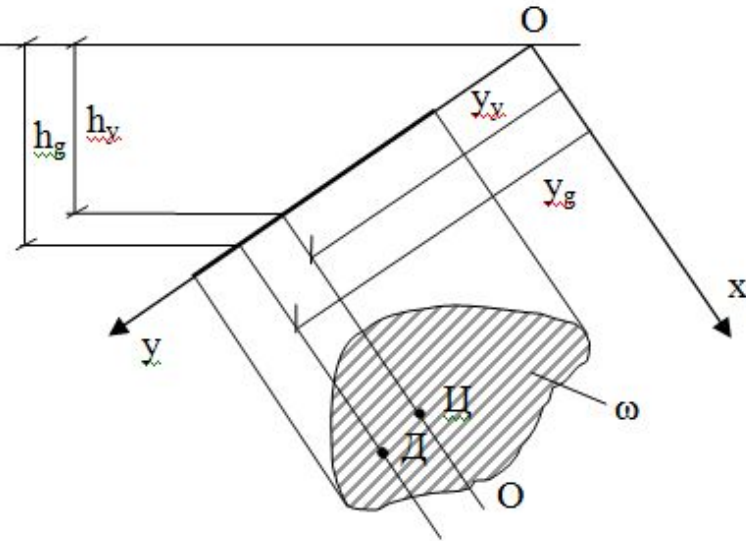
- *Кусок парафина объемом V находится между водой и керосином. Какая часть объема парафина находится в воде, если плотность керосина $0,8 \text{ т/м}^3$, а парафина $0,9 \text{ т/м}^3$?*



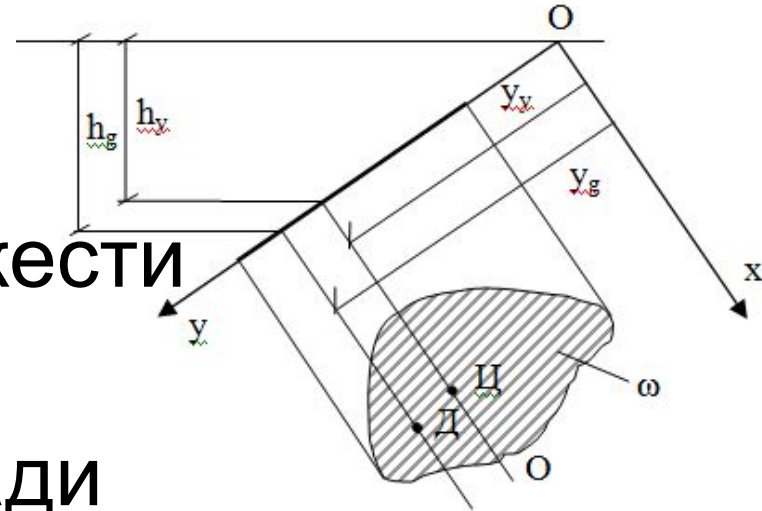
Сила гидростатического давления на плоскую поверхность

- Сила гидростатического давления на плоскую поверхность $P = (p_0 + \rho g h_y) \omega$,
- где h_y - глубина погружения центра тяжести смоченной части площади поверхности;
- ω - площадь смоченной части поверхности.

$P_1 = \rho g h_y \omega$ - сила избыточного давления при $p_0 = p_{ат}$



- Итак сила избыточного давления $P = \rho g h_y \omega$
- Эта сила приложена в центре давления, координата которого определяется по формуле $y_g = y_u + \frac{I_0}{\omega y_u}$



y_u - координата центра тяжести смоченной поверхности;

I_0 - момент инерции площади смоченной части поверхности относительно горизонтальной оси, проходящей через центр ее тяжести.

