ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

ЛЕКЦІЯ 4

ПЛАН

1. Принцип відносності Галілея.
2. Основні положення релятивістської механіки.
3. Перетворення Лоренца.
4. Перетворення і додавання швидкостей.
5. Наслідки з перетворень Лоренца.
6. Закон збереження імпульсу в СТВ.
7. Енергія спокою. Повна енергія. Взаємозв'язок маси і енергії спокою.

НА САМОСТІЙНЕ ОПРАЦЮВАННЯ

1. Опрацювати зміст лекції та відповідні розділи у підручниках.
2. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції.
3. Відцентрова сила. Сила Коріоліса.

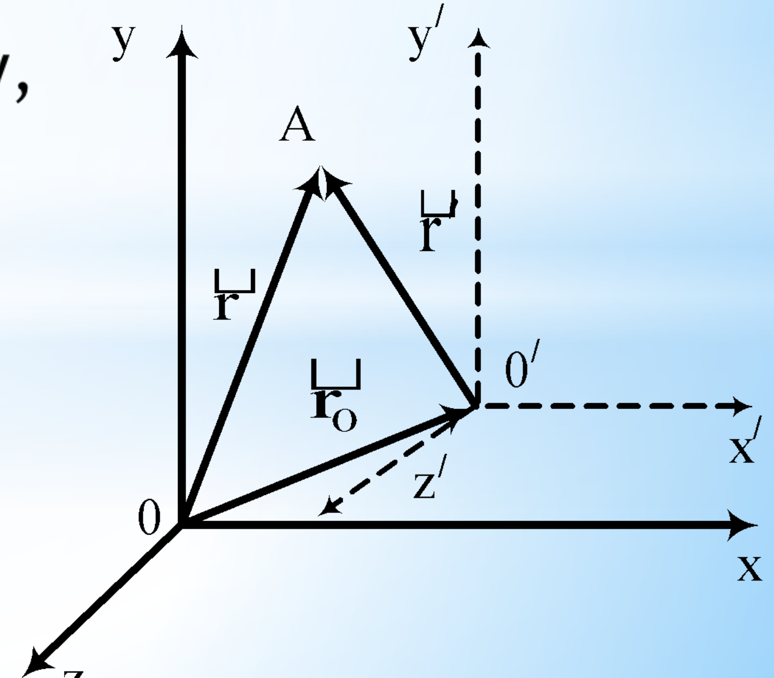
Принцип відносності Галілея:

* в усіх інерціальних системах відліку закони класичної механіки мають однакову форму.

K – інерціальна система відліку з координатами x, y, z, яка умовно вважається нерухомою.

K' – інерціальна система відліку з координатами x', y', z', яка рухається відносно системи K зі швидкістю $\vec{u}'$

Час відліку розпочнемо з моменту, коли початок координат обох систем співпадають.



$$\vec{r}_0 = \vec{u}t$$

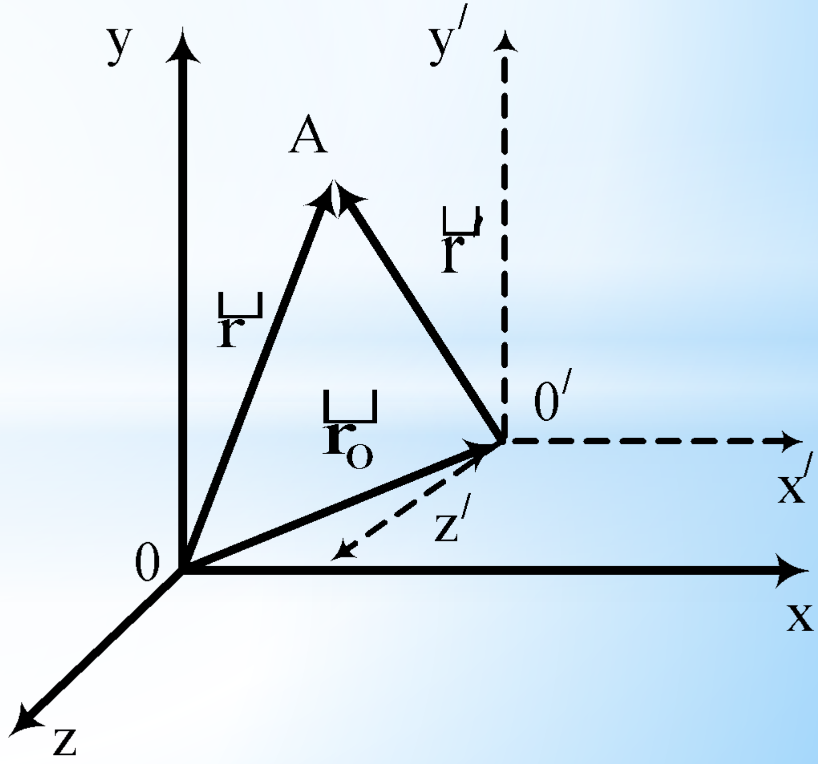
$\vec{r}_0$ - радіус-вектор положення O' відносно O.

