План проведения занятия по теме

Функции и их свойства

Скуднева Оксана Валентиновна

Образование: МГТУ им. Н. Э. Баумана, специальность «Системы автоматического управления»;

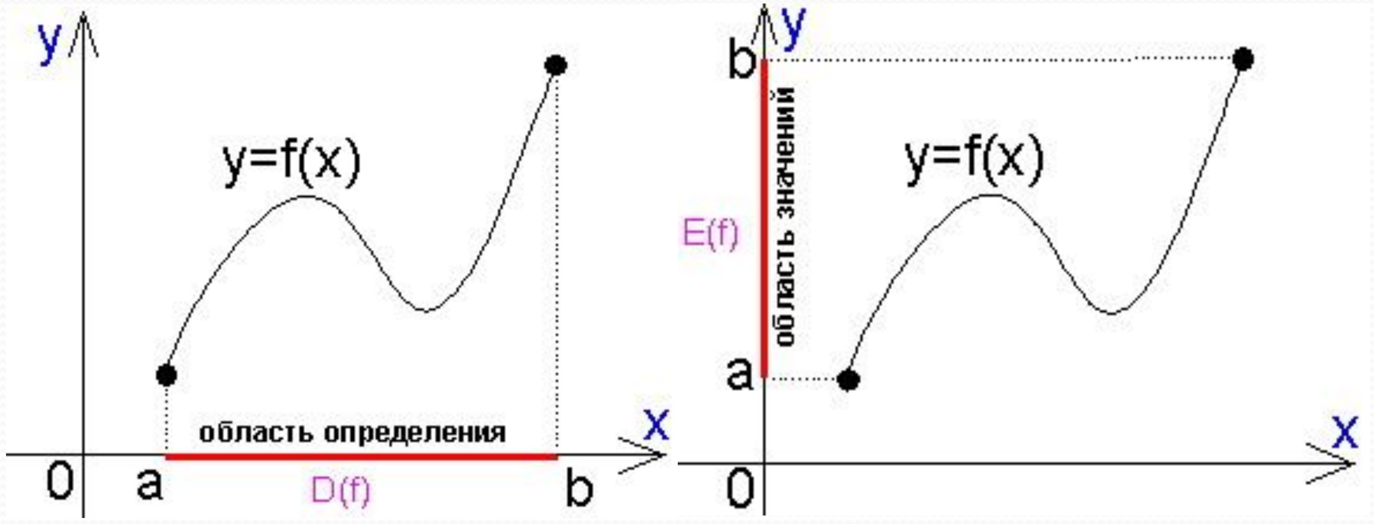
МГУ им. М. В. Ломоносова, специальность «Математика. Прикладная математика».

Место работы: МГТУ им. Н. Э. Баумана, НУК ФН, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика», должность – старший преподаватель.

Опыт работы: средняя школа, 2002-2011 гг., факультативные курсы по подготовке к Олимпиадам МГТУ им. Н. Э. Баумана «Шаг в будущее», «Олимпиада Жуковского», ЕГЭ по математике, основной курс алгебры физ-мат. класса.

Основные понятия и определения.

Закон, ставящий каждому элементу из множества X (область определения -D(f)), не более одного элемента из множества Y, (область значений - E(f)), называется числовой функцией y=f(x).



Способы задания функции

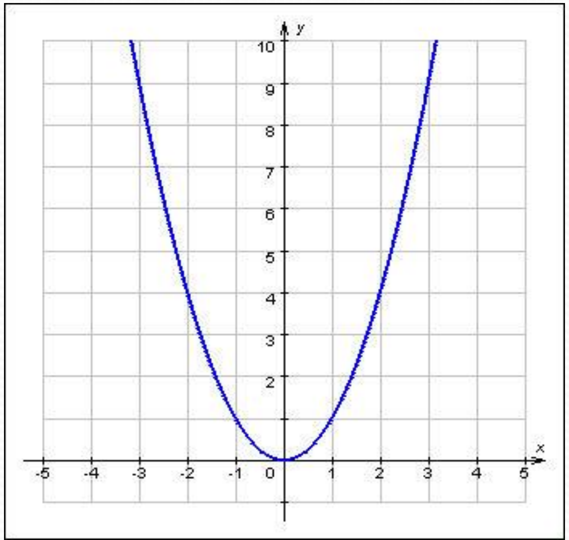
1) табличный

Пример:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y=f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16

2) Графический

Пример:

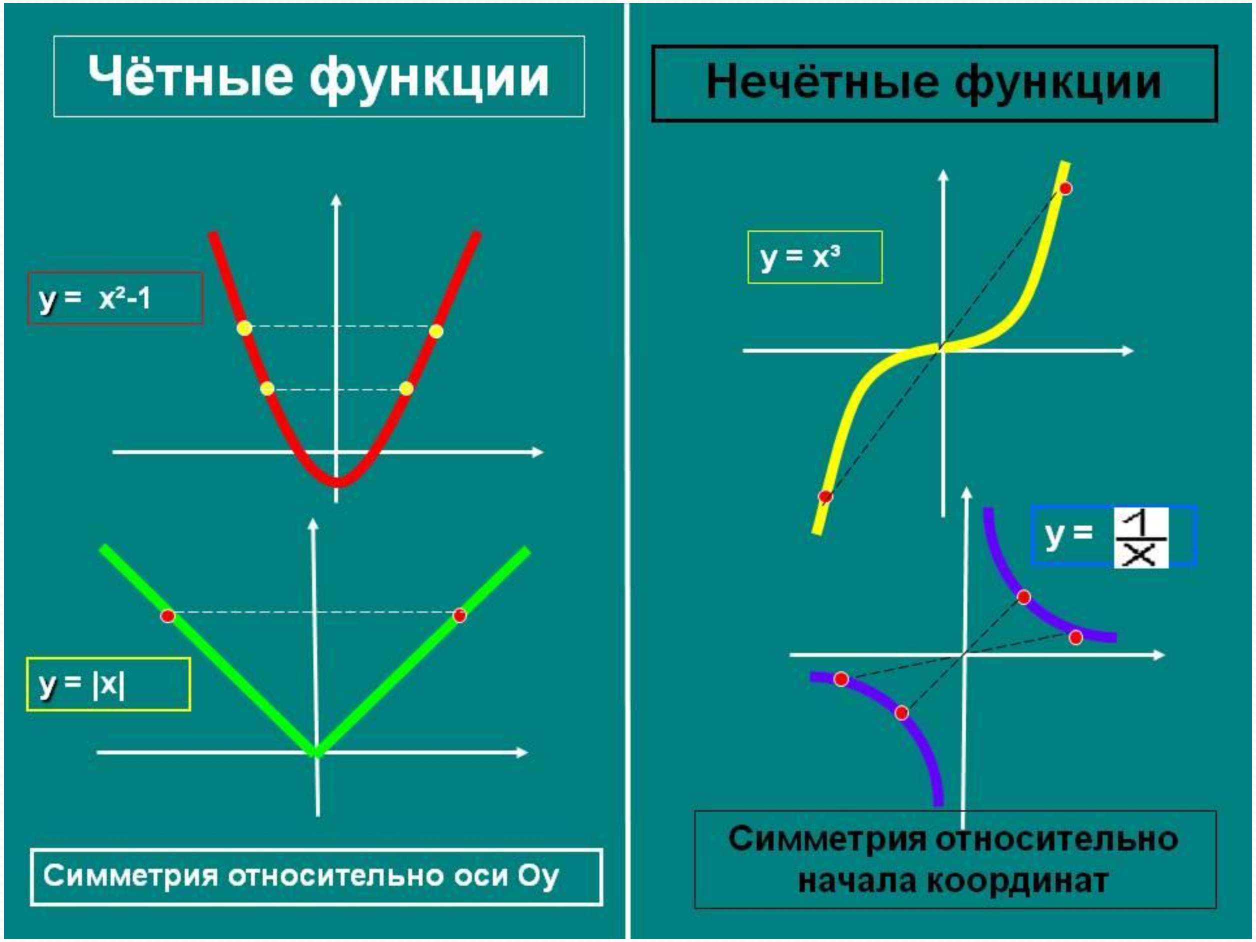


3)аналитический(формулой):

