

Формула полной вероятности. Теорема гипотез.



1. Формула полной вероятности

является следствием теорем – сложения и умножения вероятностей

Требуется определить вероятность некоторого события A , которое может произойти вместе с одним из событий:

$$\blacktriangleright H_1, H_2, \dots, H_n$$

образующих полную группу несовместных событий.

Будем эти события называть гипотезами.

Докажем, что

$$\blacktriangleright P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) \quad (1)$$

Т.е. вероятность события вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе.

Доказательство:

Так как гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез:

$$\blacktriangleright A = H_1 A + H_2 A + \dots + H_n A$$

Так как гипотезы несовместны, то и комбинации $H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$ также несовместны;

применяя к ним теорему сложения, получим:

$$\blacktriangleright P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \dots + P(H_n A) = \sum_{i=1}^n P(H_i A)$$

Применяя теорему умножения, получим

$$\blacktriangleright P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

▶ Ч.т.д.

Пример 1

Имеются три одинаковые на вид урны; в первой урне два белых и один черный шар; во второй – три белых и один черный; в третьей – два белых и два черных шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

□ Решение.

Событие A – вынутый шар белый

H_1 - выбор первой урны, H_2 - выбор второй урны, H_3 - выбор третьей урны

Так как гипотезы, по условию задачи, равновозможные, то

$$\square P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

Условные вероятности события при этих гипотезах соответственно равны:

$$P(A/H_1) = \quad P(A/H_2) = \quad P(A/H_3) =$$

$$P(A) = ?$$

Пример 2.

По самолету производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при

первом выстреле равна 0,4,

при втором – 0,5, при

третьем - 0,7.

Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий;

при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2,

при двух попаданиях – с вероятностью 0,6.

Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

Решение :

A - самолет будет выведен из строя

Рассмотрим гипотезы:

H_0 - в самолет не попало ни одного снаряда,

H_1 - в самолет попал один снаряд,

H_2 - в самолет попало два снаряда,

H_3 - в самолет попало три снаряда.

Пользуясь теоремами сложения и умножения, найдем вероятности этих гипотез:

$$P(H_0) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09;$$

$$P(H_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36;$$

$$P(H_2) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,41;$$

$$P(H_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

$$P(A | H_0) = 0; P(A | H_1) = 0,2; P(A | H_2) = 0,6; P(A | H_3) = 1,0$$

2. Теорема гипотез (формула Байеса)

является следствием теорем умножения и формулы полной вероятности

Пусть H_1, H_2, \dots, H_n - полная группа несовместимых гипотез

Вероятности гипотез до опыта известны

$$P(H_1) P(H_2) \dots P(H_n)$$

Произведен опыт, в результате которого наблюдается появление некоторого события .

Как следует изменить вероятности гипотез в связи с появлением этого события?

Необходимо найти условную вероятность $P(H_i | A)$

Из теоремы умножения имеем:

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i | A) = P(H_i)P(A | H_i)$$

$$P(A)P(H_i | A) = P(H_i)P(A | H_i)$$

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i)} \quad 2)$$

▣ **Пример 3.**

- ▣ 30% приборов собирает специалист высокой квалификации и 70% специалист средней квалификации. Надежность работы прибора, собранного специалистом высокой квалификации, 0,9, надежность прибора, собранного специалистом средней квалификации, 0,8. Взятый прибор оказался надежным. Вычислить вероятность того, что он собран специалистом высокой квалификации.

1. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

2. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно, 1 – неудовлетворительно. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно – на 10, неудовлетворительно – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично, б) неудовлетворительно.

3. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0.9, для велосипедиста – 0.8, для бегуна – 0.75. Найти вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен выполнит норму.

В понедельник, после двух выходных, токарь Григорий выточивает левовинтовые шурупы вместо обычных правовинтовых с вероятностью 0.5. Во вторник этот показатель снижается до среднецехового - 0.2. В остальные дни недели Григорий ударно трудится и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10 %. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Григорием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник?