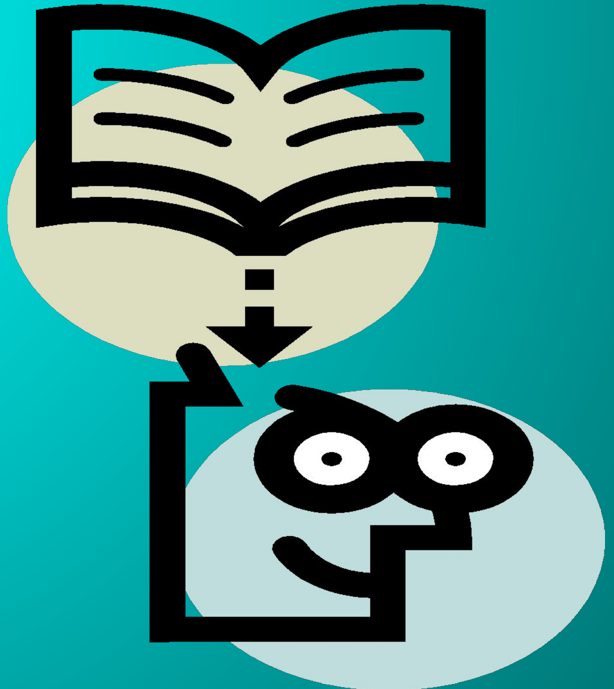
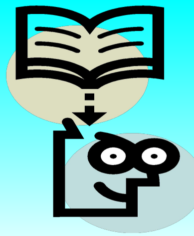
Функции



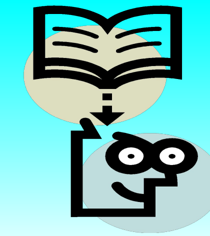
Автор Календарева Н.Е.

План



1. Определение функции
2. Область определения функции
3. Множество значений
4. Способы задания функции
5. График функции, определение и теоремы
6. Четность, нечетность функции
7. Монотонные функции

Определение функции



Пусть дано числовое множество X и его элемент $x \in X$, который назовем *переменной* величиной.

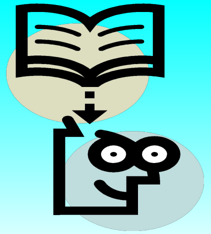
Множество X всех значений, которые мо-жет принимать данная переменная величина x, называется *областью изме-нения* данной переменной величины x.

Переменные величины принято обозна-чать маленькими латинскими буквами, расположенными в конце алфавита.

Пусть дано некоторое множество Y и y – его элемент.

Если каждому значению переменной x из множества X ставится в соответствие по известному закону (или правилу) некоторое число y, единственное для каждого x, то говорят, что на множестве X задана *функция* $y = y(x)$.

К примеру, в качестве правила можем взять возведение в квадрат переменной x.



Если закон обозначен буквой *f*, то пишут

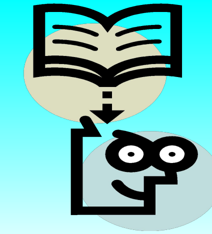
$$y = f(x).$$

При этом переменная *x* называется *аргументом* функции или независимой переменной, множество *X* – *областью определения* (областью задания) функции.

Множество значений

Аргумент $x \in X$, элемент y принадлежит Y и должен определяться однозначно.

Число y, соответствующее данному значению x, называется *частным значением* функции в точке x. Совокупность всех частных значений образует вполне определенное множество, которое называют областью значений или *множеством значений* функции и обозначают $E(y)$.