Пример: $y = x^2$

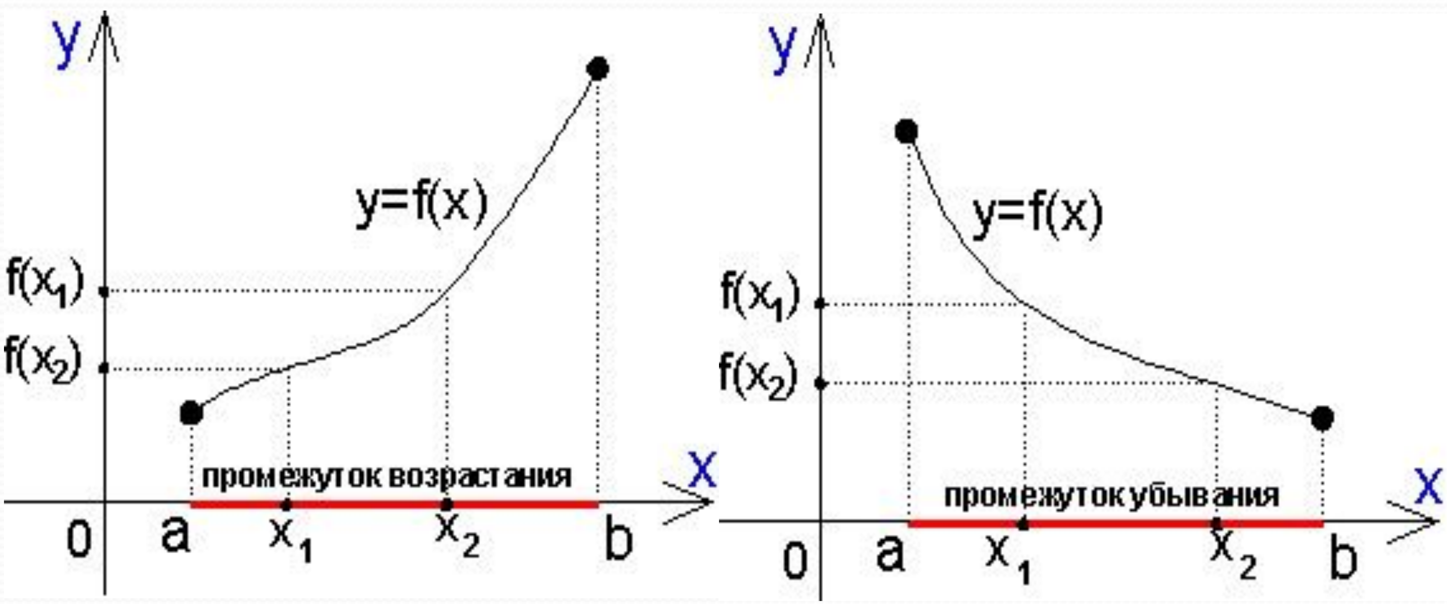
Если область определения функции D(f) симметрична относительно начала координат, и для каждого значения х϶ D(f) выполняется условие f(-x)=f(x), функция называется **чётной.** График чётной функции симметричен относительно оси ОY.

Если область определения функции D(f) симметрична относительно начала координат, и для каждого значения х϶ D(f) выполняется условие f(-x)=-f(x), функция называется **нечётной**. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



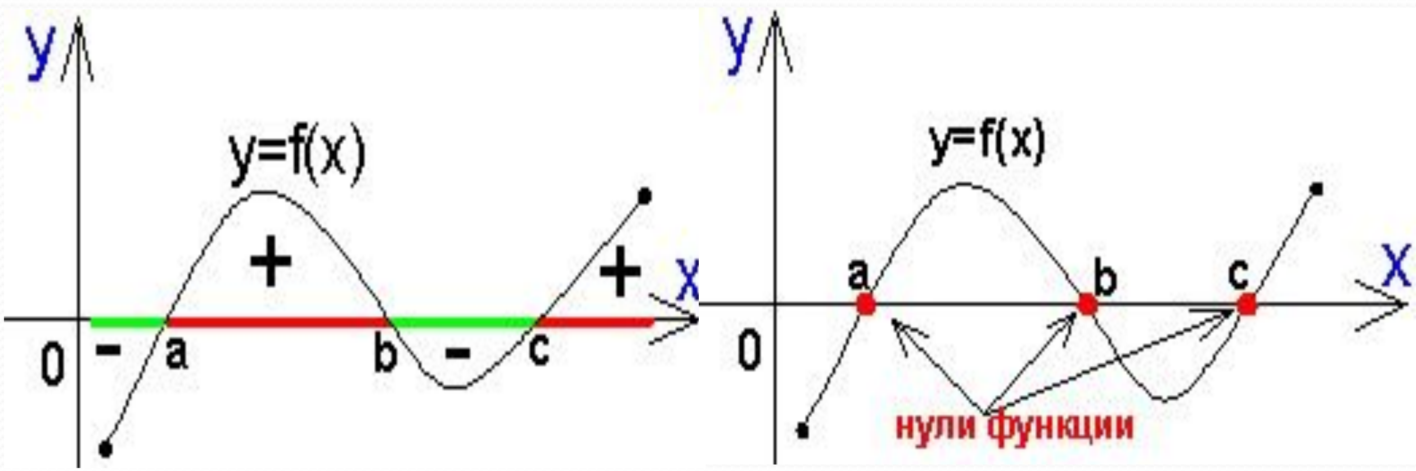
Если для любых $x_1 \in (a; b)$ и $x_2 \in (a; b)$, причём $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **возрастает** на интервале $(a; b)$.

Если для любых $x_1 \in (a; b)$ и $x_2 \in (a; b)$, причём $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **убывает** на интервале $(a; b)$.

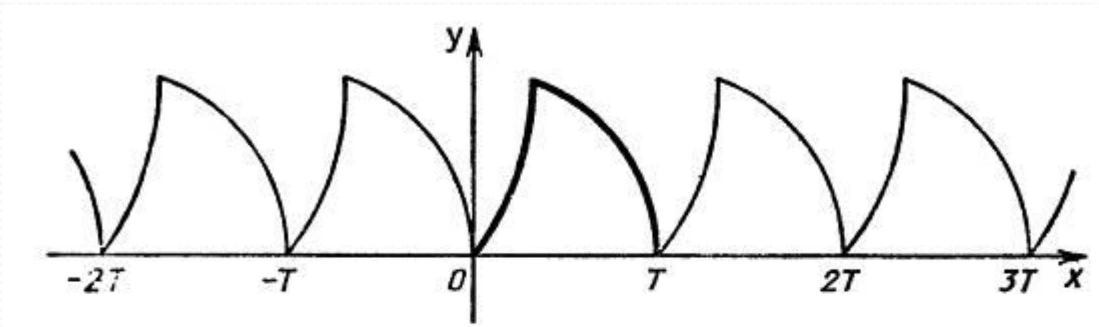


Возрастание и убывание функции объединяется понятием **монотонности**.

