

**Физические основы  
функционирования  
гидросистем**

Гидростатика

# Основы гидростатики

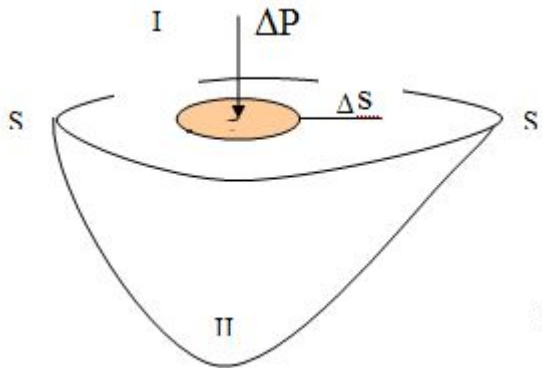
- **Гидростатикой** называют раздел гидромеханики, в котором рассматривают законы, действующие в жидкостях, находящихся в состоянии относительного покоя, т.е. когда отсутствуют перемещения частиц жидкости относительно друг друга.

# Массовые силы

- Массовые силы пропорциональны массе выделенного объема или при постоянной плотности среды пропорциональны объему. Они действуют на все частицы этого объема. Массовыми силами являются силы веса, силы инерции, электромагнитные силы.
- $$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta m}$$

# Поверхностные силы

- В покоящейся жидкости поверхностные силы направлены по нормали к элементу поверхности выделенного объема



$$\vec{p} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}^*}{\Delta s},$$


$\vec{p}$  - гидростатическое давление

# Свойства гидростатического давления

- Гидростатическое давление действует нормально к площадке действия и является сжимающим, т.е. оно направлено внутрь того объема жидкости, который мы рассматриваем.
- Гидростатическое давление  $P$  в любой точке одинаково по всем направлениям (т.е. не зависит от угла наклона площадки действия).

$$p_x = p_n = p_z = p$$

# Закон Паскаля

-  **Давление на поверхность жидкости, произведенное внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях.**
- Очевидно, что если давление не зависит от ориентации площадки, проходящей через данную точку, и определяется только положением точки в жидкости, то давление  $p$  есть функция только координат  $x, y, z$ , т. е.

$$p = f(x, y, z).$$

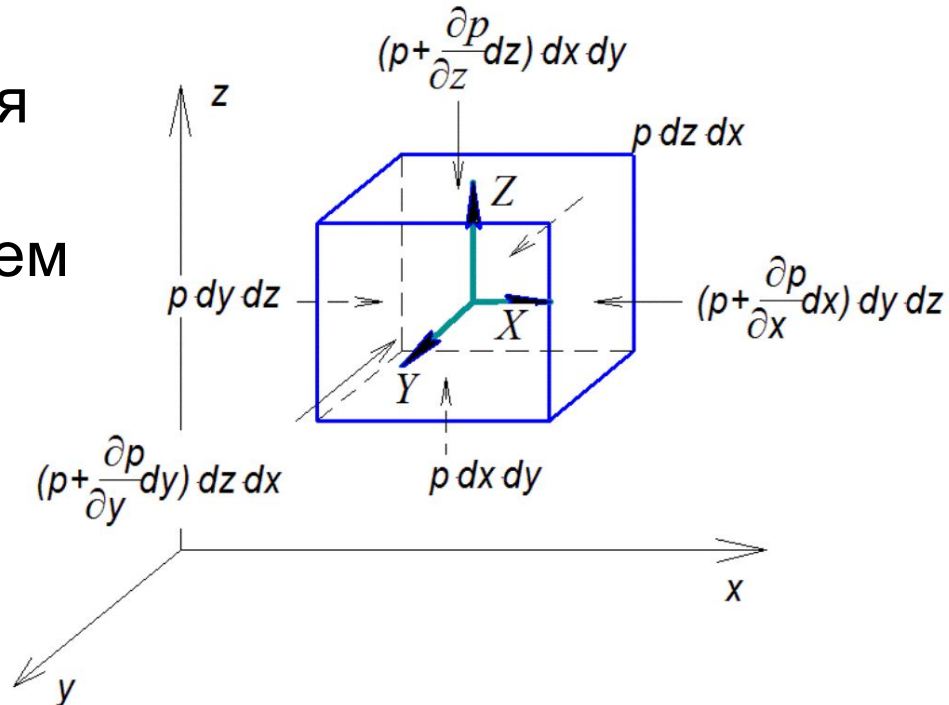
# Основное уравнение гидростатики

Пусть на единицу массы параллелепипеда действует массовая сила  $\mathbf{F}$  её составляющими  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Если на три грани, пересекающиеся в точке, будет действовать давление  $p$ , то на соответствующих противоположных гранях величины давления будут равны:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx; \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} dx; \quad p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Составив уравнения равновесия в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и приведя подобные члены, найдем :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z.$$



# Уравнения Эйлера

- Часто их записывают в следующем

виде:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

- Или в векторном виде
- $$X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k} = \vec{F}$$

где -

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k} = \text{grad } p$$



- Если уравнения системы умножить последовательно на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и сложить, то получим

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \rightarrow$$

откуда основное уравнение гидростатики:

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp$$

- Интегрируя это уравнение и считая, что плотность  $\rho$  постоянна, получим что гидростатическое давление в любой точке жидкости будет

$$p = \rho \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

# Поверхность уровня

- Если вдоль какой-либо поверхности давление неизменное, т.е.  $p = \text{const}$  или  $dp = 0$ , то такая жидкость называется поверхностью равного давления или поверхностью уровня.