Множество *Е* может совпадать с *У*, а может и не совпадать. Например,

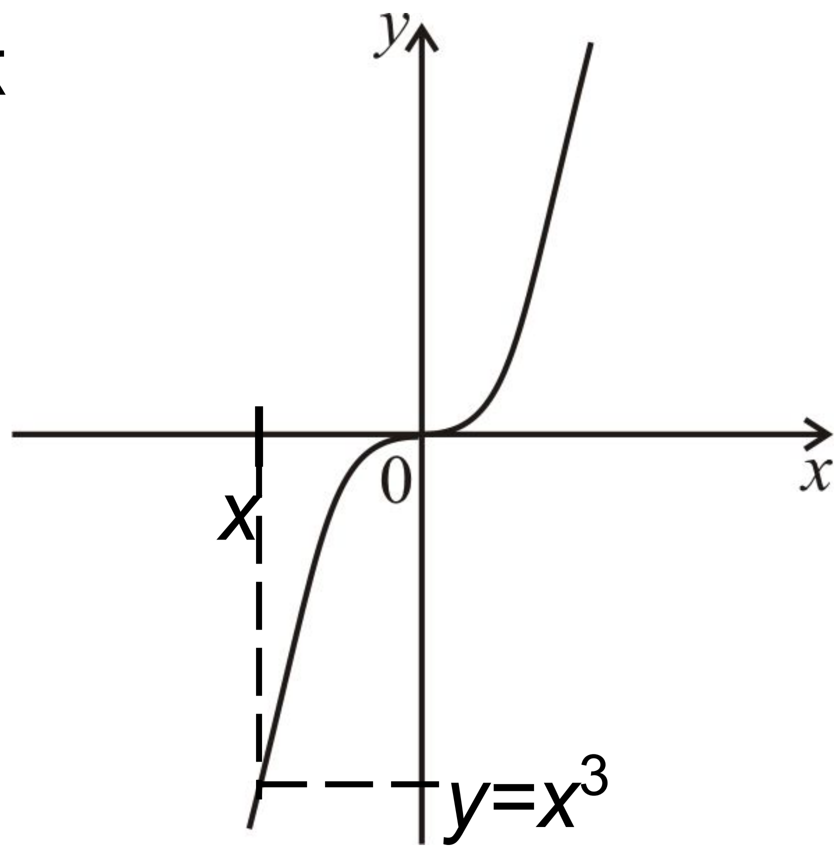
пусть Х = ***R*** и *Y* = ***R***. Пусть функция есть возведение в квадрат, т. е. $y = x^2$.

Тогда множество значений – все неотрицательные числа

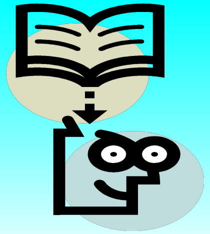
$E(y) = [0; +\infty)$.

Что значит, каждому значению переменной *x* ставится в соответствие единственное число *y*?

Рассмотрим график функции $y = x^3$.



Обозначения и примеры



$x \in X$, где $X = D(f) = Def(f)$.

$y \in Y$, где $Y = E(f) = E(y)$.

Примеры функций

1. *Целой частью* числа *x* (обозначается [x] и читается **антье** от x) называется наибольшее целое число, не превосходящее *x*:

   $f(x) = [x]$. $Def(f) = \mathbf{R}$; $E(f) = \mathbf{Z}$.

2. Разность $x - [x]$ называют *дробной частью* числа x и обозначают $f(x) = \{x\}$. $Def(f) = \mathbf{R}$; $E(f) = [0; 1)$.

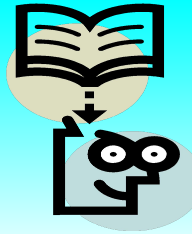
3. $f(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

4. $y = \sin x$.

5. $y = \dfrac{x^2 - 1}{2 - x}$.

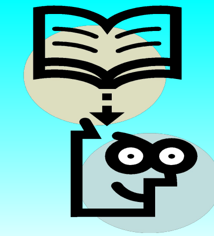
6. $y = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 1}$.

