

Формула Эйлера

Формула Эйлера названа в честь Леонарда Эйлера, который её ввёл, и связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями.

Формула Эйлера утверждает, что для любого действительного числа x выполнено следующее равенство:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x ,$$

где e - основание натурального логарифма,
 i - мнимая единица.

Производные формулы

При помощи формулы Эйлера можно определить функции \sin и \cos следующим образом:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Далее можно ввести понятие тригонометрических функций комплексной переменной.

Пусть $x = iy$, тогда:

$$\sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \operatorname{sh} y$$

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y$$

Известное тождество Эйлера, связывающее пять фундаментальных математических констант:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

является частным случаем формулы Эйлера при $x = \pi$.

Применение в комплексном анализе

Благодаря формуле Эйлера появилась так называемая тригонометрическая и показательная запись комплексного числа:

$$x = a + ib = |x|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |x|e^{i\varphi}$$

Также значительным следствием можно считать формулы возведения комплексного числа в произвольную степень:

, $x = |x|e^{i\varphi}$. $x^n = |x|^n e^{ni\varphi}$ кий смысл данной формулы следующий: при возведении числа x в степень n его расстояние до центра возводится в степень n , а угол поворота относительно оси **OX** увеличивается в n раз.

Взаимосвязь с тригонометрией

Формула Эйлера предоставляет связь между математическим анализом и тригонометрией, а также позволяет интерпретировать функции синуса и косинуса как взвешенные суммы экспоненциальной

функции:

$$\sin x = \operatorname{Im}\{e^{ix}\} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

$$\cos x = \operatorname{Re}\{e^{ix}\} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Вышеуказанные уравнения могут быть получены путем сложения или вычитания формул Эйлера :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$