Зв'язок між радіусами-векторами довільної точки *A* в обох системах

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{u}t}$$

Зв'язок між координатами довільної точки *A* в обох системах **K** і **K'**:

$$\begin{cases} x = x' + u_x t \\ y = y' + u_y t \\ z = z' + u_z t \end{cases}$$



Назва питання

* У випадку руху **системи** K' **зі швидкістю** υ **вздовж додатного напрямку осі** x **системи** K (у початковий момент часу осі координат співпадають), **перетворення координат Галілея** набувають вигляду:

$$\begin{cases} x = x' + \upsilon t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

$\longrightarrow$ **у класичній механіці хід часу не залежить від відносного руху систем відліку. час є абсолютною величиною, тобто** ***у всіх системах відліку він є однаковим.***

*Якщо продиференціювати вираз $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}\,t$

за часом та врахувати, що $t = t'$, отримаємо **правило додавання швидкостей в класичній механіці:**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

Продиференціюємо утворене рівняння ще раз:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Отже, якщо на тіло не діють інші сили $\vec{a} = 0$ (система K є інерціальною), то і $\vec{a}' = \mathbf{0}$ – система K' теж є інерціальною і **рівняння динаміки при переході від однієї інерціальної системи координат до іншої не змінюються** (є інваріантними).

Принцип відносності Галілея можна сформулювати ще й так:

* ***неможливо будь-якими механічними дослідами в межах однієї системи відліку визначити, знаходиться ця система в стані спокою чи у рівномірному прямолінійному русі.***

Із перетворень Галілея випливає, що якщо в системі K вздовж осі OX розмістити тіло AB довжиною

$L = x_2 - x_1$ (де x_1 і x_2 – координати початку і кінця тіла), то в системі K' довжина тіла буде зберігатися незмінною, тобто

$$L' = x_2' - x_1' = (x_2 - u \cdot t) - (x_1 - u \cdot t) = x_2 - x_1 = L$$

Отже, перетворення Галілея зберігають довжину тіла незмінною.

***Простір і час не залежать від руху матеріальних об'єктів, з якими зв'язана система відліку*.**

Таким чином, в класичної механіці фізичні величини поділяються на

абсолютні:

простір, час, маса, геометричні розміри тіл;

та відносні:

швидкість, імпульс, енергія та інші,

а всі закони Ньютона є однаковими в усіх інерціальних системах відліку.

Основні положення релятивістської механіки

* Релятивістська механіка заснована на спеціальній теорії відносності (СТВ) Ейнштейна і вивчає рух макроскопічних тіл зі швидкостями, порівняними з швидкістю світла у вакуумі $\boldsymbol{v \approx c}$.

В СТВ кожна подія характеризується 4-ма величинами – просторовими координатами $\boldsymbol{x, y, z}$ і часом $\boldsymbol{t}$. Подія зображується «точкою» - ***світовою точкою***.

Траєкторія, яку описує «світова точка» з часом, називається ***світовою лінією***.

Створена у 1905 р. А. Ейнштейном СТВ є ***фізичною теорією простору і часу для випадків дуже слабких гравітаційних полів***.

Постулати Ейнштейна

Постулат 1:

Фізичні закони однакові в усіх інерціальних системах і тому математична форма запису законів повинна бути інваріантною до перетворень.