Способы задания функций



1. Табличный
2. Аналитический, т.е. при помощи формулы
3. При помощи нескольких формул
4. Графический способ
5. Словесное задание функции

При помощи нескольких формул



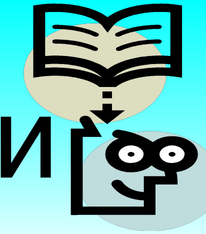
Функция Дирихле:

$y = 1$, если x – рациональное число,

$y = 0$, если x – иррациональное число.

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } |x| \le 1; \\ -|x| + 2, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

Словесное задание функции



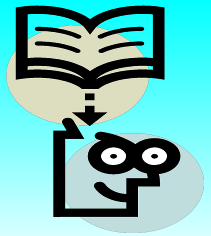
Примеры

1. $f(n)$ равно n-му десятичному знаку в разложении $\sqrt{2}$ в бесконечную десятичную дробь

   $\sqrt{2}$ = 1,4142…; $f(1) = 4$; $f(2) = 1$; $f(3) = 4$;

2. $f(x) = [x]$ (антье от x) – наибольшее целое число, не превосходящее данного действительного числа x.

Графический способ задания функции

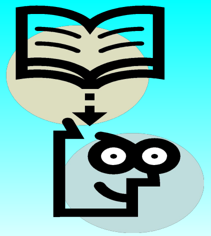


Определение графика функции.

Графиком функции $y = f(x)$, где $x \in Def(y)$, называется множество точек координатной плоскости XOY, абсциссы которых принадлежат области определения, а ординаты равны соответствующим значениям функции:

$x \in Def(y)$, $y = f(x)$. Множество точек плоскости $(x; f(x)) = (x; y)$ есть график.

Примеры и теорема



Графиком $y = x^2$ является парабола, а графиком функции $y = kx + b$ – прямая.

Основное свойство графика (теорема)

Всякая вертикальная прямая пересекает график не более чем в одной точке.

Док-во. **I.** Пусть дан график $y = f(x)$.

Если для какой-то точки x_0 найдутся две различные точки графика, то будем иметь

$y_1 = f(x_0) \neq y_2 = f(x_0)$, что невозможно по определению функции.

II. Обратно. Пусть множество *G* точек на плоскости таково, что каждая вертикальная прямая пересекает его не более чем в одной точке. Докажем, что множество *G* является графиком некоторой функции.

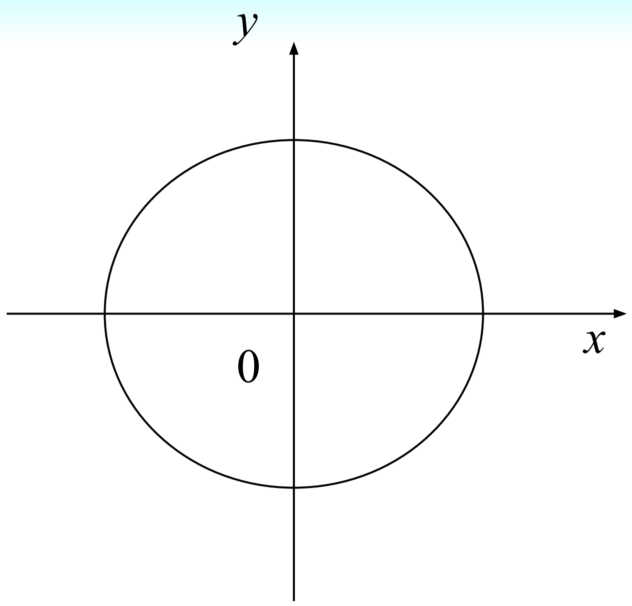
Спроектируем множество *G* на ось абсцисс и обозначим проекцию через *A*. Назовем *A* областью определения функции.

Пусть $x \in A$.

Сопоставим ему элемент y следующим образом:

проведем вертикальную прямую через точку (x; 0). Она пересечет множество G в одной точке, ординату которой назовем y. Получили закон $x \to y$. Это число y удовлетворяет определению функции.