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0 \quad \text{или} \quad d\Phi = 0$$

Здесь принято, что  $(Xdx + Ydy + Zdz) = d\Phi$

Т.е. массовые силы имеют потенциал и проекции массовых сил представлены в виде:

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

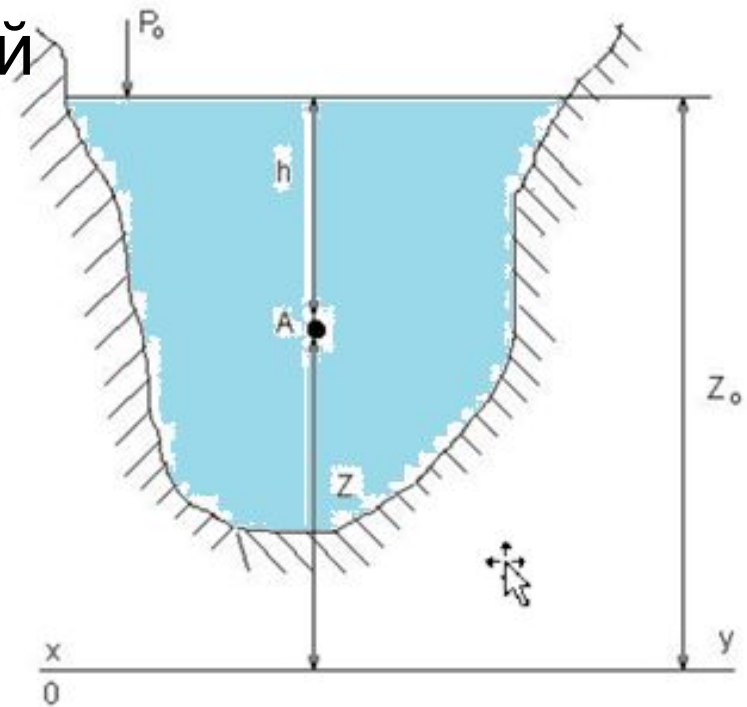
$$\rho \cdot d\Phi = dp.$$

# Равновесие несжимаемой жидкости

- Если жидкость находится в равновесии под действием собственного веса, то проекции ускорений вызванных силой тяжести для выбранных координатных осей  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z= -g$ , где  $g$ -ускорение свободного падения.
- Тогда подставляя эти значения в основное уравнение гидростатики, получим 
$$p = \rho \int (-g) dz$$

- Или проинтегрировав  $p = -\rho gz + C$  ,  
или  $p + \rho gz = C$
- где  $C$ - постоянная интегрирования.

Для определения постоянной интегрирования рассмотрим находящийся в равновесии произвольный объем жидкости плотностью  $\rho$ . На поверхности жидкости имеется давление  $p_0$ , расстояние от плоскости сравнения до  $z_0$ .

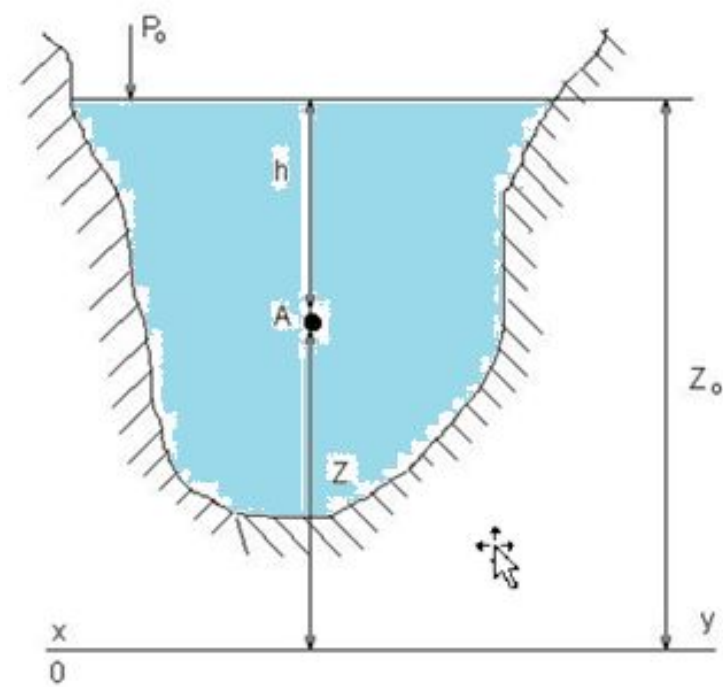


имее

$$p + \rho g z = C = p_0 + \rho g z_0$$

• Отсюда

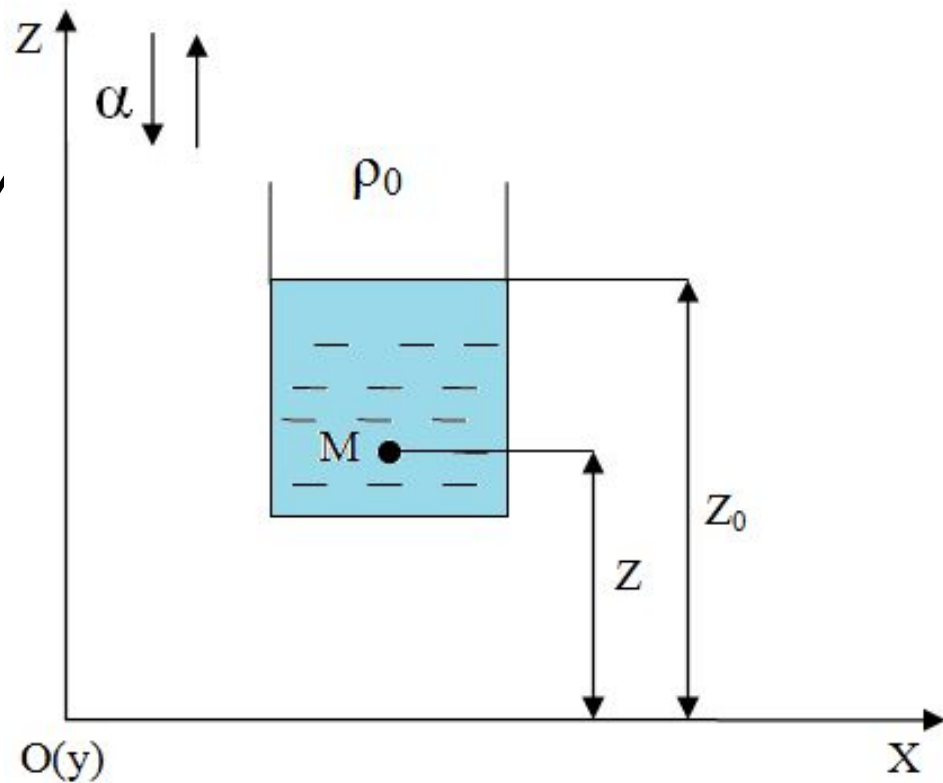
$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$



- Учитывая что  $z_0 - z = h$  получим, что для несжимаемой жидкости, находящейся в равновесии под действием силы тяжести полное гидростатическое давление в точке  $p = p_0 + \rho g h$  где  $p_0$  - внешнее поверхностное давление,  $h$  - глубина погружения точки.