Если на промежутке области определения функция имеет значения одного знака (плюс или минус), такой интервал называется промежутком знакопостоянства функции. Числа, в которых значение функции равно нулю, называются нулями функции.



Если существует положительное число Т, такое, что на всей области определения выполняется равенство [illegible] = [illegible] + [illegible], [illegible] функция называется периодической, а число Т – периодом.

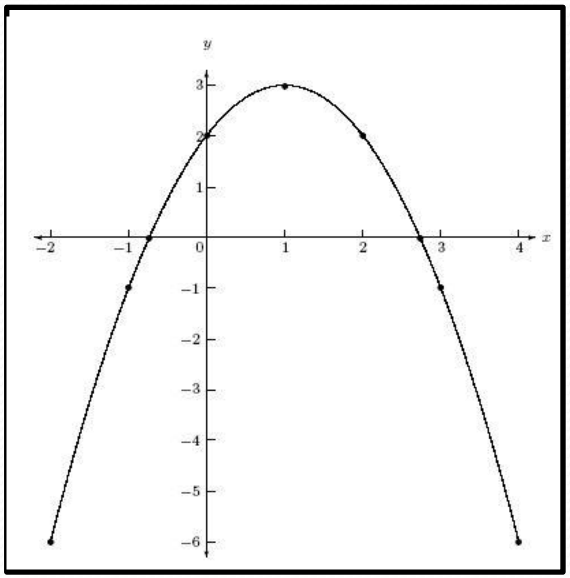


Ограниченные функции.

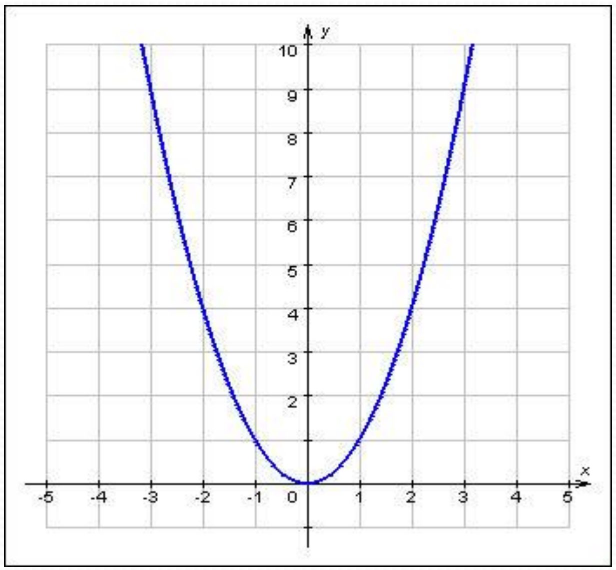
Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X, если

$$\exists\ M(m) \in R\ \forall\ x \in X \Rightarrow f(x) \leq M\ (f(x) \geq m).$$

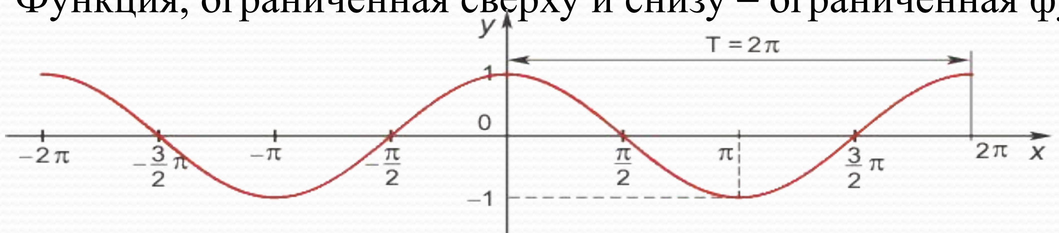
Пример. Функция, ограниченная сверху:



Функция, ограниченная снизу:

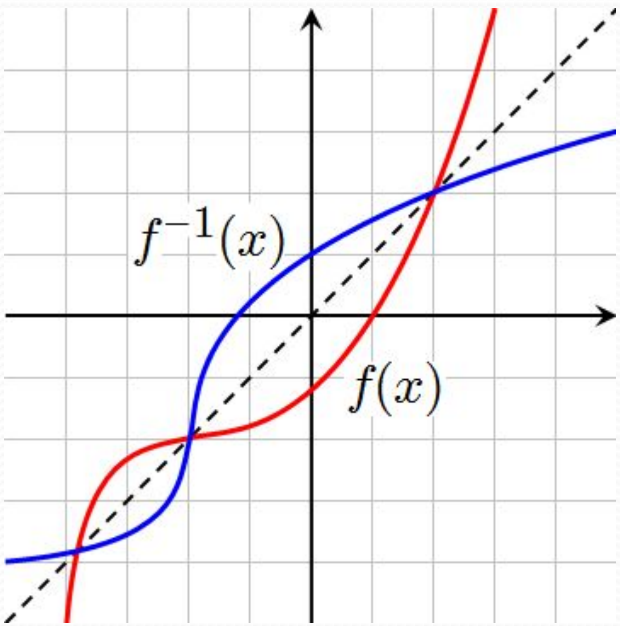


Функция, ограниченная сверху и снизу – ограниченная функция.



Обратная функция.

Пусть на множестве X определена строго монотонная функция $y = f(x)$, осуществляющая отображение $X \to Y$. Обратной функцией к ней, $x = f^{-1}(y)$ называется функция, осуществляющая отображение $Y \to X$, такое, что для каждого $y \in Y$: $y = f(x)$. Графики исходной и обратной функций, таким образом, симметричны относительно прямой $y = x$.



Чтобы получить обратную функцию:

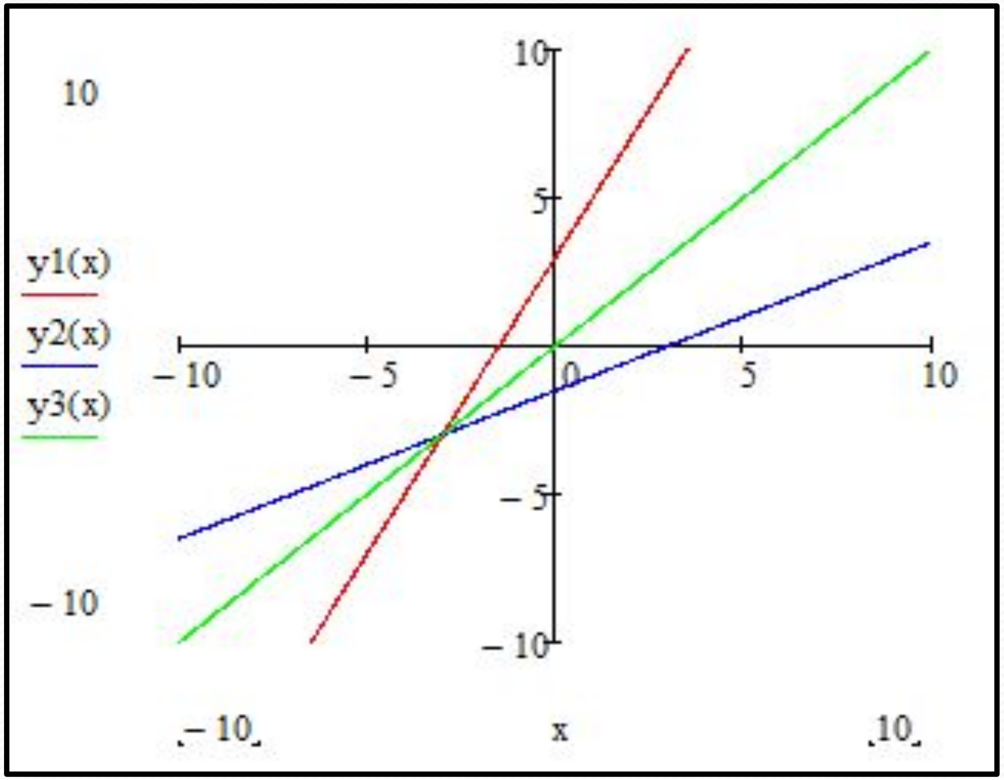
1) Определить участки монотонности функции $y = f(x)$;
2) Для каждого участка монотонности составить функцию $x = f(y)$.
3) Выразим из данного выражения переменную y, получим обратную функцию, $y = f^{-1}(x)$.