Окружность



$$x^2 + y^2 = r^2\ ;$$

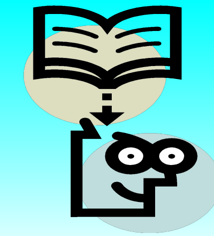
$$y^2 = r^2 - x^2;$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}\ ;$$

$$y_1 = +\sqrt{r^2 - x^2}\ ;\quad y_2 = -\sqrt{r^2 - x^2}\ .$$

Здесь два графика: верхняя полуокружность y_1 и нижняя полуокружность y_2.

Равенство функций

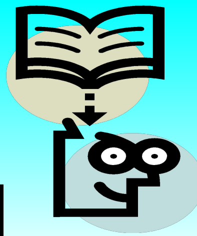


Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X_1, а функция $g(x)$ – на множестве X_2. Предположим, что пересечение множеств X_1 и X_2 не пусто, т.е. $X = X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *равными* на множестве X, если для всякого $x \in X$ равны их значения, т.е.

$$\forall\ x \in X\ \ (\ f(x) = g(x)\ ).$$

Сумма, разность, произведение и частное двух функций



Суммой функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X называется функция $h(x)$, которая для каждого $x \in X$ принимает значение, равное сумме значений функций $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $\forall\ x \in X\ (\ h(x) = f(x) + g(x)\ )$.

Аналогично определяется разность, произведение и частное двух функций, при этом для частного оговаривается условие, что функция, стоящая в знаменателе, не равна нулю.

Симметричное множество

Определение. Числовое множество *M* называется *симметричным* относительно начала координат, если для любого действительного числа

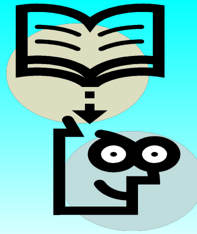
$a \in M$ число $-a$ также принадлежит множеству М.

$$a \in M \Rightarrow -a \in M.$$

Примеры. $[-1; 1]$,

$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $(-5; -2] \cup [2; 5)$.

Четная функция



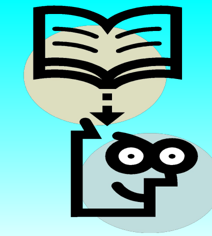
Определение. Функция $f(x)$ называется *четной*, если

1) ее область определения симметрична относительно нуля, и

2) имеет место равенство $f(-x) = f(x)$.

Другое опр-ние. Функция $f(x)$, заданная на множестве X, называется *четной*, если для любого числа $x \in D(f)$ число $-x$ также принадлежит $D(f)$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$.

Нечетная функция



Определение. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если

1) ее область определения симметрична относительно нуля, и

2) имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$.

***Другое опр-ние*.** Функция $f(x)$, заданная на множестве X, называется *нечетной*, если для любого числа $x \in D(f)$ число $-x$ также принадлежит $D(f)$ и имеет место равенство

$f(-x) = -f(x)$.

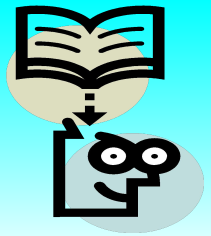
Бывают функции с несимметричной относительно нуля областью определения.

Например. Определите, является ли функция

y = $\sqrt{x}$ четной или нечетной.

Решение. О.о. есть [0; +∞) – несимметричное множество. Не является. Или говорят, что четность не определяется.

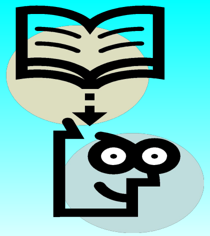
Как определять четность/ нечетность



Если у функции область определения симметрична относительно нуля, то проверяем равенства $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$. Для этого в формулу для y подставим вместо x число $-x$.

Итак, чтобы определить четность (нечетность) функции, необходимо

1) проверить на симметричность ее О.О.;
2) вычислить $f(-x)$.



Если $f(-x) = f(x)$, то четная.

Если $f(-x) = -f(x)$, то нечетная.