# Относительное равновесие жидкости

- **Относительным равновесием** жидкости называется такое состояние, при котором каждая ее частица сохраняет свое положение относительно твердой стенки движущегося сосуда.



$$p = \rho \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$p = \text{const}; \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

# Движение по вертикали с постоянным ускорением $a$

- Проекции массовых сил на координатные оси будут:  
 $X=0, Y=0, Z=-g+a$ . Знак «-» соответствует равноускоренному подъему резервуара, «+»- спуску.
- Характер распределения давления получим следующий

$$p = \rho \int (-g \pm a) dz + C$$

где  $C$ - постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий на свободной поверхности  $Z=Z_0$  и  $P=P_0$ .

- Тогда давление в любой точке, можно определять по формуле 
$$P = P_0 + \rho g \left(1 \pm \frac{a}{g}\right) (z_0 - z)$$

# Поверхности равного давления

- Составим уравнение поверхности уровня  $-(g \pm a)dz = 0$
- Если  $g \neq 0$  то  $dz=0$ , а  $z=const$ , т.е. поверхности равного давления представляют собой горизонтальные плоскости.



# Горизонтальное перемещение резервуара с жидкостью с постоянным ускорением $a$

- В этом случае  $X = -a$ ,  
 $Y = 0$ ,  $Z = -g$ .

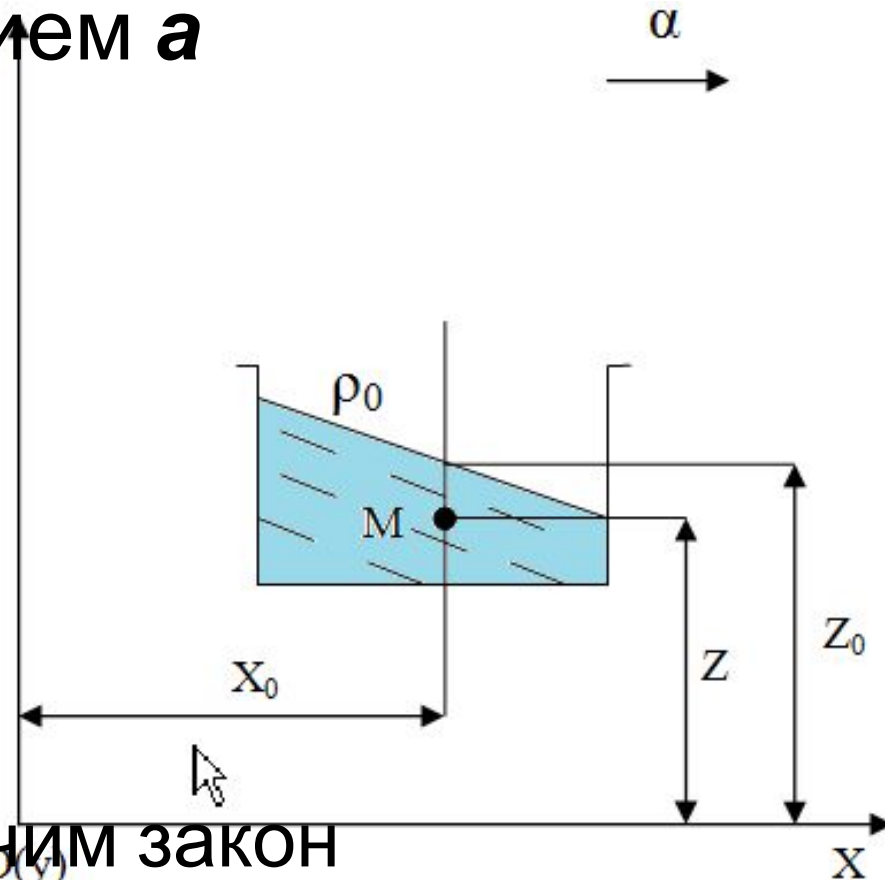
Закон распределения давления получим в виде

$$p = \rho \int [(-a)dx + (-g)dz]$$

- После интегрирования с учетом граничных

условий  $x=x_0$ ,  $z=z_0$ ,  $p=p_0$  получим закон распределения давления в следующем виде

$$p = p_0 + \rho a(x_0 - x) + \rho g(z_0 - z)$$



# Поверхность равного давления

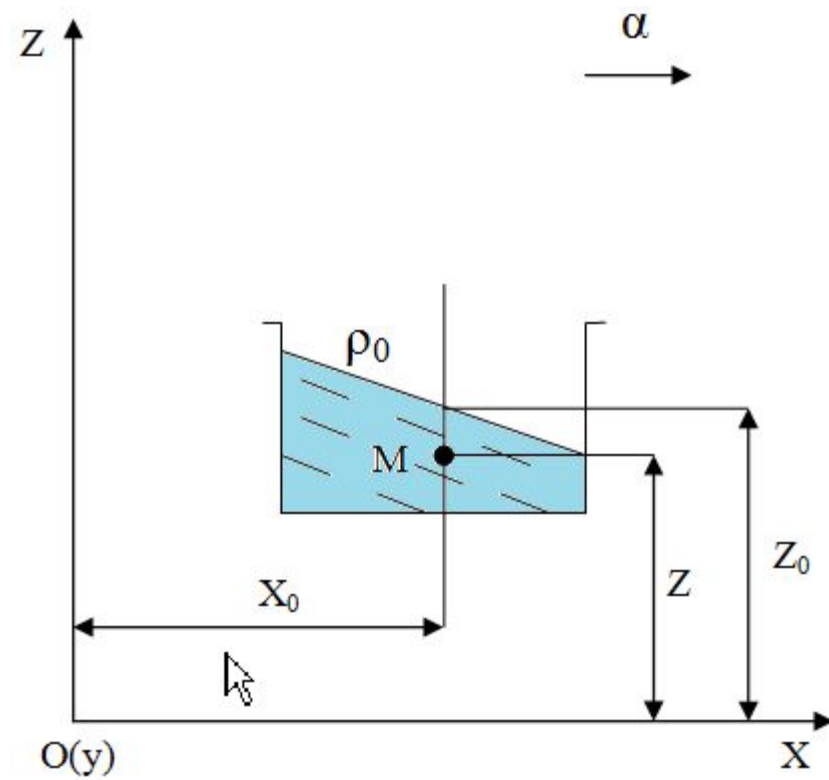
- определится уравнением  $-(adx + gdz) = 0$