Пример.

1) $y = 2x + 3$ возрастает на всей области определения $D(f) = \mathbb{R}$;

2) Механически меняем местами переменные : $x = 2y + 3$;

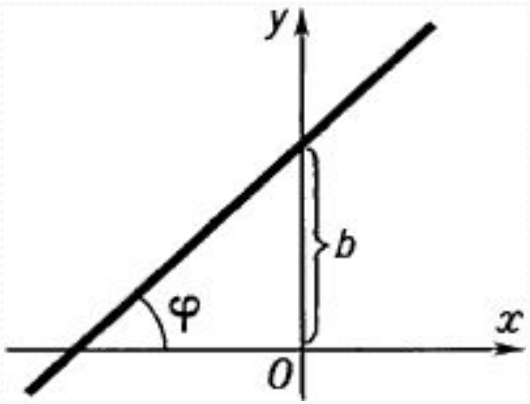
3) выражаем переменную y: $y = \frac{x-3}{2}$. Это и есть обратная функция. Строим графики и убеждаемся в симметрии относительно прямой $y = x$.


10
y1(x)
y2(x)
y3(x)
−10
10
5
−5
−10
−10
−5
0
5
10
−10
x
10

Основные элементарные функции.

Линейная функция

y = kx + b



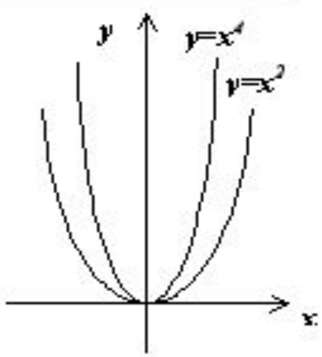
□□□□□ = ℝ - функция определена на всей числовой оси.

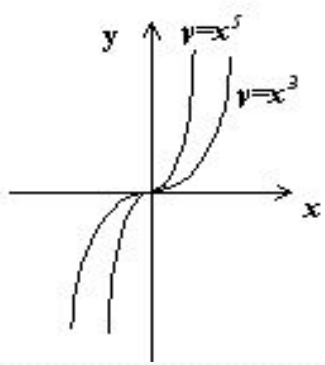
□□□□□ = ℝ

□= □□□□

Степенная функция.

$y = x^n$

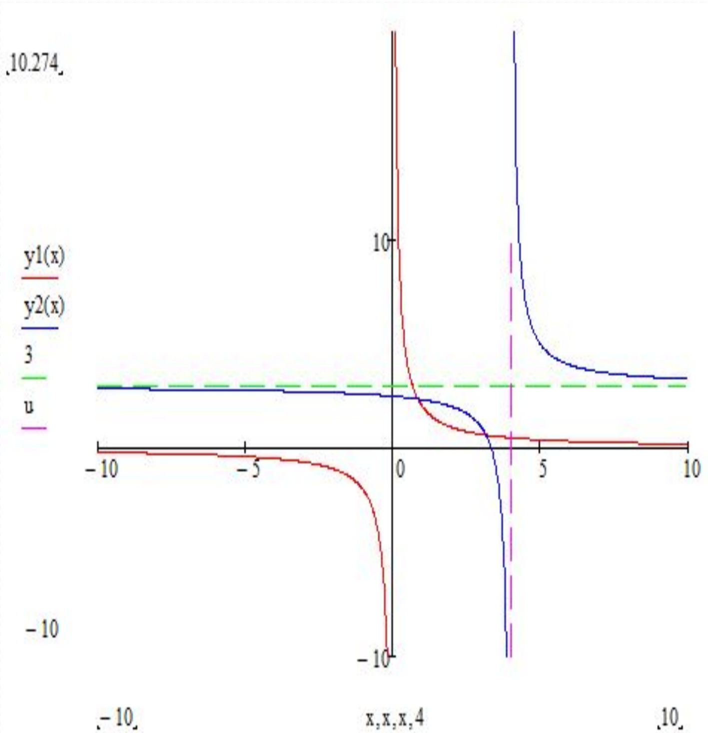




□□□ℕ, □= 2□□чётное□ □□□□□ = ℝ, □□□□□ = □0,+∞□

□□□ℕ, □= 2□□+ 1 □нечётное□ □□□□□ = ℝ, □□□□□ = ℝ

Дробно-рациональная функция.



$\square = \dfrac{\square + \square}{\square + \square}, \qquad \square \neq -\dfrac{\square}{\square}$

Приводится к виду $\square - \square_{\square} = \dfrac{\square}{\square - \square_{\square}}$,

где $\square_{\square} = -\dfrac{\square}{\square}$, $\square_{\square} = \dfrac{\square}{\square}$,

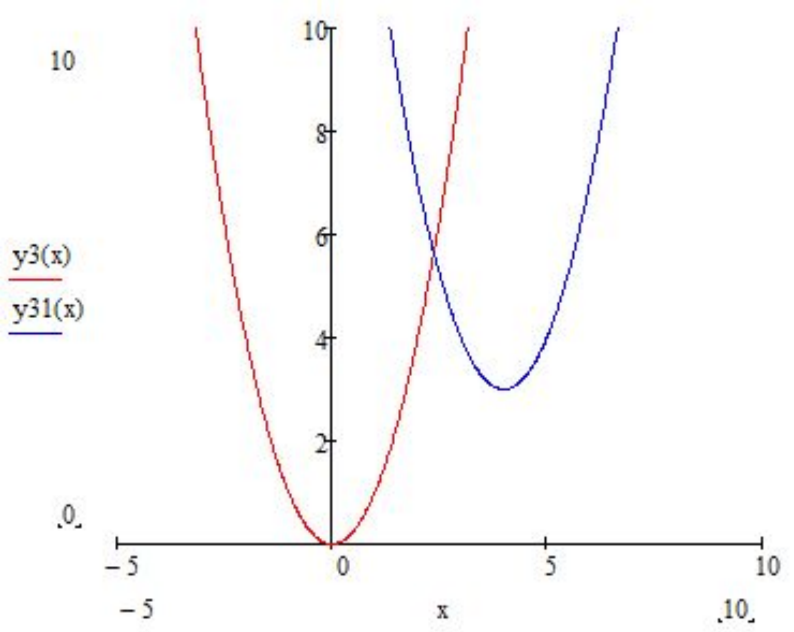
$\square = \dfrac{\square - \square}{\square^{\square}}$