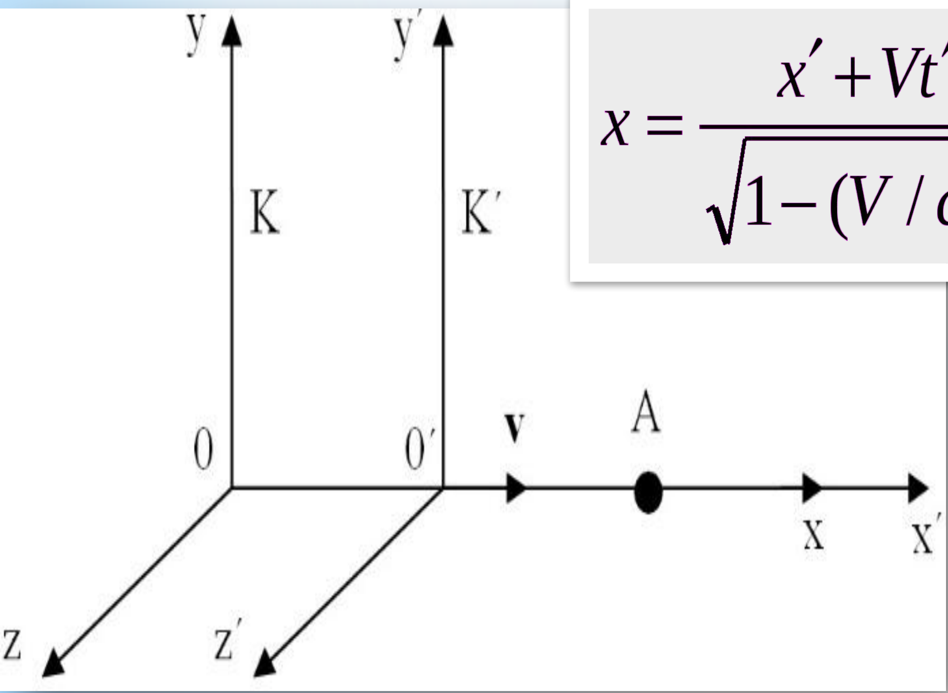
Постулат 2:

Швидкість світла у вакуумі однакова в усіх інерціальних системах і не залежить від напрямку його поширення і руху джерела та приймача.

Перетворення Лоренца

Перетворення координат і часу, що враховують їх залежність від швидкості, називаються **перетвореннями Лоренца**.

Формули перетворення координат і часу були виведені **Лоренцем** для двох інерціальних систем, що рухаються одна відносно одної із швидкістю $\boldsymbol{V}$ **:**.



$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \left(V/c^2\right)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

Наслідки з перетворень Лоренца:

1. Під час переходу від однієї системи до іншої час змінюється, що свідчить про

віднісність часу.