После интегрирования будем иметь

$$ax + gz = const$$

Или 
$$z = const - \frac{ax}{g}$$

Т.о. поверхностями равного давления будут плоскости, углы наклона которых к горизонтальной плоскости определяются угловым коэффициентом, равным  $-a/g$



# Вращение цилиндрического сосуда с жидкостью с постоянной угловой скоростью

- В этом случае проекции массовых сил:

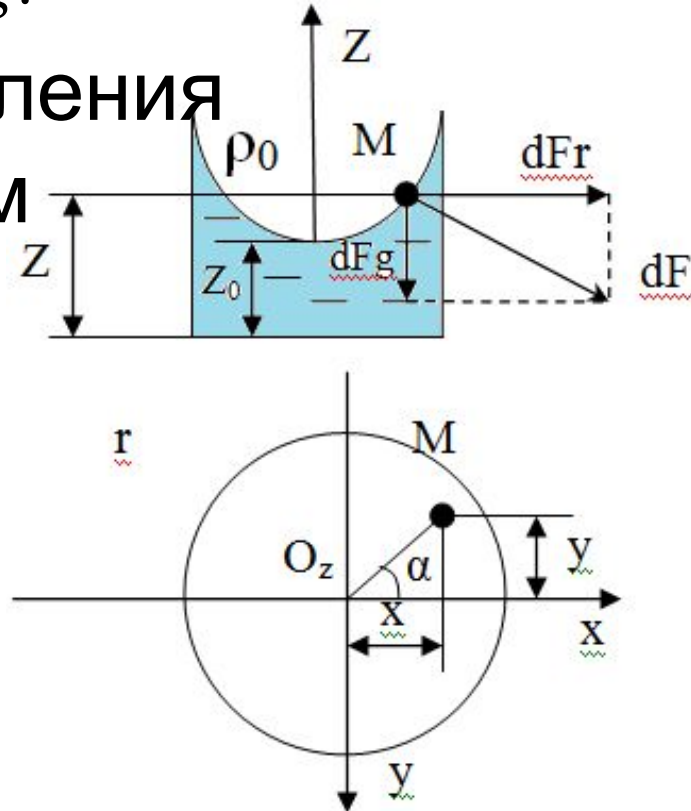
$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g.$$

- Поверхность равного давления определяется уравнением

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$$

Или проинтегрировав

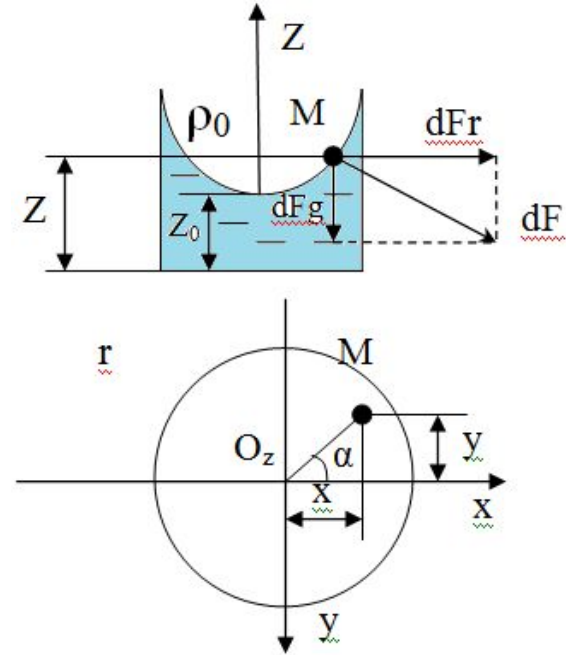
$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = \text{const}$$



Учитывая, что  $x^2 + y^2 = r^2$   
 получим  $\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = const$

• Откуда  $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + const.$

• Т.о. при вращении сосуда с жидкостью  
 вокруг вертикальной оси поверхностями  
 равного давления будет семейство  
 параболоидов вращения, осью которых  
 является ось  $Oz$ .



# Закон распределения давления

- Закон распределения давления получим

из

$$p = \rho \int (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

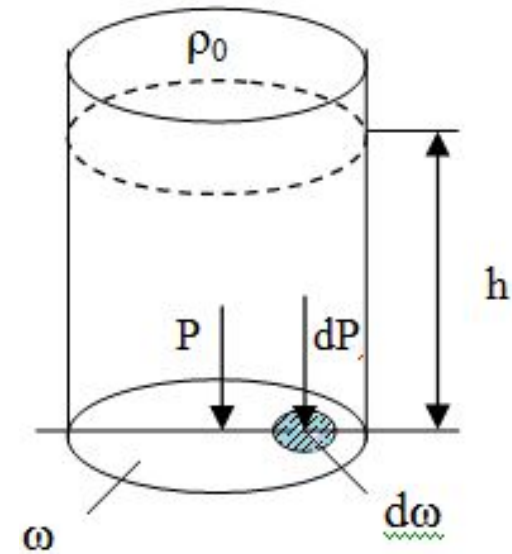
или

$$p = \rho \int (\omega^2 r dr - g dz)$$

- После интегрирования с учетом граничных условий  $r = 0, z = z_0, p = p_0$  получим закон распределения давления:  
$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g (z - z_0)$$