Сила гидростатического давления на криволинейную поверхность

- Сила гидростатического давления на

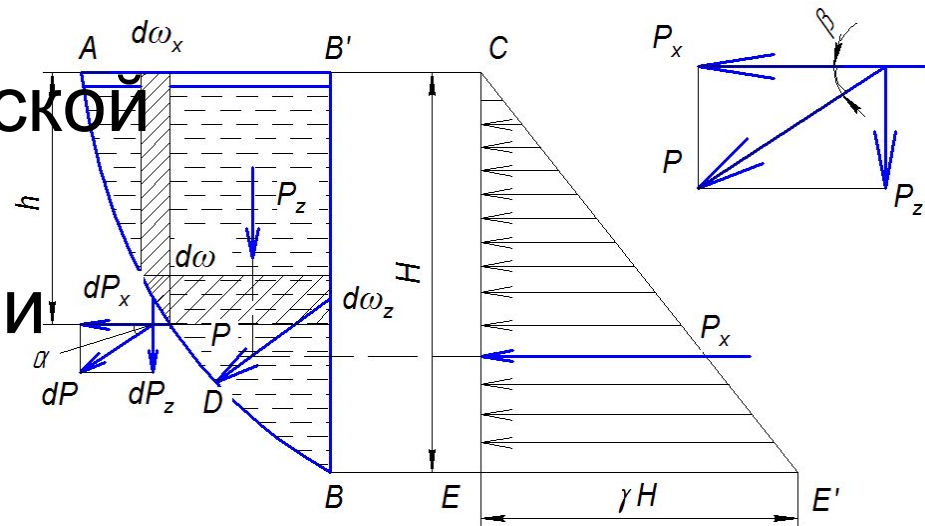
криволинейную поверхность $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$

где P_x, P_y, P_z - составляющие силы избыточного давления по соответствующим осям.

- В случае цилиндрической поверхности

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

P_x и P_z - горизонтальная и вертикальная составляющие силы P .

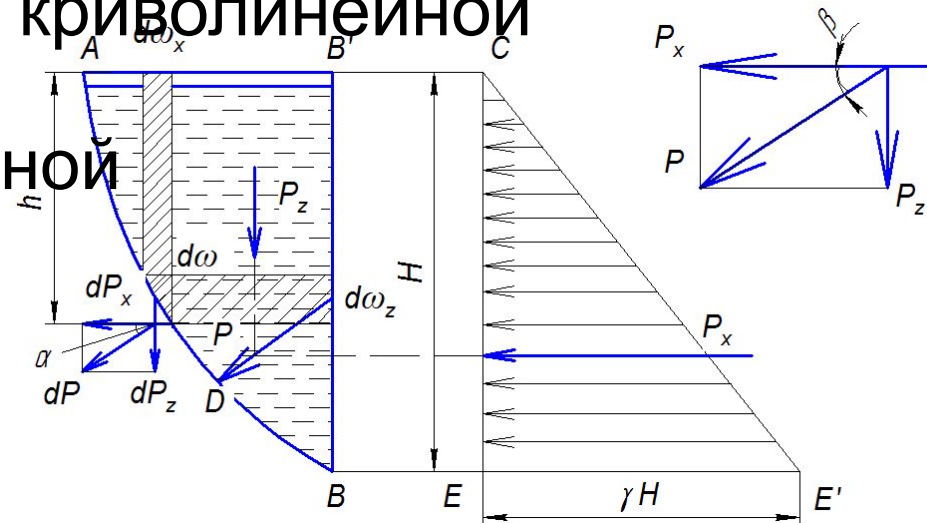


Горизонтальная составляющая

составляющая

- Горизонтальная составляющая избыточного давления P_x равна силе давления на вертикальную проекцию криволинейной поверхности $P_x = (p_m + \rho g h_{\perp}) \omega_z$

- P_M - манометрическое давление на поверхности жидкости;
- h_{\perp} - глубина погружения центра тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности
- ω_z - площадь вертикальной проекции.