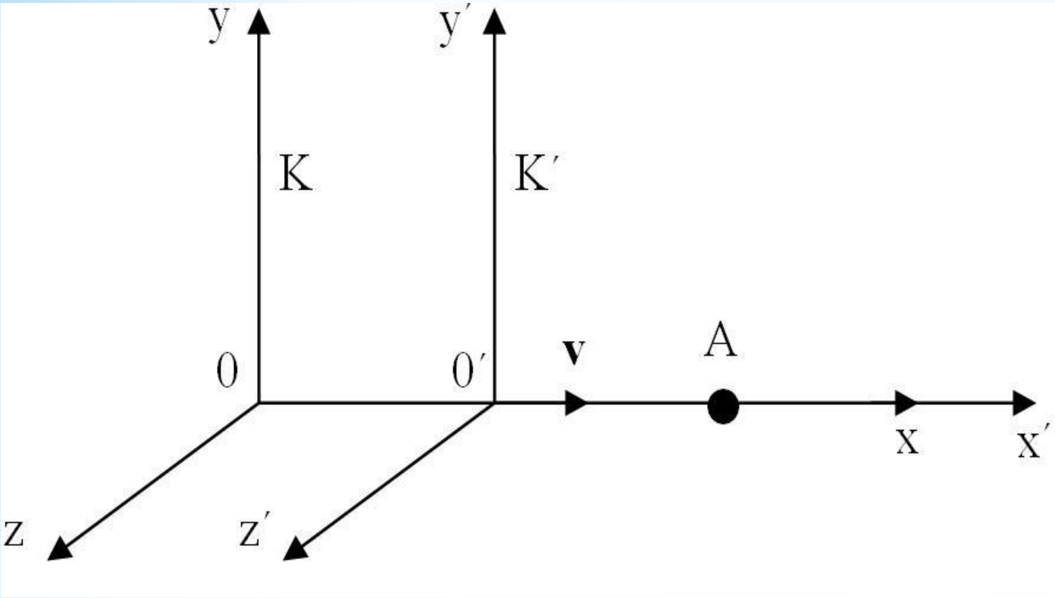
2. У формулах перетворень

час є рівноправною четвертою координатою,

тому **в нової теорії**

простір і час нероздільні, тобто взаємопов’язані.

Перетворення і додавання швидкостей у СТВ



Вважаємо, що система K' рухається зі швидкістю V відносно нерухомої системи K

Система K: $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$ $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$ $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$

Система K′: $\upsilon'_{x'} = \dfrac{dx'}{dt'}$ $\upsilon'_{y'} = \dfrac{dy'}{dt'}$ $\upsilon'_{z'} = \dfrac{dz'}{dt'}$

З формул перетворення Лоренца:

$$dx = \frac{dx' + V \cdot dt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}},\ \ dy = dy',\ \ dz = dz',\ \ dt = \frac{dt' + \left(V/c^2\right)dx'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

Розділимо першу, другу і третю рівності на четверту, при цьому отримаємо співвідношення:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V \cdot dt'}{dt' + \left(V/c^2\right)dx'} = \frac{dx'/dt' + V}{1 + \left(V/c^2\right)dx'/dt'}$$

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_{x'} + V}{1 + \left(V/c^2\right) \cdot \upsilon'_{x'}}$$

$$\upsilon'_{x'} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \left(V/c^2\right) \cdot \upsilon_x}$$

$$\upsilon'_{y'} = \frac{\upsilon_y \sqrt{1-(V/c)^2}}{1 - V\upsilon_x/c^2},\ \ \upsilon'_{z'} = \frac{\upsilon_z \sqrt{1-(V/c)^2}}{1 - V\upsilon_x/c^2}$$

- **формули перетворення або додавання швидкостей в СТВ**.

$$\upsilon'_{x'} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \left(V / c^2\right) \cdot \upsilon_x}$$

$$\upsilon'_{y'} = \frac{\upsilon_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - V\upsilon_x / c^2}, \quad \upsilon'_{z'} = \frac{\upsilon_z \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - V\upsilon_x / c^2}$$

Додавання швидкостей в СТВ у граничних випадках

* Якщо $V \ll c$ наведені формули набудуть вигляду:

$$\upsilon_x = \upsilon'_{x'} + V, \qquad \upsilon_y = \upsilon'_{y'} \qquad \upsilon_z = \upsilon'_{z'}$$

Це формули перетворення швидкості у класичній (ньютонівській) механіці.

Таким чином, **при $V \ll c$ формули додавання швидкостей СТВ переходять у формули додавання швидкостей класичної механіки.**

Якщо **частинка рухається паралельно осям** x **і** x' **в напрямку швидкості** V, υ_x збігається з модулем швидкості частинки υ в системі K, а $\upsilon'_{x'}$ – з модулем швидкості υ' в системі K' і формула швидкості:

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + V}{1 + \left(V / c^2\right) \cdot \upsilon'}$$

Швидкості υ, υ' і V паралельні и направлені в одну й ту саму сторону.