# Давление жидкости на плоские поверхности

- Сила давления на эту площадку  $dP = p d\omega = (p_0 + \rho gh) d\omega$ .
- Равнодействующая сила давления определится так



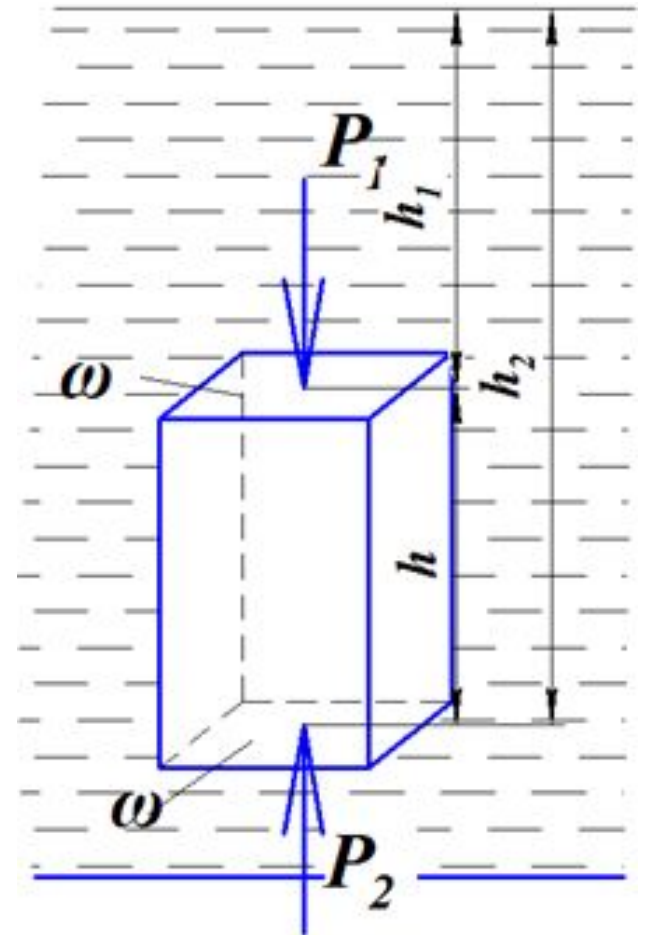
# Закон Архимеда

Рассмотрим силы давления жидкости на тело, погруженное в эту жидкость.

- сила гидростатического давления жидкости на верхнее основание  $P_1 = \rho g h_1 \omega$
- сила гидростатического давления жидкости на нижнее основание  $P_2 = \rho g h_2 \omega$

$$P = P_1 - P_2 = \rho g \omega (h_1 - h_2)$$

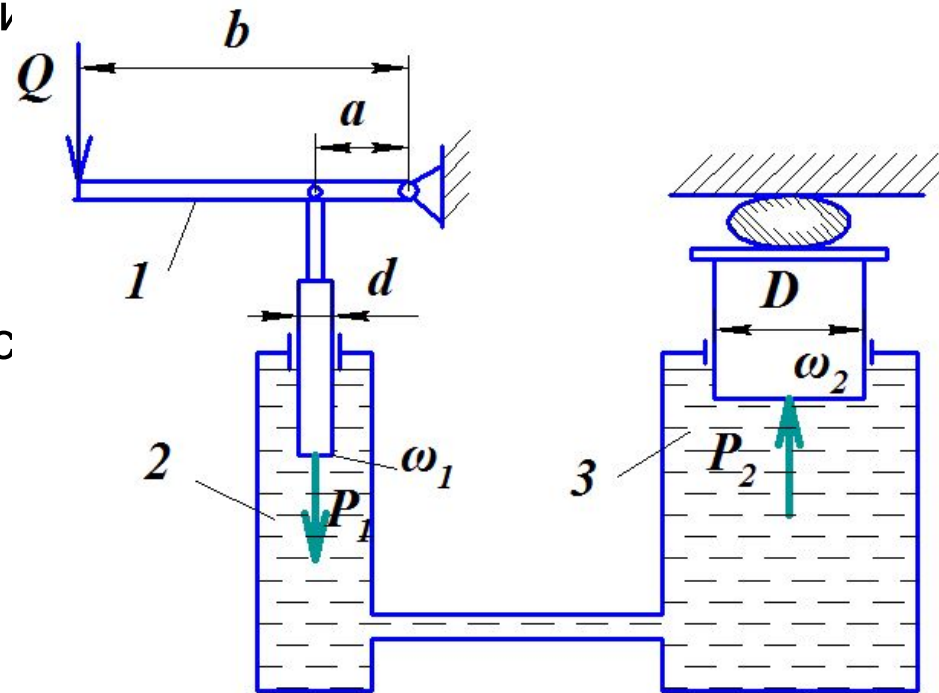
или  $P = \rho g V$



# Домкрат

- В машиностроении широко используется передача энергии и давления с помощью различных гидравлических механизмов, в которых применяются одни и те же принципы работы, основанные на практической не сжимаемости жидкости (высоком модуле упругости) и преобразовании сил по закону Паскаля.
- Для анализа особенностей работы домкрата рассмотрим рисунок.
- Так как давление от приложенной внешней силы по закону Паскаля равномерно распространяется во все стороны, то под действием силы  $P_1$  жидкость вытесняется в соседний сосуд под давлением  $p = F_1/\omega_1$  и действует на поверхность поршня площадью  $\omega_2$  с силой, равной

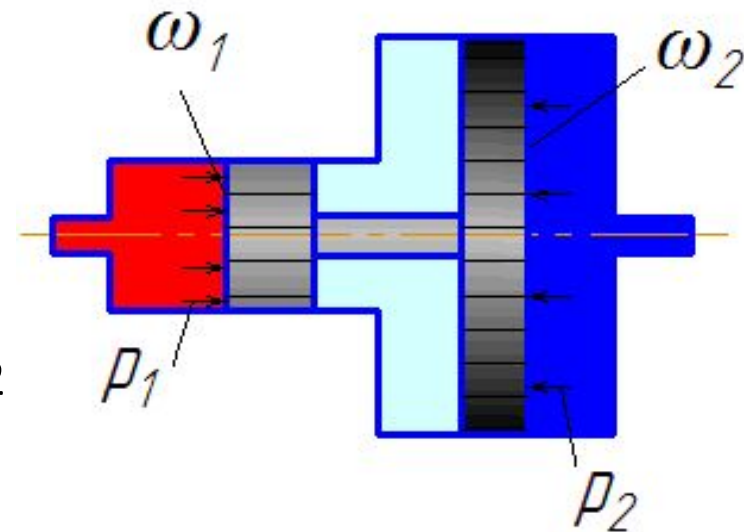
$$P_2 = P_1 \cdot \omega_2 / \omega_1, \text{ при этом}$$
$$P_2 / P_1 = \omega_2 / \omega_1.$$