Определите, являются ли следующие функции четными или нечетными.

1) $y = x^2$;

2) $y = |x|$;

3) $y = x^3$;

4) $y = \sin 2x$;

Примеры

Определите, являются ли следующие функции четными или нечетными.

5) $y = x^2 + 1$;

6) $y = x^3(x - 1)$;

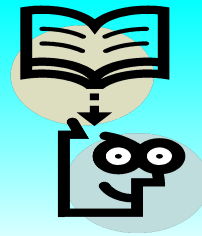
7) $y = x^2 - x^3$;

8) $y = 2(x^2 - x)$;

9) $y = 3x^3 + x^5$;

10) $y = x \cdot |x|$.

График четной функции

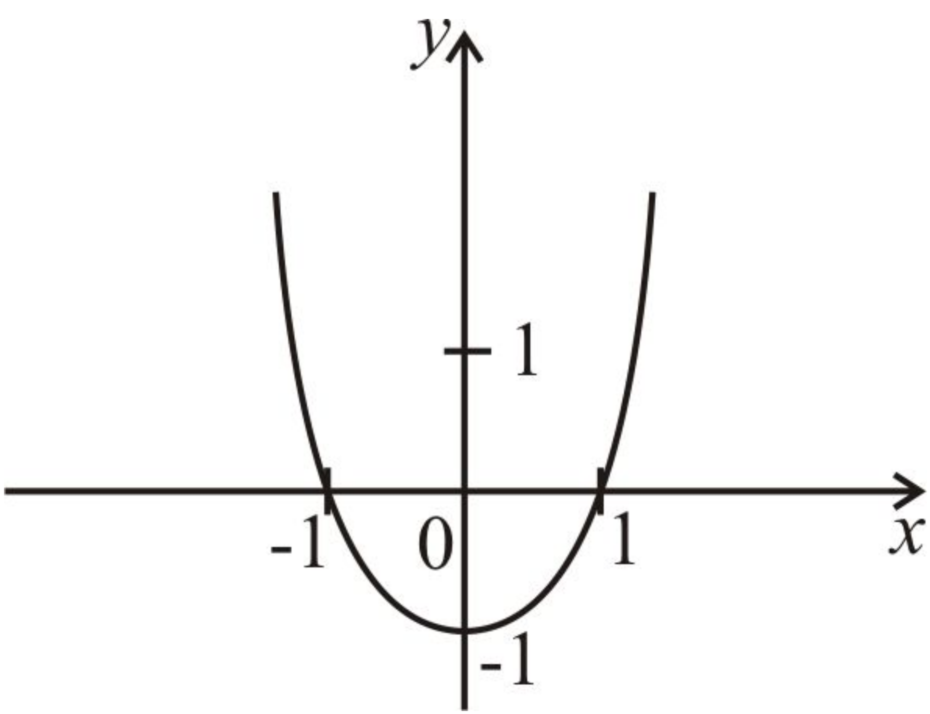


Так как для четной функции выполнено равенство $f(-x) = f(x)$, то ее *график симметричен относительно оси Оу*. Это значит, что та часть графика, которая расположена в правой полуплоскости, отображена зеркально относительно оси Оу в левую полуплоскость.