Якщо $\upsilon' = c$

$$\upsilon = \frac{c + V}{1 + \left(V / c^2\right) \cdot c} = \frac{(c + V)c}{(c + V)} = c$$

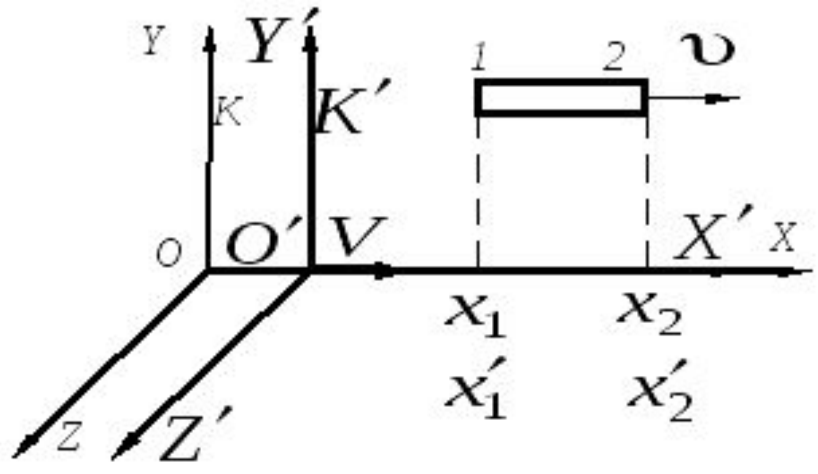
Отже, **формула додавання швидкостей узгоджується з другим постулатом СТВ.**

Наслідки з перетворень Лоренца

Лоренцеве скорочення довжини

$$l_0 = x_2' - x_1'$$

$$l = x_2 - x_1$$



t_1 – момент часу, коли проводимо вимірювання координати ***x_1***;

t_2 – момент часу, коли проводимо вимірювання координати **x_2**.

використаємо формули перетворення Лоренца

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Тоді

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$l = l_0\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$$

$$l = l_0\sqrt{1-\upsilon^2 / c^2}$$

Довжина стержня, що рухається, менша тієї, яку він має у стані спокою.

Аналогічний ефект спостерігається для тіл будь-якої форми: у напрямку руху лінійні розміри тіла скорочуються тим більше, чим більша швидкість руху.

Це явище називається ***скороченням довжини Лоренца, або фіцджеральдовим скороченням.***

Поперечні ж розміри тіла при цьому не змінюються

Наприклад, **куля набуває форму еліпсоїда, стиснутого у напрямку руху.**

Релятивістське уповільнення часу

* Нехай у системі K' в одній і тій же точці з координатою $x' = x'_1 = x'_2$ відбуваються в моменти часу t'_1 й t'_2 дві певні події (наприклад, подія 1 – народження елементарної частинки, подія 2 – її подальший розпад). У системі K' проміжок часу між подіями: $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, у системі K: $\Delta t = t_2 - t_1$

Використаємо перетворення Лоренца

$$t_1 = \frac{t'_1 + (V/c^2)x'_1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{t'_1 + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (V/c^2)x'_2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{t'_2 + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

тоді

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

* У системі K' події відбуваються в одній і тій же точці.

$\Delta t' = t'_2 - t'_1$ - проміжок часу, який вимірюється нерухомим у цій системі відліку годинником – так званий ***власний час*** $\boldsymbol{\Delta t_0}$.

Власним часом називають проміжок часу між двома подіями, який вимірюється в системі відліку, де ці події відбуваються в одній і тій самій точці.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \Delta t_0$$

$\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_1}$ - проміжок часу між тими ж подіями, які вимірюються годинником системи K, відносно якої точка, в якій відбуваються ці події рухається зі швидкістю $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{V}$. Тоді вираз

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Записується у вигляді

$$\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$$

$$\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}$$

* **Отже, власний час менше часу, відліченого за годинником, який рухається відносно точки, де ці події відбуваються.**

Δt – проміжок часу між подіями, який вимірюється нерухомими годинниками,

Δt_0 **–** проміжок часу, який вимірюється годинником, що рухається зі швидкістю υ*.*

Оскільки $\Delta t_0 < \Delta t$, то

годинники, які рухаються, ідуть повільніше, ніж нерухомі годинники.

Інтервал і його інваріантність

* Нехай у точці $x_1; y_1; z_1$ в момент часу t_1 відбулася подія **1**, а у точці $x_2; y_2; z_2$ в момент часу t_2 - подія **2.** Вираз

$$\Delta s=\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$$

називається інтервалом між подіями 1 та 2.