# Мультипликатор

- Применяется для повышения давления в отдельных элементах гидросистемы, например, в различных приспособлениях. На поверхность площадью  $\omega_2$  действует давление  $p_2$  и возникает сила  $F$ , которая через шток передается на поверхность площадью  $\omega_1$ . В результате возникает давление  $p_1 = F / \omega_1$ , т. е.  
$$p_1/p_2 = \omega_2/\omega_1$$



# Равновесие тел погруженных в жидкость

На тело, погруженное полностью или частично в жидкость, действуют две силы:

Сила тяжести тела  $G$ , приложенная в его центре тяжести  $C$ .

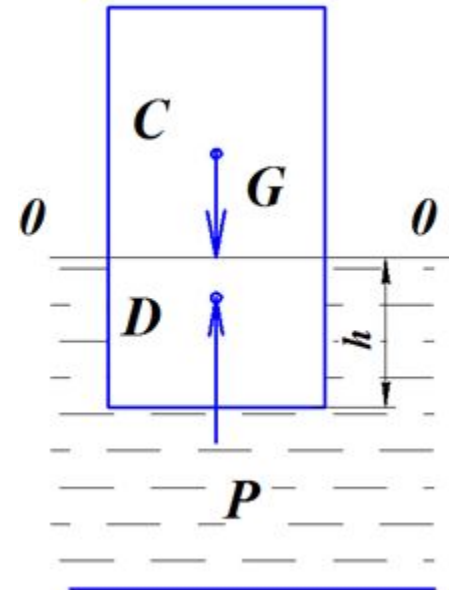
Выталкивающая сила  $P$ , приложенная в центре давления или, как называют еще, в центре водоизмещения  $D$ . Центром водоизмещения является центр тяжести вытесненного объема жидкости.

В зависимости от соотношения сил  $G$  и  $P$  могут быть три состояния тела.

Если  $G$  больше  $P$ , тело тонет.

Если  $G=P$ , тело находится внутри жидкости в безразличном состоянии (тело плавает в погруженном состоянии).

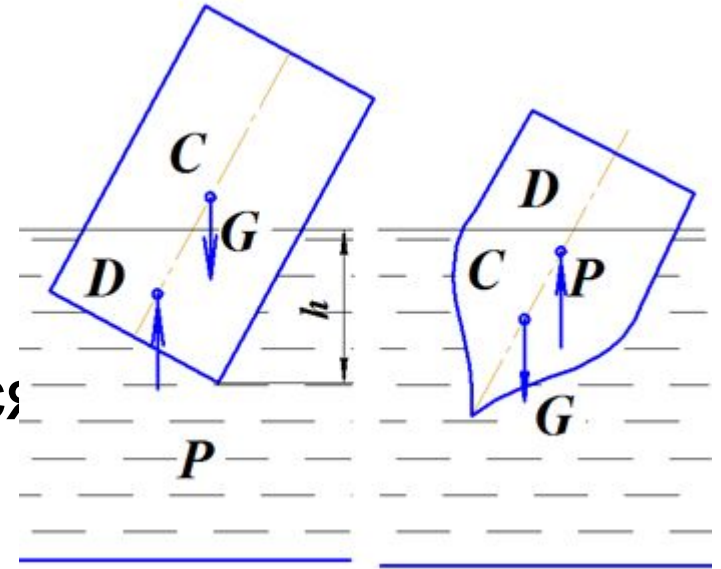
Если  $G$  меньше  $P$ , то тело всплывает до тех пор, пока сила тяжести вытесненной жидкости не станет равна силе тяжести тела  $G$ .



- Для равновесия тела, плавающего на свободной поверхности, необходимо, чтобы центр тяжести и центр давления (водоизмещения) лежали на одной вертикали. В случае когда центр тяжести тела и центр давления не лежат на одной вертикали (например, при крене тела), появляется пара сил  $P$  и  $G$ , которая стремится вращать тело.

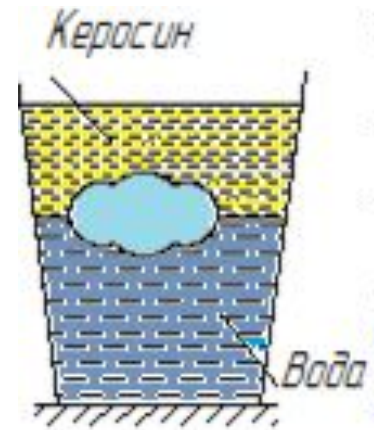
- **Остойчивостью**

плавающего тела называется его способность возвращаться в исходное положение после получения некоторого крена.