Пример. $\square 1(\square) = \dfrac{2}{\square}$

$\square 2(\square) = 3 + \dfrac{2}{\square - 4}$

Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c$$



Приводится к виду

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2,$$

где $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$,

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

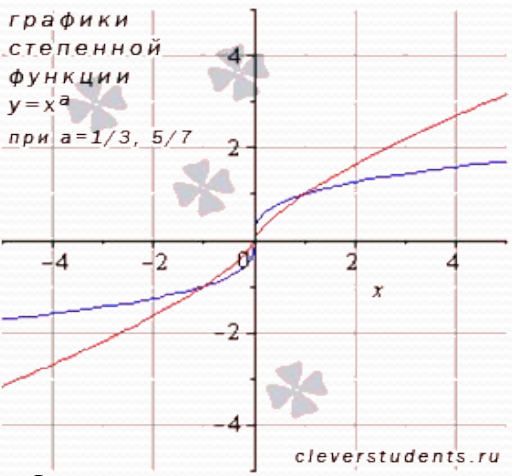
Пример. $y3(x) = x^2$,

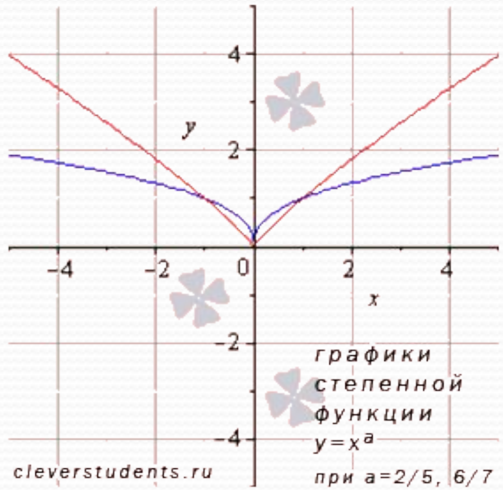
$$y31(x) = 3 + (x - 4)^2$$

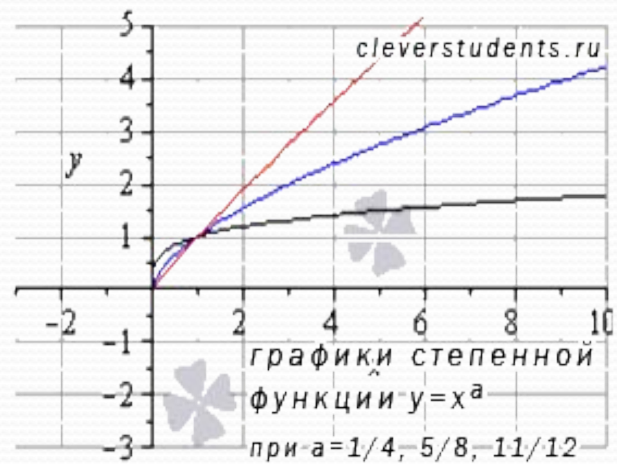
Степенные функции с рациональным показателем.

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

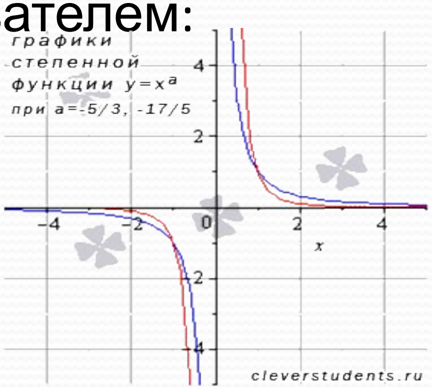
В зависимости от чётности *p* и *q* графики принимают вид:

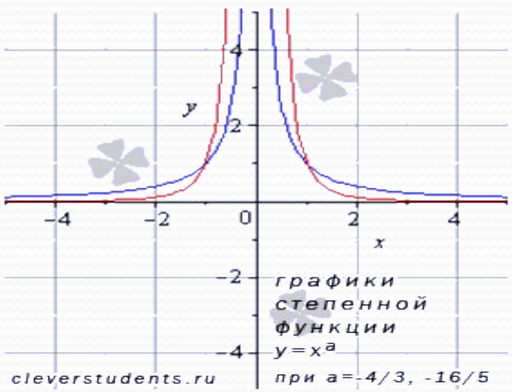






Степенные функции с отрицательным рациональным показателем:





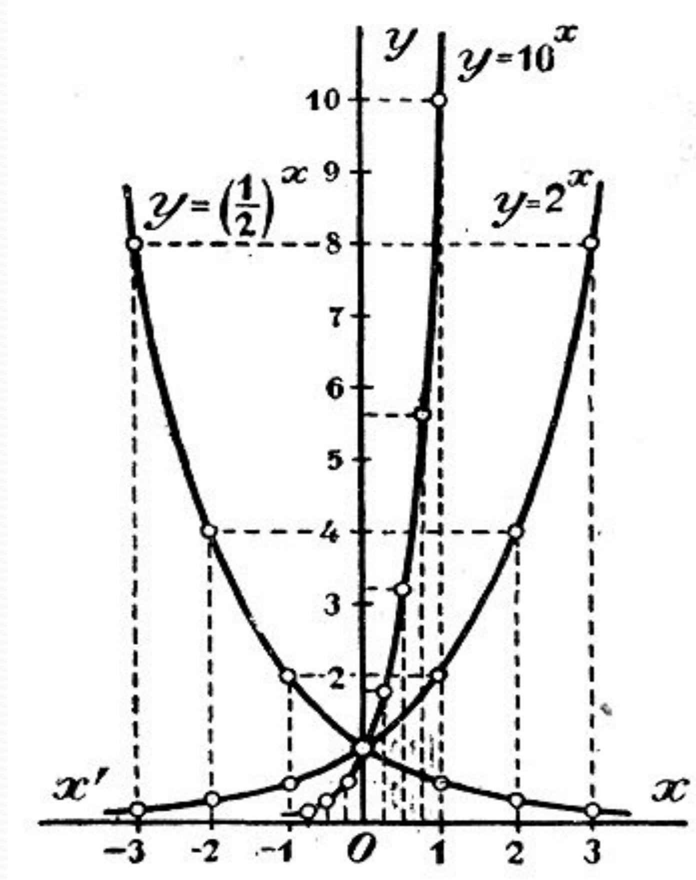
Показательная функция

$y = a^x, a > 0, a \neq 1.$

$D(y) = \mathbb{R}, \quad E(y) = (0, +\infty).$

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$a < 1$ убывание на всей области определения.



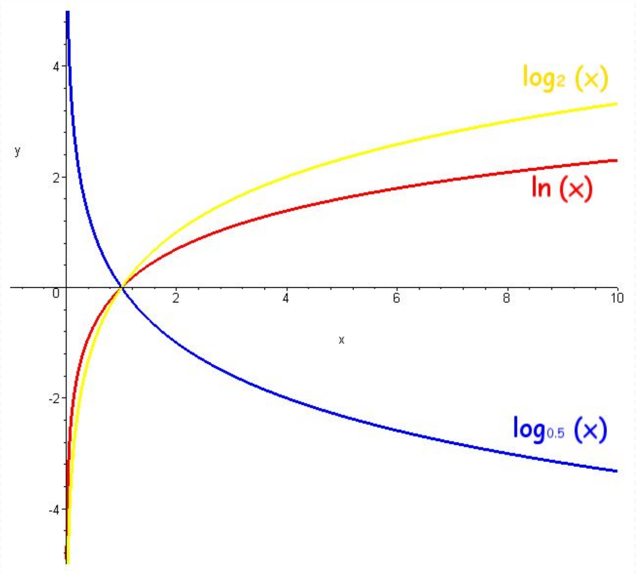
Логарифмическая функция. (Обратная к показательной)

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$D(y) = (0, +\infty), \quad E(y) = \mathbb{R},$$

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$a < 1$ убывание на всей области определения.