Примеры четных функций

$y = x^2 - 1.$

$y = \sqrt{|x|}$



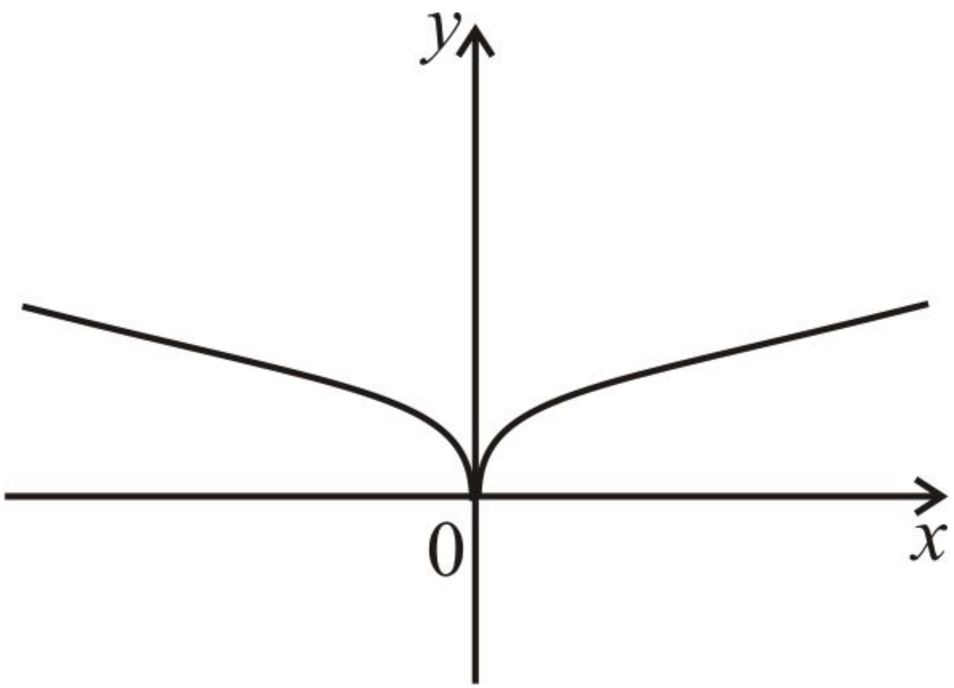
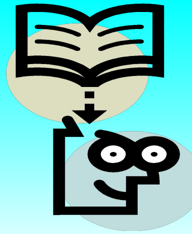


График нечетной функции



Поскольку для нечетной функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, то ее *график симметричен относительно начала координат*.

Две точки на координатной плоскости называются *симметричными* относительно начала координат, если начало координат является серединой отрезка, соединяющего эти две точки.

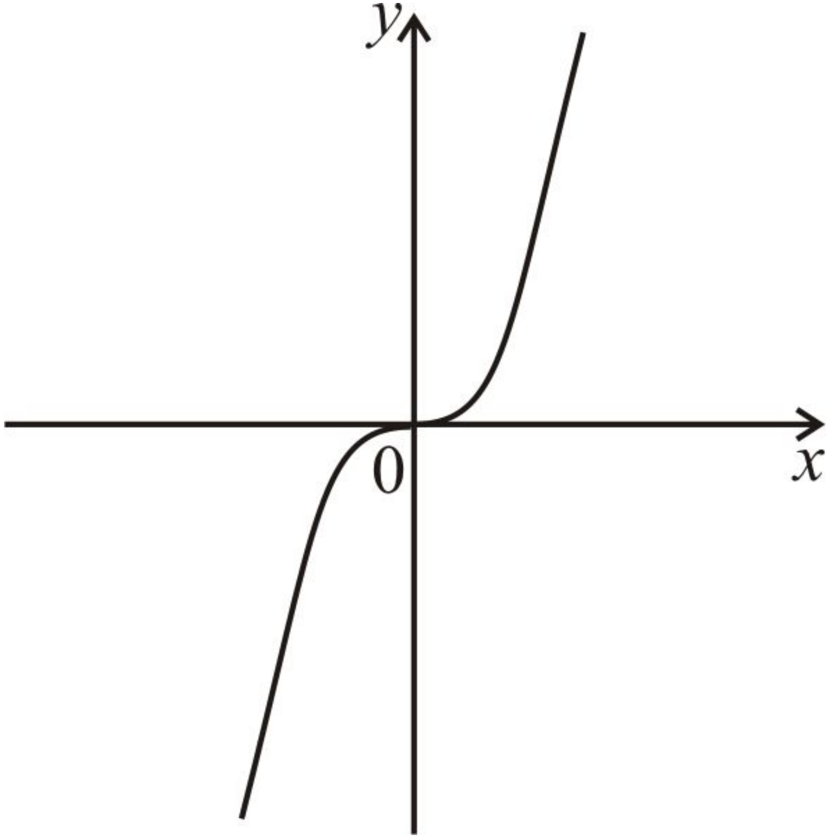
Точка A_1 будет симметрична точке $A(x_0;\ y_0)$ относительно начала координат, если она имеет координаты $A_1(-\ x_0;\ -\ y_0)$.