# Задача

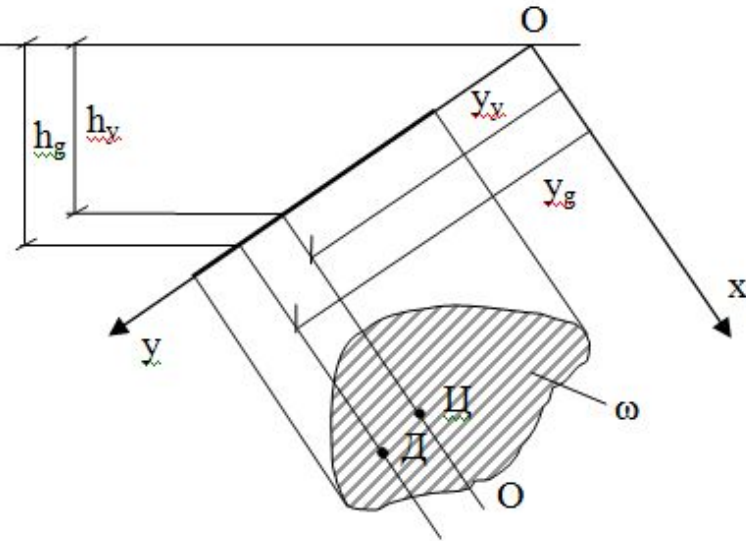
- *Кусок парафина объемом  $V$  находится между водой и керосином. Какая часть объема парафина находится в воде, если плотность керосина  $0,8 \text{ т/м}^3$ , а парафина  $0,9 \text{ т/м}^3$ ?*



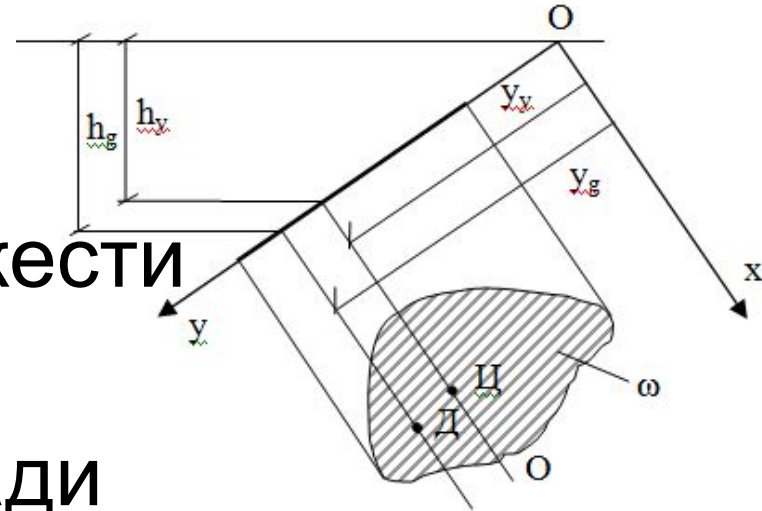
# Сила гидростатического давления на плоскую поверхность

- Сила гидростатического давления на плоскую поверхность  $P = (p_0 + \rho g h_y) \omega$ ,
- где  $h_y$  - глубина погружения центра тяжести смоченной части площади поверхности;
- $\omega$  - площадь смоченной части поверхности.

$P_1 = \rho g h_y \omega$  - сила избыточного давления при  $p_0 = p_{ат}$



- Итак сила избыточного давления  $P = \rho g h_y \omega$
- Эта сила приложена в центре давления, координата которого определяется по формуле  $y_g = y_{\text{ц}} + \frac{I_0}{\omega y_{\text{ц}}}$



$y_{\text{ц}}$  - координата центра тяжести смоченной поверхности;

$I_0$  - момент инерции площади смоченной части поверхности относительно горизонтальной оси, проходящей через центр ее тяжести.

# Сила гидростатического давления на криволинейную поверхность

- Сила гидростатического давления на

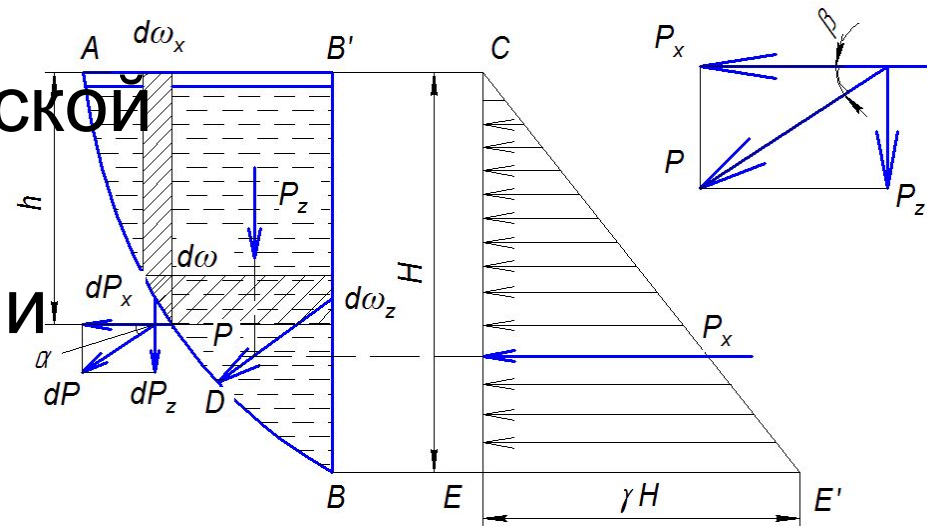
криволинейную поверхность  $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$

где  $P_x, P_y, P_z$  - составляющие силы избыточного давления по соответствующим осям.

- В случае цилиндрической поверхности

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

$P_x$  и  $P_z$  - горизонтальная и вертикальная составляющие силы  $P$ .

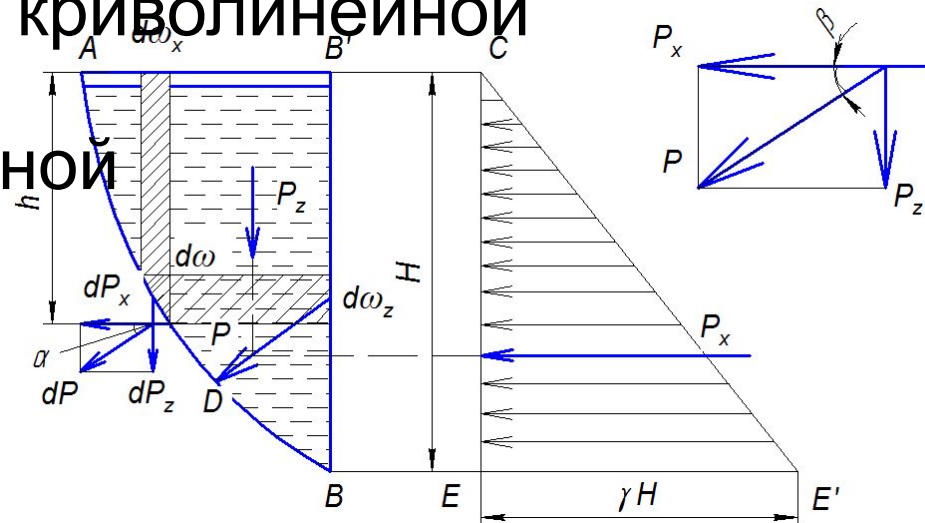


# Горизонтальная составляющая

## составляющая

- Горизонтальная составляющая избыточного давления  $P_x$  равна силе давления на вертикальную проекцию криволинейной поверхности  $P_x = (p_m + \rho g h_{\perp}) \omega_z$

- $P_M$  - манометрическое давление на поверхности жидкости;
- $h_{\perp}$  - глубина погружения центра тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности
- $\omega_z$  - площадь вертикальной проекции.