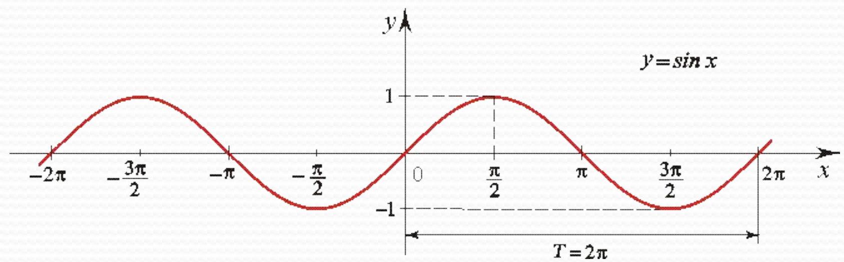


Тригонометрические функции .

[illegible] = [illegible]

[illegible] = ℝ, [illegible] = [illegible]−1, +1[illegible], нечётная,

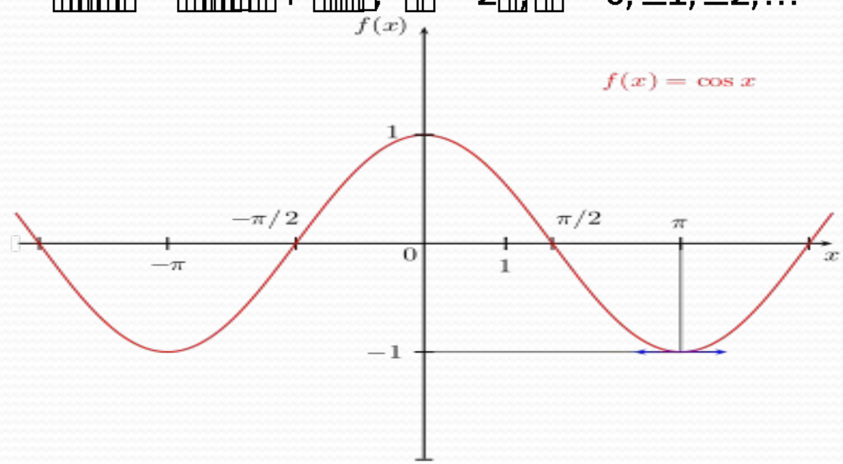
[illegible] = [illegible] + [illegible], [illegible] = 2[illegible], [illegible] = 0, ±1, ±2, …



[illegible] = [illegible]

[illegible] = ℝ, [illegible] = [illegible]−1, +1[illegible], чётная

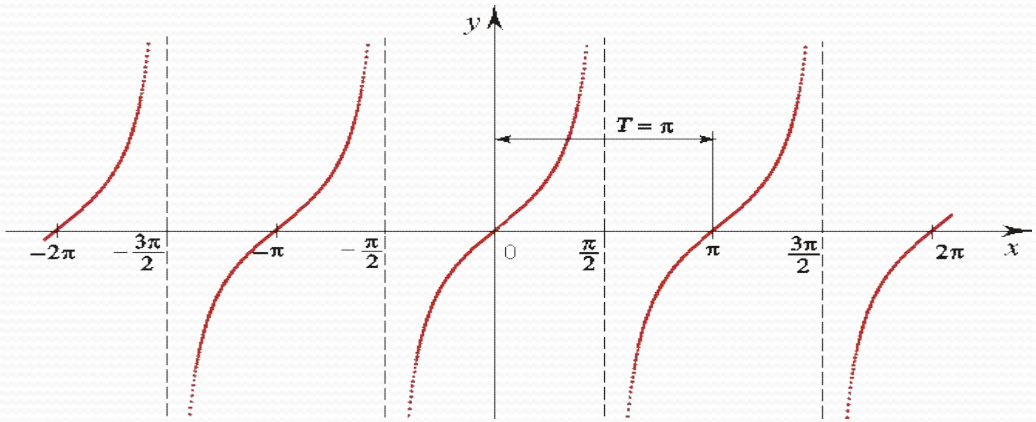
[illegible] = [illegible] + [illegible], [illegible] = 2[illegible], [illegible] = 0, ±1, ±2, …



$y = \operatorname{tg} x$, нечётная,

$$D(\operatorname{tg} x) = \bigcup\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad E(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

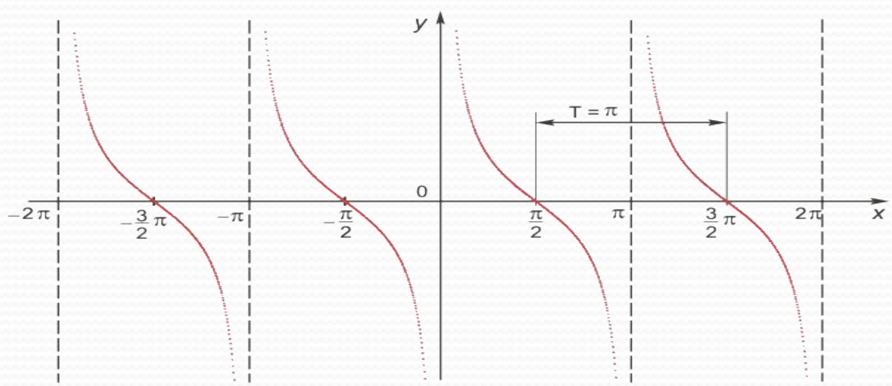
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi k), \quad T = \pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



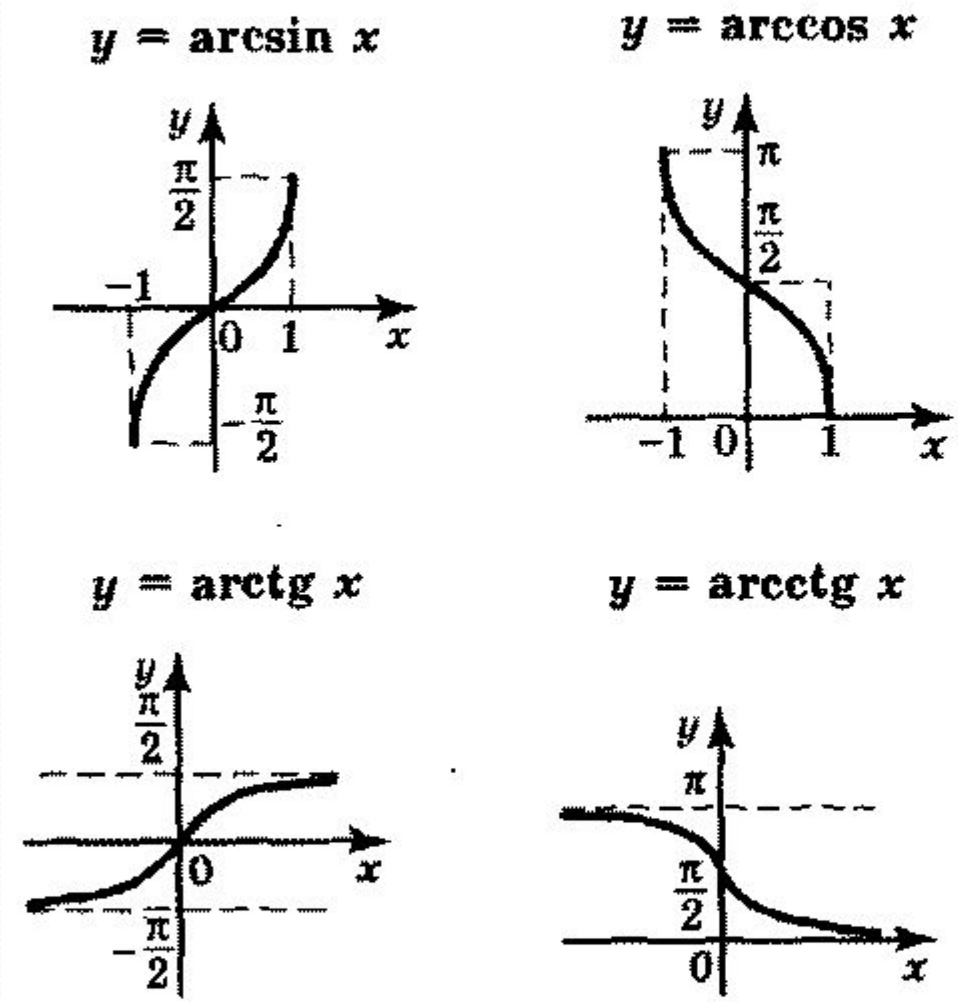
$y = \operatorname{ctg} x$, нечётная,

$$D(\operatorname{ctg} x) = \bigcup\left(\pi k, \pi(k + 1)\right), \quad E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi k), \quad T = \pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

