

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

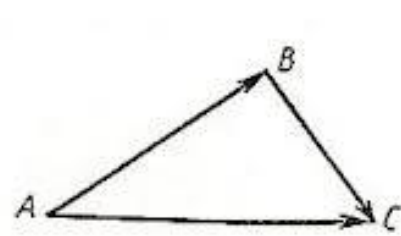


Рис. 1.22

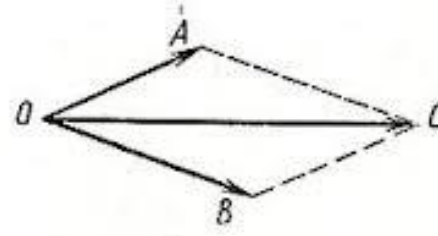


Рис. 1.23

# ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

## ■ СЛОЖЕНИЕ

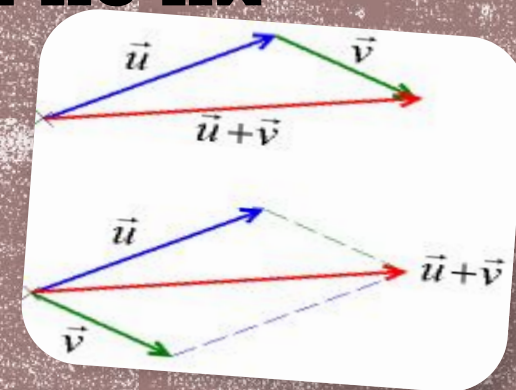
- Операцию сложения геометрических векторов можно определить несколькими в принципе эквивалентными способами, каждый из которых однако может быть удобнее или естественнее в зависимости от ситуации и типа рассматриваемых векторов. Так, правило треугольника наиболее простое и геометрически фундаментальное, удобно для сложения любого количества векторов, однако правило параллелограмма более удобно для фиксированных или скользящих векторов, так как не требует переноса второго слагаемого (что в принципе могло бы смущать или запутывать в этих случаях) для построения суммы, то есть удобно для сложения векторов с началом в одной точке, в добавок имея то преимущество, что в нем более очевидно равноправие слагаемых; координатное же определение, являясь простым и удобным, бывает очень полезно для вычислений.

# Правило треугольника

- Для сложения двух векторов  $a$  и  $b$  по правилу треугольника оба эти вектора переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало одного из них совпадало с концом другого. Тогда вектор суммы задаётся третьей стороной образовавшегося треугольника, причём его начало совпадает с началом первого вектора, а конец с концом второго вектора. Это правило прямо и естественно обобщается для сложения любого количества векторов, переходя в **правило ломаной**: начало второго вектор совмещается с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д., сумма же  $n$  векторов есть вектор, с началом, совпадающим с началом первого, и концом, совпадающим с концом  $n$ -го (то есть изображается направленным отрезком, замыкающим ломаную).

# ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

- Для сложения двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  по правилу параллелограмма оба эти векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы их начала совпадали. Тогда вектор суммы задаётся диагональю построенного на них параллелограмма, исходящей из их общего начала



# СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КООРДИНАТ.

▪ Каждая координата суммы векторов есть сумма соответствующей координаты всех (двух или более) суммируемых векторов. Например, для двумерного случая:

$$(\vec{a} + \vec{b})_x = a_x + b_x,$$

$$(\vec{a} + \vec{b})_y = a_y + b_y.$$

# МОДУЛЬ (ДЛИННА) ВЕКТОРА

- Модуль (длину) вектора можно узнать например при помощи теоремы косинусов

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \beta},$$

Где  $\beta$  — угол между отрезками, изображающими данные векторы, когда начало одного вектора совпадает с концом другого.

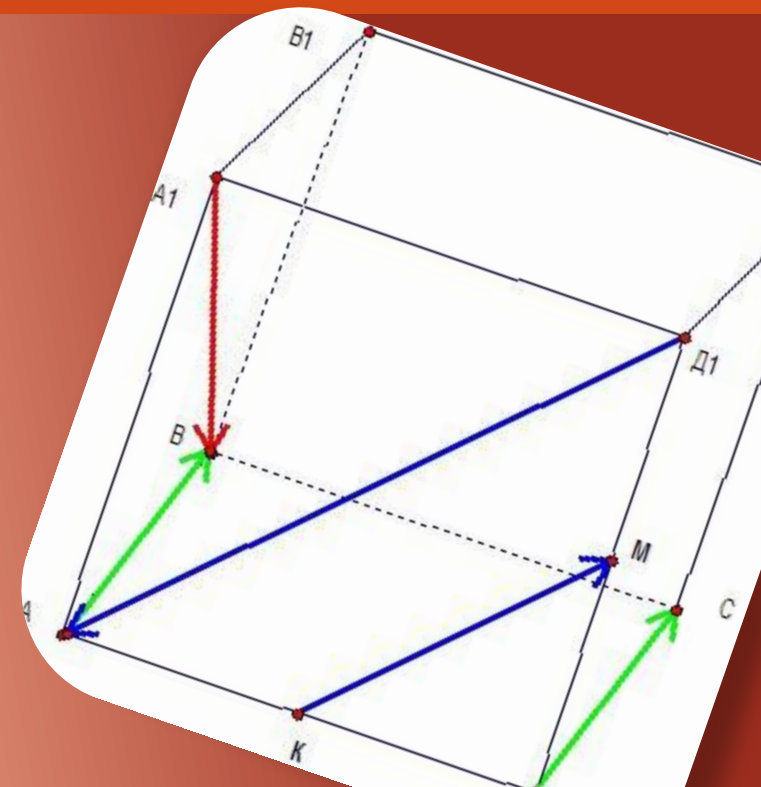
- Или:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha},$$

Где  $\alpha$  — угол между векторами (выходящими из одной точки).

**Сложение двух скользящих векторов** определено лишь в случае, когда прямые, на которых они расположены, пересекаются. Тогда каждый из векторов переносится вдоль своей прямой в точку пересечения этих прямых, после чего сложение осуществляется по правилу параллелограмма.

**Сложение двух фиксированных векторов** определено лишь в случае, когда они имеют общее начало. Их сложение в этом случае осуществляется по правилу параллелограмма.



# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярное произведение на множестве геометрических векторов вводится, как  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$ .

Скалярное произведение любого вектора  $\vec{a}$  и какого-то единичного вектора  $\vec{e}$  есть **проекция** (ортогональная проекция) вектора  $\vec{a}$  на направление этого единичного вектора:  $(\vec{a}, \vec{e}) = \text{Pr}_{\vec{e}}(\vec{a})$ .

Легко видеть, что скалярное произведение может быть записано через операцию (ортогонального) проецирования:  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b}) = |\vec{b}|\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a})$

(где  $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b})$  проекция вектора  $\vec{b}$  на направление  $\vec{a}$ ,  $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a})$  проекция вектора  $\vec{a}$  на направление  $\vec{b}$ ).