Найдите точку, симметричную точке

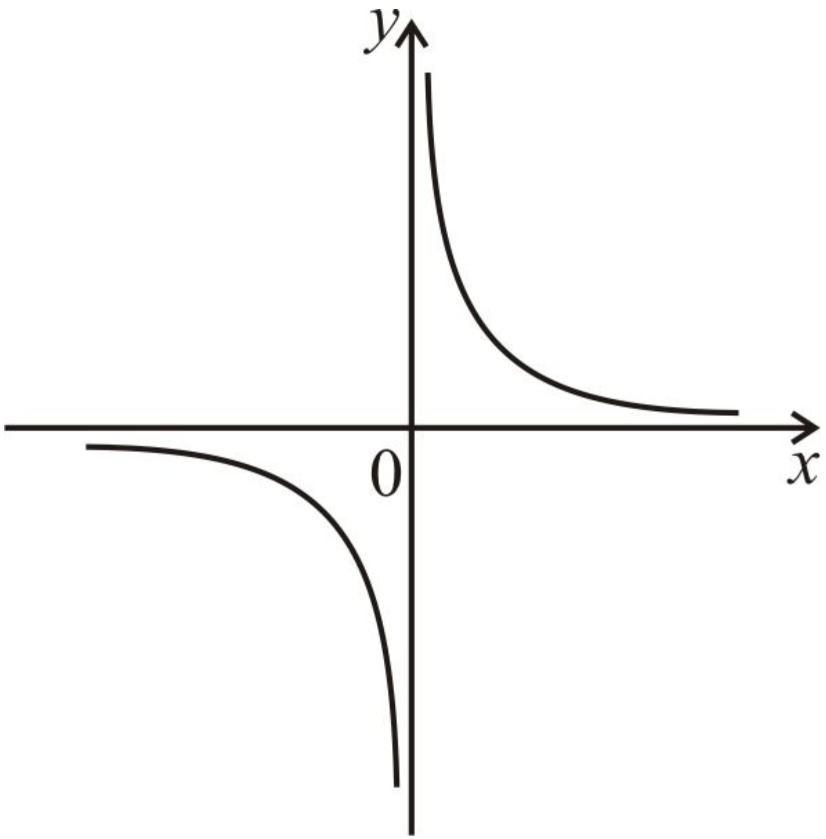
1) (-5; 2);
2) (0; 3);
3) (-4; 0);
4) (1; 1).

Примеры нечетных функций

$y = x^3$



$y = 1/x$



Теорема

Всякая функция f(x) с областью определения, симметричной относительно начала координат, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

Док-во. Составим две вспомогательные функции $g(x)$ и $h(x)$.

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\,(f(x) + f(-x))\ ;$$

$$h(x) = \tfrac{1}{2}\,(f(x) - f(-x)).$$

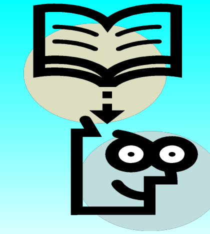
Функция $g(x)$ – четная.

Функция $h(x)$ – нечетная.

Сложим $g(x) + h(x)$, получим $f(x)$.

Теорема доказана.

Некоторые теоремы о четности (нечетности)



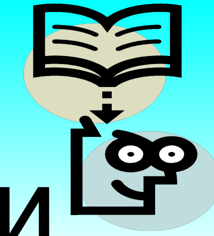
Т.1. Сумма (разность) двух четных функций есть функция четная.