За допомогою перетворень Лоренца можна отримати

$$(\Delta s')^2=(\Delta s)^2$$

Тобто інтервал має однакові значення в системі відліку K та в системі відліку K'. Інтервал є інваріантною величиною. Інтервал може бути *дійсним* *або* *уявним*, *або* *рівним нулю у всіх інерціальних системах відліку*.

$$\Delta s = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

Для дійсного інтервалу

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 > 0$$

* Отже, **існує така система K', в якій $\Delta l' = 0$**

Тобто **події, які характеризуються дійсним інтервалом, можуть відбуватися в системі K' в одній і тій же точці простору.** При цьому **не існує системи, у якій $\Delta t' = 0$** (при такому значенні $\Delta t'$ інтервал став би уявним).

Події, які розділені дійсним інтервалом, ні в якій системі відліку не можуть бути одночасними.

Дійсні інтервали називаються часоподібними

$$\Delta s=\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$$

Для уявного інтервалу

$$c^2\Delta t^2-\Delta l^2=c^2\Delta t'^2-\Delta l'^2<0$$

* Отже, **існує така система K', в якій $\Delta t'=0$, тобто події стають одночасними**. Проте **не існує система, у якій** $\Delta l'=0$ **(** при такому значенні Δl інтервал став би дійсним).

Таким чином, **події, які визначаються дійсним інтервалом, ні в якій системі відліку не можуть відбуватися в одній і тій же точці простору**.

Уявні інтервали називають просторoподібними

* Якщо подія 1 є причиною, а подія 2 – наслідком (події пов’язані між собою причинно-наслідковим зв’язком), то їх можна розглядати як ***поширенння сигналу***. Оскільки в довільній системі відліку ***час наслідку*** t_2 не може бути більше за ***час причини*** t_1, тобто $t_2 \leq t_1$, то ***інтервал,*** *який описує ці події повинен бути або* ***дійсним*** *(часоподібним),* *або* ***дорівнювати нулю***

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 \geq 0$$

Тому для **причинно - наслідкових подій** (процес поширення сигналу):

$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta \boldsymbol{t}} \leq \boldsymbol{c}$ або $\Delta \boldsymbol{l}^2 / \Delta \boldsymbol{t}^2 \leq \boldsymbol{c}^2$

ВИСНОВКИ:

* ***1) події, що пов’язані причинно-наслідковим зв’язком (або процеси поширення сигналу) описуються часоподібним інтервалом (або інтервалом, який дорівнює нулю);***

2) максимальна швидкість сигналу будь-якої природи не може перевищувати швидкість світла с

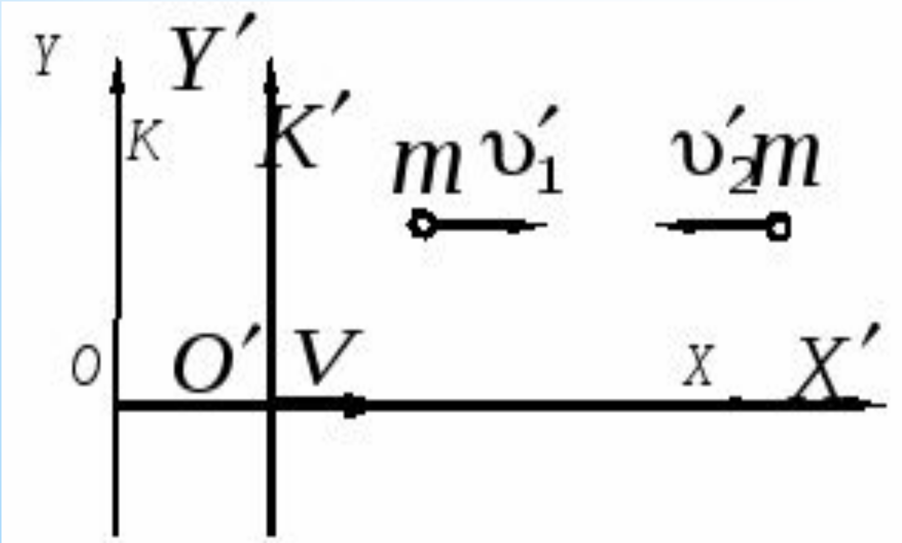
$$\upsilon = \Delta l / \Delta t \leq c;$$