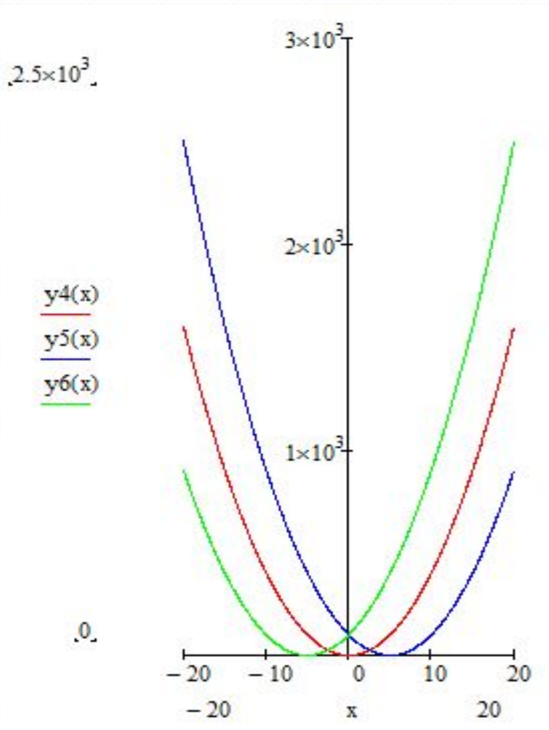


Обратные тригонометрические функции.



Построение эскизов графиков функций.

Смещение вдоль оси абсцисс.



а - действительное положительное число.

□= □(□) - исходная функция.

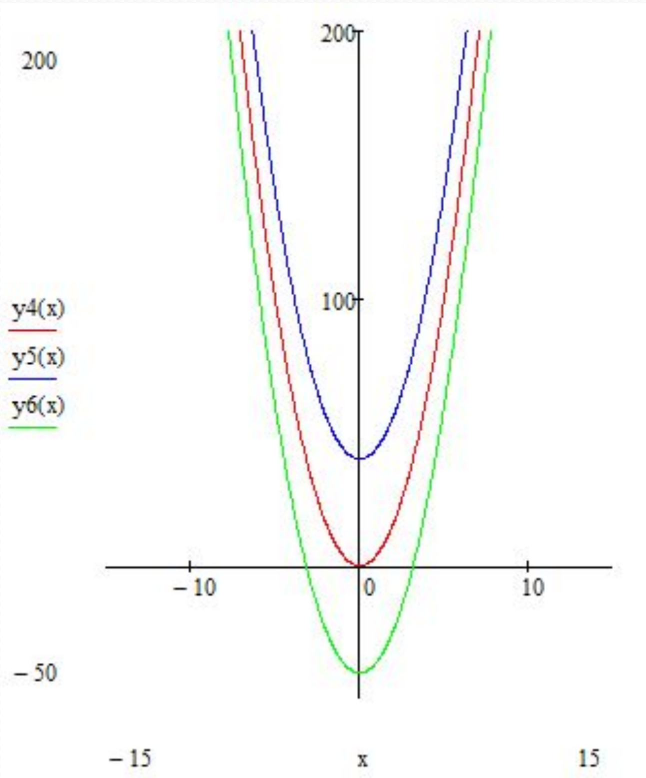
□= □(□− □) - смещение графика

□= □(□) на а единиц вправо.

□= □(□+ □) - смещение графика

□= □(□) на а единиц влево.

Смещение вдоль оси ординат.



b - действительное положительное число.

[illegible] - исходная функция.

[illegible] - смещение графика

[illegible] на b единиц вверх.

[illegible] - смещение графика

[illegible] на b единиц вниз.

Сжатие – растяжение вдоль оси абсцисс.

$y = f(x)$ - исходная функция. k- действительное положительное число, превосходящее единицу. График функции $y = f(kx)$ - сжат в k раз по оси абсцисс

Пример. $y4(x) = \sin(x)$, $y5(x) = \sin(3x)$

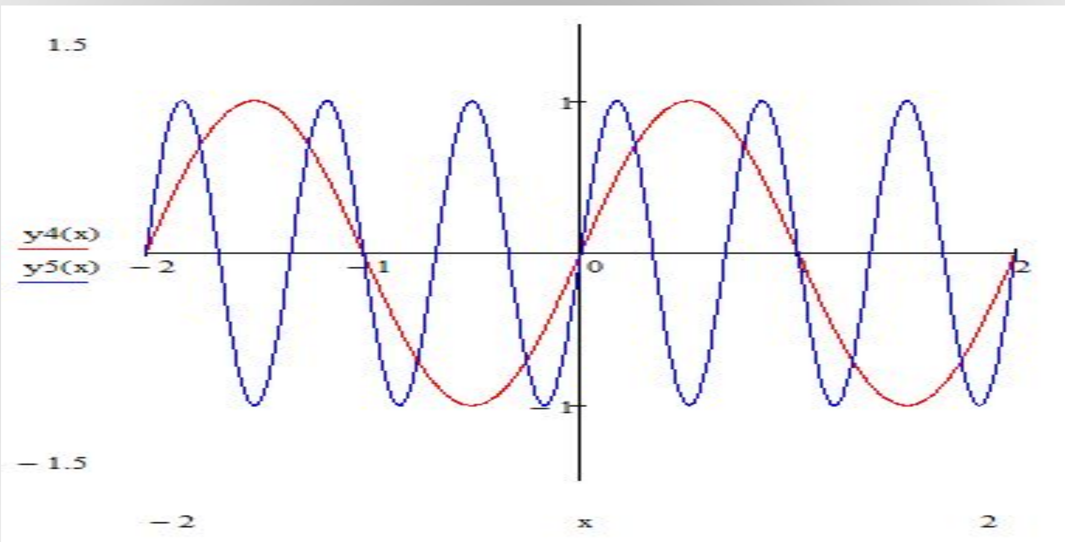
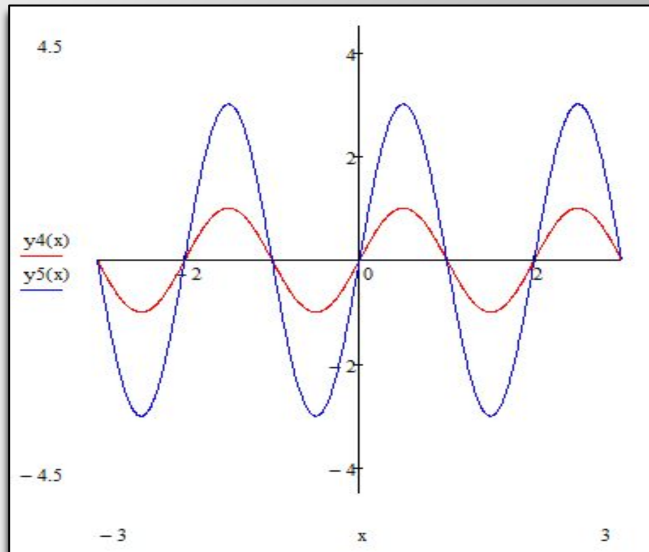


График функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ - растянут в k раз по оси абсцисс.