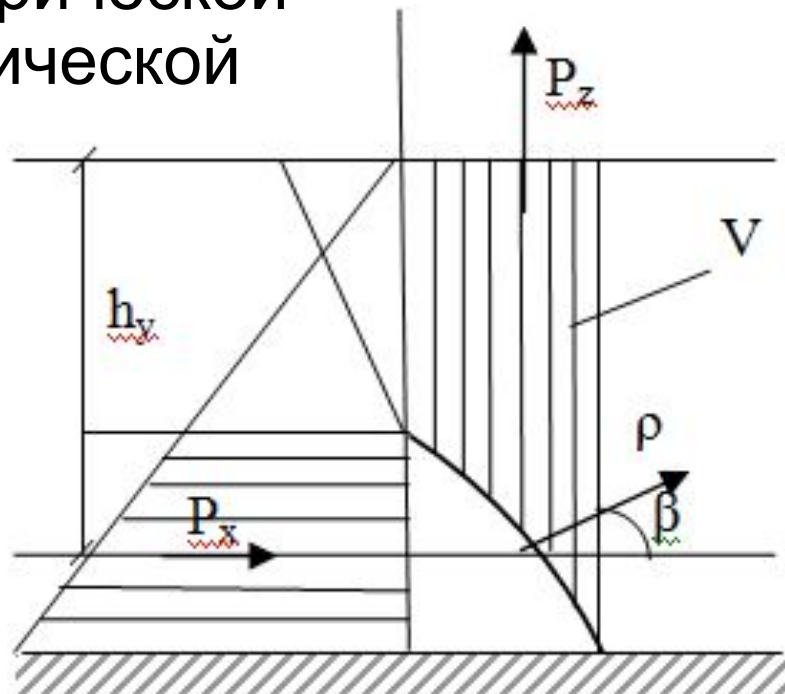
# Вертикальная составляющая

- Вертикальная составляющая  $P_z$  равна весу жидкости в объеме тела давления  $V$ :

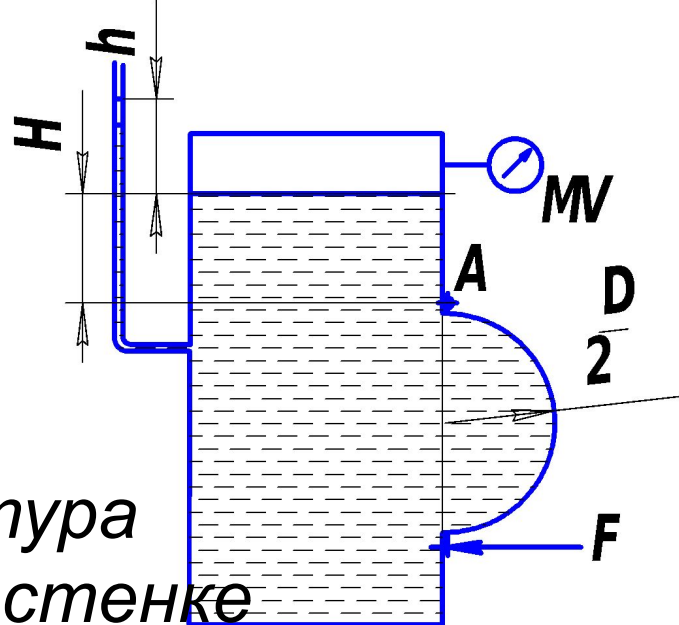
$$P_z = \rho \cdot g \cdot V$$

- Тело давления расположено между вертикальными плоскостями, проходящими через крайние образующие цилиндрической поверхности, самой цилиндрической поверхностью и свободной поверхностью жидкости или ее продолжением.

$$\operatorname{tg} \beta = P_z / P_x$$



# Задача



- *Закрытый резервуар заполнен дизельным топливом, температура которого  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В вертикальной стенке резервуара имеется прямоугольное отверстие ( $D \times B$ ), закрытое полуцилиндрической крышкой. Эта крышка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси A. Манометр MV показывает манометрическое давление  $p_M$ . Глубина топлива над крышкой равна  $H$ . Пренебрегая силой тяжести крышки, определить усилие  $F$ , которое необходимо приложить к нижней части крышки, чтобы она не открывалась. Показать векторы действующих сил.*

# Контрольные вопросы

- 
- **Что такое гидростатическое давление, какими свойствами оно обладает и в каких единицах оно измеряется?**
- **Охарактеризуйте свойства гидростатического давления?**
- **Каковы соотношения между абсолютным, избыточным, атмосферным и вакуумметрическим давлениями?**
- **Выведите и объясните основное уравнение гидростатики?**
- **Какие силы действуют на жидкость и какие из них учитываются в уравнении Эйлера?**
- **Что представляет собой поверхность равного давления в покоящейся жидкости?**
- **Как определяется давление на плоскую стенку?**
- **Как определяется сила давления на криволинейную стенку?**
- **Как определяется положение центра давления? В каких случаях центр давления и тяжести совпадают?**
- **Выведите и объясните закон Паскаля?**
- **Выведите и объясните закон Архимеда?**
- **Объясните три состояния тела, погруженного в жидкость?**
- **Объясните принцип действия гидравлического мультипликатора?**
- **Объясните принцип действия гидравлического домкрата?**