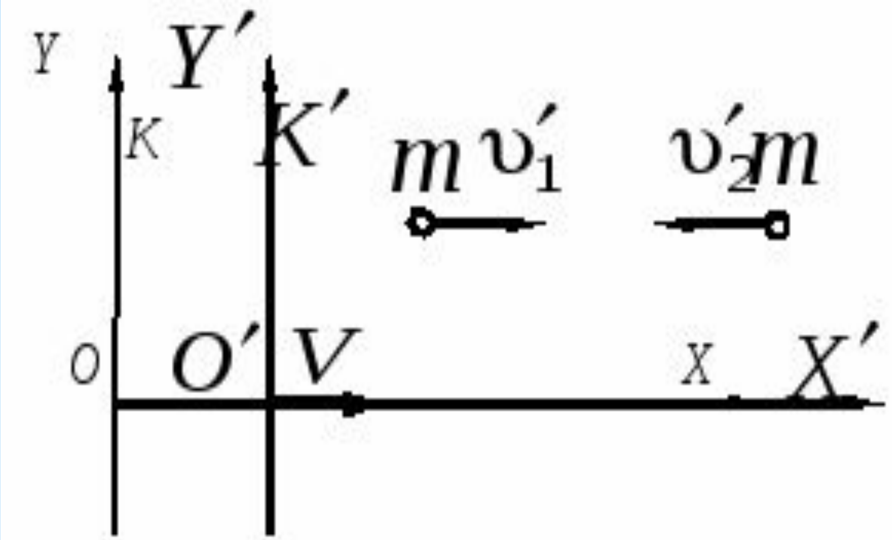
3) у випадку, коли сигнал поширюється зі швидкістю світла, інтервал між подіями дорівнює нулю.

Закон збереження імпульсу в СТВ

* Згідно принципу відносності Ейнштейна, **усі закони природи, в тому числі й закон збереження імпульсу, повинні бути інваріантними по відношенню до перетворень Лоренца**.

Розглянемо абсолютно непружне центральне зіткнення двох однакових частинок маси m:





* **Сумарний імпульс частинок зберігається в системі** K' (до й після зіткнення він дорівнює нулю).

Компоненти швидкостей частинок:

$$\upsilon'_{1x'} = V \qquad \upsilon'_{2x'} = -V$$

після зіткнення швидкості частинок у системі K' ***будуть дорівнювати нулю.***

В системі *K* з перетворень Лоренца

$$\upsilon_{1x} = \frac{\upsilon'_{1x'} + V}{1 + \left(V / c^2\right) \cdot \upsilon'_{1x'}} = \frac{V + V}{1 + \left(V / c^2\right) \cdot V} = \frac{2V}{1 + \left(V^2 / c^2\right)}$$

$$\upsilon_{2x} = \frac{\upsilon'_{2x'} + V}{1 + \left(V / c^2\right) \cdot \upsilon'_{2x'}} = \frac{-V + V}{1 + \left(V / c^2\right) \cdot (-V)} = 0$$

* **До зіткнення проекція** на вісь ***X*** сумарного імпульсу частинок

$$m\upsilon_{1x} + m\upsilon_{2x} = \frac{2mV}{1 + \left(V^2 / c^2\right)}$$

Після зіткнення частинки у системі *K´* мають швидкість, рівну нулю. Це означає, що **швидкість частинок відносно системи *K* дорівнює *V***. Тому

$$\frac{2mV}{1 + \left(V^2 / c^2\right)} \neq 2mV$$

$$\frac{2mV}{1+\left(V^2/c^2\right)} \neq 2mV$$

Отже, в системі *К закон* збереження імпульсу, визначеного як $p = mv$, не виконується.