Пример. $y4(x) = \sin(x)$, $y5(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Сжатие – растяжение вдоль оси ординат.



□ = □(□) - исходная функция. k- действительное положительное число, превосходящее единицу.

График функции □ = □□(□)- растянут в k раз по оси ординат.

Пример. □4□□ = sin□□□; □5□□ = 3sin□□□

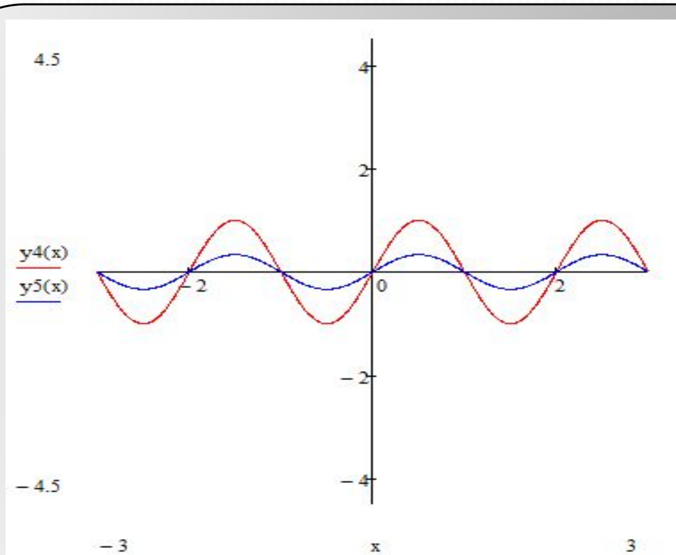
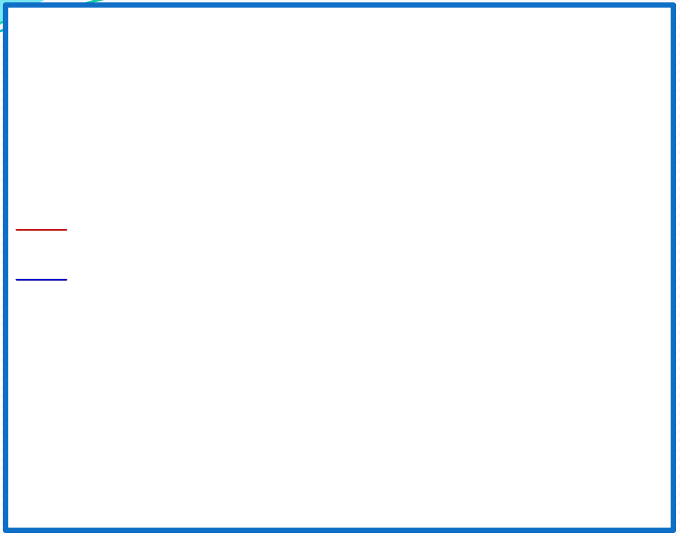


График функции □ = $\frac{1}{□}$□(□)- сжат в k раз по оси ординат.

Пример. □4□□ = sin□□□; □5□□ = $\frac{1}{3}$sin□□□

Отражения графиков.

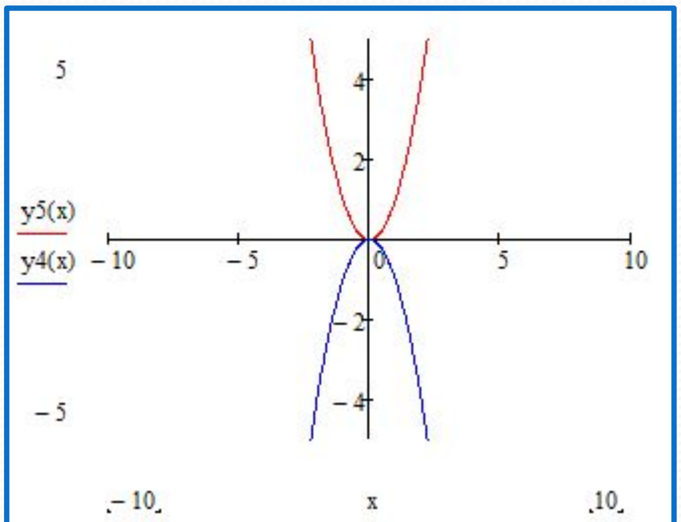


$y = f(x)$ - исходная функция.

$y = f(-x)$ - исходная функция симметрично отражается относительно оси ординат.

Пример. $y5(x) =$ [illegible]

$y5(x) =$ [illegible]

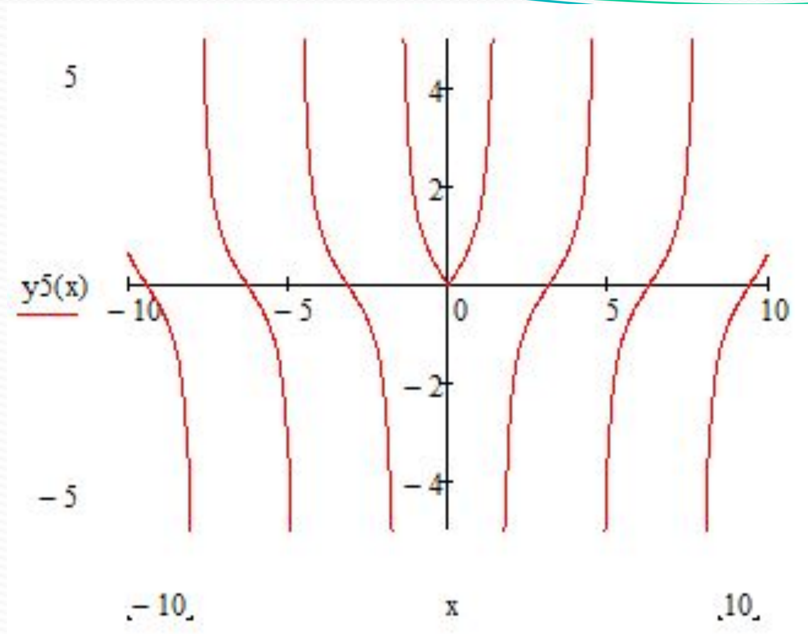


$y = -f(x)$ - исходная функция симметрично

отражается относительно оси абсцисс.

Пример. $y5(x) = x^2$,

$y5(x) = -x^2$



$y = f(|x|)$ - график исходной функции для $x \geq 0$ остаётся на прежнем месте, для $x < 0$ – заменяется на отражённую относительно оси ординат часть графика для $x \geq 0$.

Пример. $y = \operatorname{tg}|x|$

Билет 1

1. Построить эскизы графиков функций:

А) $y = \dfrac{3x-3}{5x+7}$ Б) $y = \left|\dfrac{3x-3}{5x+7}\right|$; $y = f(g(x)),\ f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = |x+2|$

В) $y = 5x^2 - 4x + 7$; Г) $y = 2x^2 - 6|x+2| + 5$; Д) $y = \dfrac{3|x|-3}{5|x|+7}$.

2. Определить вид монотонности функции $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(возр. или убывание) на отрезке: $x \in [3;7]$

3. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} + \sqrt{\frac{3x^2+4x-4}{x+1}}$$

4. Найти обр.функцию $y = 6 - 3x$