Т2. Произведение (частное) двух четных функций также является четной функцией.

Т3. Сумма (разность) двух нечетных функций является также нечетной функцией.

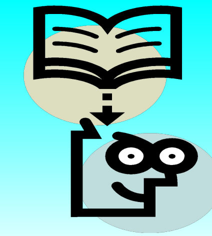
Т4. Произведение (частное) двух нечетных функций есть функция четная.

Монотонные функции Строго монотонные функции

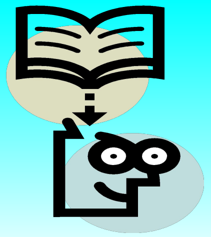


Назовем словом *промежуток* любой интервал, отрезок, полуинтервал, бесконечный полуинтервал и обозначим его $< a; b >$. Пусть на промежутке $< a; b >$ задана функция $y = f(x)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*строго возрастающей*) на промежутке $< a; b >$, если для любых значений x_1, x_2 из этого промежутка при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



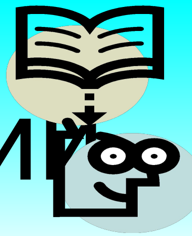
Определение. Функция $f(x)$ называется *убывающей* (*строго убывающей*) на промежутке $< a; b >$, если для любых значений x_1, , x_2 из этого промежутка при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.



Геометрически строго возрастающая функция изображается графиком, поднимающимся вверх вправо, а строго убывающая – графиком, опускающимся вниз вправо.

Строго возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Примеры монотонных функций



Возрастающие

$y = x^2$ на $[0;\, +\infty)$;

$y = x^3$;

$y = \sqrt{x}$ на $[0;\, +\infty)$;

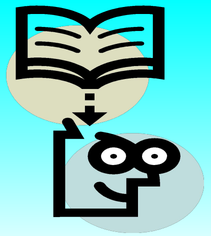
Убывающие

$y = x^2$ на $(-\infty;\, 0]$;

$y = -\sqrt{x}$ на $[0;\, +\infty)$;

$y = 1 / x$.

Неубывающие и невозрастающие функции



Определение. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* на промежутке $< a; b>$, если для любых значений x_1, x_2 из этого промежутка при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *невозрастающей* на промежутке $< a; b>$, если для любых значений x_1, x_2 из этого промежутка при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функции невозрастающие и неубывающие также называются *монотонными*.

Кусочно-монотонные функции

Одна и та же функция на различных промежутках может вести себя по-разному. Так, функция $y = x^2$ строго убывает на $(-\infty; 0]$ и строго возрастает на $[0; +\infty)$.

Подобные функции называются *кусочно-монотонными*.

Определение. Функция $f(x)$ на множестве X называется *кусочно-монотонной*, если X есть объединение конечного числа промежутков, на каждом из которых $f(x)$ монотонна.

Докажем, что $y = x^2$ возрастает на $[0; +\infty)$.

Пусть $x_1 < x_2$ и оба числа неотрицательны.

$f(x_2) – f(x_1) = x_2^{\,2} – x_1^{\,2} = (x_2 – x_1)\,(x_2 + x_1)$.

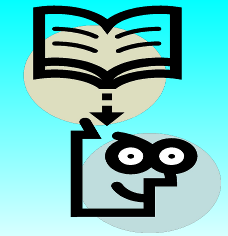
Так как $x_1 < x_2$, то $(x_2 – x_1) > 0$.

Так как $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, то сумма $x_2 + x_1 \geq 0$.

Сл-но, произведение тоже ≥ 0.

Таким образом, доказали, что $y = x^2$ возрастает на $[0; +\infty)$.

Домашнее задание



Выучите наизусть

1) Определение функции.
2) Теорему о графике.
3) Определение четной, нечетной функции
4) Умейте определять четность, нечетность любой функции
5) Выучите теоремы о графиках четной, нечетной функции