Для того щоб закон збереження імпульсу був інваріантним по відношенню до перетворень Лоренца необхідно:

1. імпульс $p = mv$ замінити **на релятивістський імпульс**
2. припустити, що **частинка має енергію спокою**, яка пов'язана з його масою
3. вважати можливим **взаємне перетворення маси та енергії**
4. Для того, щоб **другий закон Ньютона** був інваріантним по відношенню до перетворення Лоренца його також потрібно **змінити**

Релятивістське рівняння динаміки для МТ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1-(v\ (t))^2}}\right)=\vec{F}$$

ВИСНОВКИ:

- в релятивістському випадку маса втрачає зміст коефіцієнта пропорційності між прискоренням і силою;

- напрямки сили та прискорення можуть не збігатися;

- сила F у релятивістській механіці **не є інваріантною** (у різних інерціальних системах відліку вона може мати різні модулі й напрямки).

Енергія спокою. Повна енергія.

* З розрахунків:

збереження енергії виявляється інваріантним до перетворень Лоренца тільки у тому випадку, коли припустити, що вільна частинка, крім кінетичної енергії, також має додаткову енергію - енергію спокою (внутрішню енергію частинки)

$$W_0 = mc^2$$

В релятивістській механіці повна енергія визначається формулою

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

* **У ньютонівській механіці повна енергія** дорівнює **сумі кінетичної і потенціальної енергії частинки.**

В релятивістській механіці повна енергія дорівнює сумі кінетичної енергії і енергії спокою частинки.

Повна енергія визначається лише швидкістю та масою частинки.

Релятивістський імпульс частинки також визначається тільки швидкістю та її масою.

***Зв'язок між повною енергією та імпульсом частинки*:**

$$\vec{p} = \frac{W}{c^2}\vec{v}$$

Взаємозв'язок маси і енергії спокою

* З формули для енергії спокою випливає, що **всяка зміна маси тіла Δm супроводжується зміною енергії спокою ΔW_0, при цьому ці зміни пропорційні одна одній:**

$$\Delta W_0 = c^2 \Delta m$$

Це ***закон взаємозв 'язку маси й енергії спокою*** (або просто енергії).

Взаємозв'язок маси і енергії призводить до того, що сумарна маса частинок, які взаємодіють між собою, не зберігається

Приклад

- Нехай дві однакові частинки масою $\boldsymbol{m}$, які рухаються з рівними за модулем і протилежними за напрямком швидкостями, мають абсолютно непружне зіткнення, у результаті якого утвориться нова частинка. З закону збереження імпульсу, швидкість цієї нової частинки дорівнює нулю.

До зіткнення повна енергія кожної частинки

$$\boldsymbol{m}\sqrt{\boldsymbol{1} - \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{2}}/\mathrm{c}^{\boldsymbol{2}}}$$

Повна енергія частинки, що утворилась $\boldsymbol{m}'\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{2}}$, де $\boldsymbol{m}'$– маса нової частинки. Із закону збереження енергії $\boldsymbol{2m}\mathrm{c}^{\boldsymbol{2}}\sqrt{\boldsymbol{1} - \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{2}}/\mathrm{c}^{\boldsymbol{2}}} = \boldsymbol{m}'\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{2}}$

Звідси

$$\boxed{\boldsymbol{m}' = \frac{\boldsymbol{2m}}{\sqrt{\boldsymbol{1} - \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{2}}/\mathrm{c}^{\boldsymbol{2}}}} > \boldsymbol{2m}}$$

$$\boldsymbol{m' = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 2m}$$

*Отже ***маса частинки, що утворилася, більша суми мас вихідних частинок.***

Це зумовлено тим, що ***кінетична енергія частинок перетворилася в еквівалентну кількість енергії спокою, а це, в свою чергу, призвело до зростання маси на***

$$\Delta m = \frac{\Delta W_0}{c^2}$$

При розпаді нерухомої частинки на декілька частинок, що розлітаються у різні сторони, спостерігається зворотне явище: сума мас частинок, які утворилися, виявляється меншою маси вихідної частинки на величину, яка дорівнює суммарной кінетичній енергії цих частинок, поділеній на c^2.

В основі роботи атомних електростанцій лежить ланцюгова реакція поділу ядер урану.

Сумарна маса уламків, що утворилися при розпаді, менша за масу ядра урану, тому

процес розпаду супроводжується зменшенням енергії спокою частинок.

Різниця енергій спокою перетворюється в кінетичну енергію уламків і в енергію електромагнітного випромінювання, яке виникає при розпаді.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!