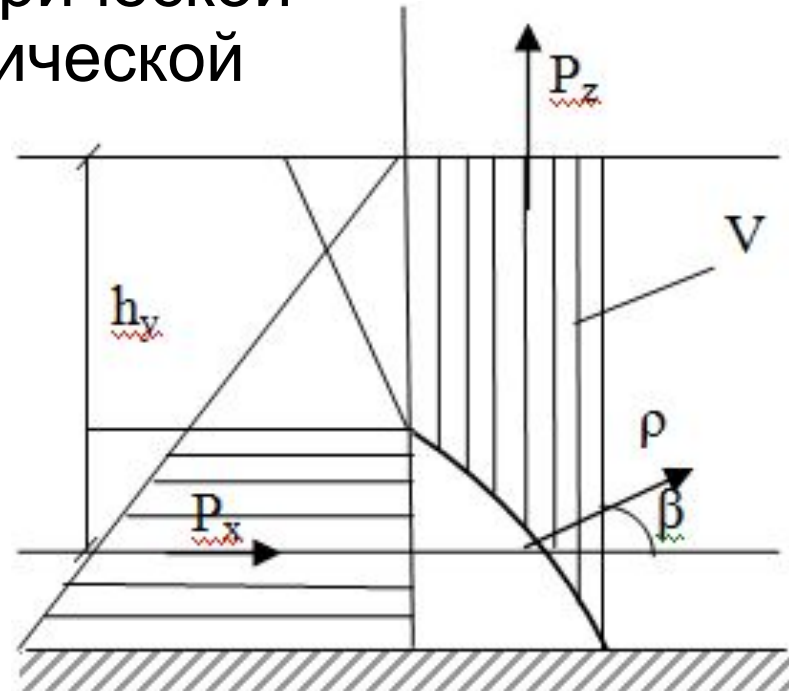


Вертикальная составляющая

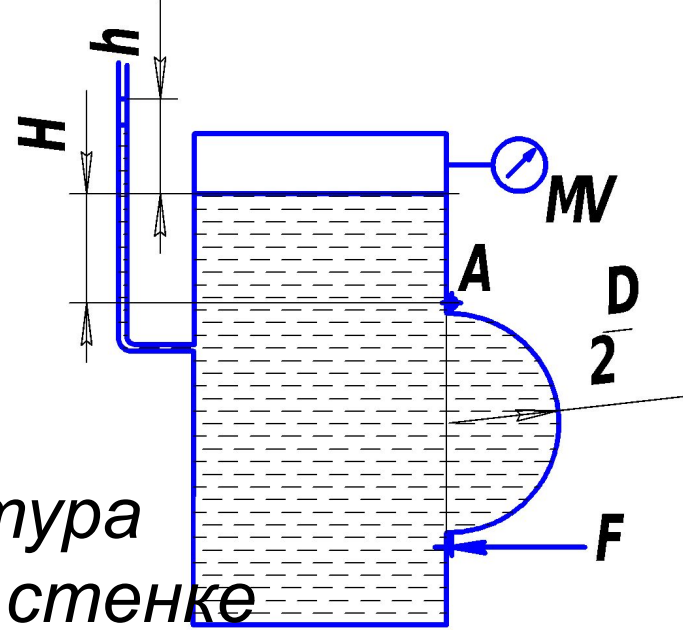
- Вертикальная составляющая P_z равна весу жидкости в объеме тела давления V : $P_z = \rho \cdot g \cdot V$

- Тело давления расположено между вертикальными плоскостями, проходящими через крайние образующие цилиндрической поверхности, самой цилиндрической поверхностью и свободной поверхностью жидкости или ее продолжением.

$$\operatorname{tg} \beta = P_z / P_x$$



Задача



- *Закрытый резервуар заполнен дизельным топливом, температура которого $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. В вертикальной стенке резервуара имеется прямоугольное отверстие ($D \times B$), закрытое полуцилиндрической крышкой. Эта крышка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси A . Манометр MV показывает манометрическое давление p_M . Глубина топлива над крышкой равна H . Пренебрегая силой тяжести крышки, определить усилие F , которое необходимо приложить к нижней части крышки, чтобы она не открывалась. Показать векторы действующих сил.*

Контрольные вопросы

-
- **Что такое гидростатическое давление, какими свойствами оно обладает и в каких единицах оно измеряется?**
- **Охарактеризуйте свойства гидростатического давления?**
- **Каковы соотношения между абсолютным, избыточным, атмосферным и вакуумметрическим давлениями?**
- **Выведите и объясните основное уравнение гидростатики?**
- **Какие силы действуют на жидкость и какие из них учитываются в уравнении Эйлера?**
- **Что представляет собой поверхность равного давления в покоящейся жидкости?**
- **Как определяется давление на плоскую стенку?**
- **Как определяется сила давления на криволинейную стенку?**
- **Как определяется положение центра давления? В каких случаях центр давления и тяжести совпадают?**
- **Выведите и объясните закон Паскаля?**
- **Выведите и объясните закон Архимеда?**
- **Объясните три состояния тела, погруженного в жидкость?**
- **Объясните принцип действия гидравлического мультипликатора?**
- **Объясните принцип действия гидравлического домкрата?**