Гидравлические потери энергии

Сопротивление движению

- Сопротивления могут быть обусловлены <u>вязкостными</u> или <u>инерционными силами</u>.
- **Вязкостные силы** зависят от внутреннего трения между частицами жидкости;
- **Инерционные** – от способности частиц жидкости оказывать сопротивление изменению своего движения.

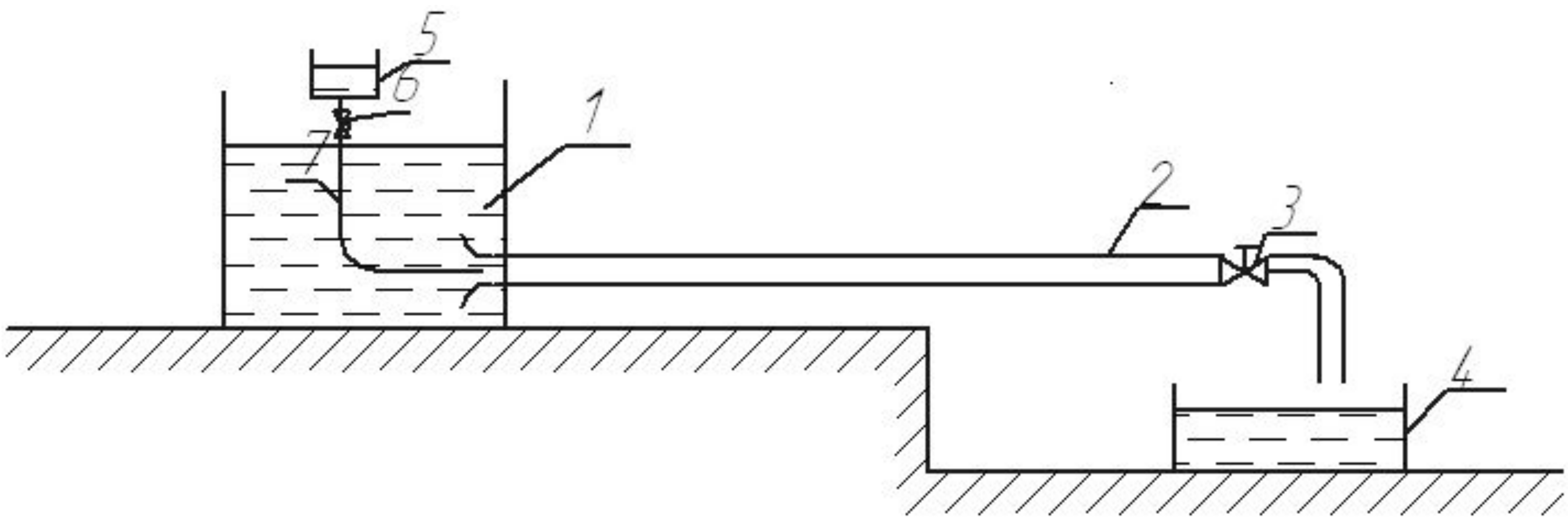
- В общем случае имеют место оба вида потерь – по длине и местные, значение которых суммируют
- $h_{\Sigma} = \Sigma h_l + \Sigma h_M,$
- где Σ $\mathbf{h_l}$ – сумма потерь по длине разных участков трубы, Σ $\mathbf{h_M}$ – сумма всех местных потерь.
- Сила внутреннего трения

$$T = - \mu \ \omega \ dv/dn$$

- Касательное напряжение $\tau = - \mu \ dv/dn$

Режимы течения жидкости. Число Рейнольдса

- Экспериментальная установка Рейнольдса



Число Рейнольдса

$$Re = Vd\rho / \mu = Vd / \nu \qquad d = 4S / L,$$

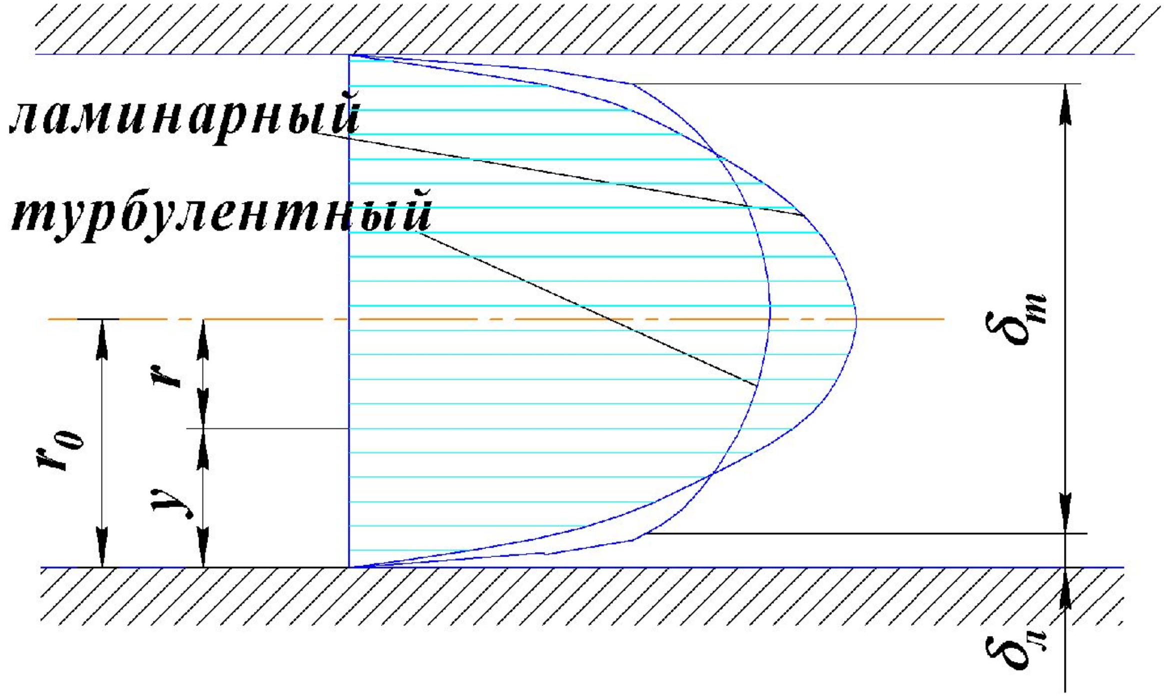
- $Re_{кр}$=2320 –критическое число
- При $Re < Re_{кр}$- режим течения ламинарный;
- При $Re > Re_{кр}$ - режим течения турбулентный.
- Переходный режим считается при

Re = 2320–4000.

Особенности течения жидкости в трубах

Формула Шиллера $L = 0,029 \cdot d \cdot Re.$

Обычно принимают $L=(20–50) \cdot d$.

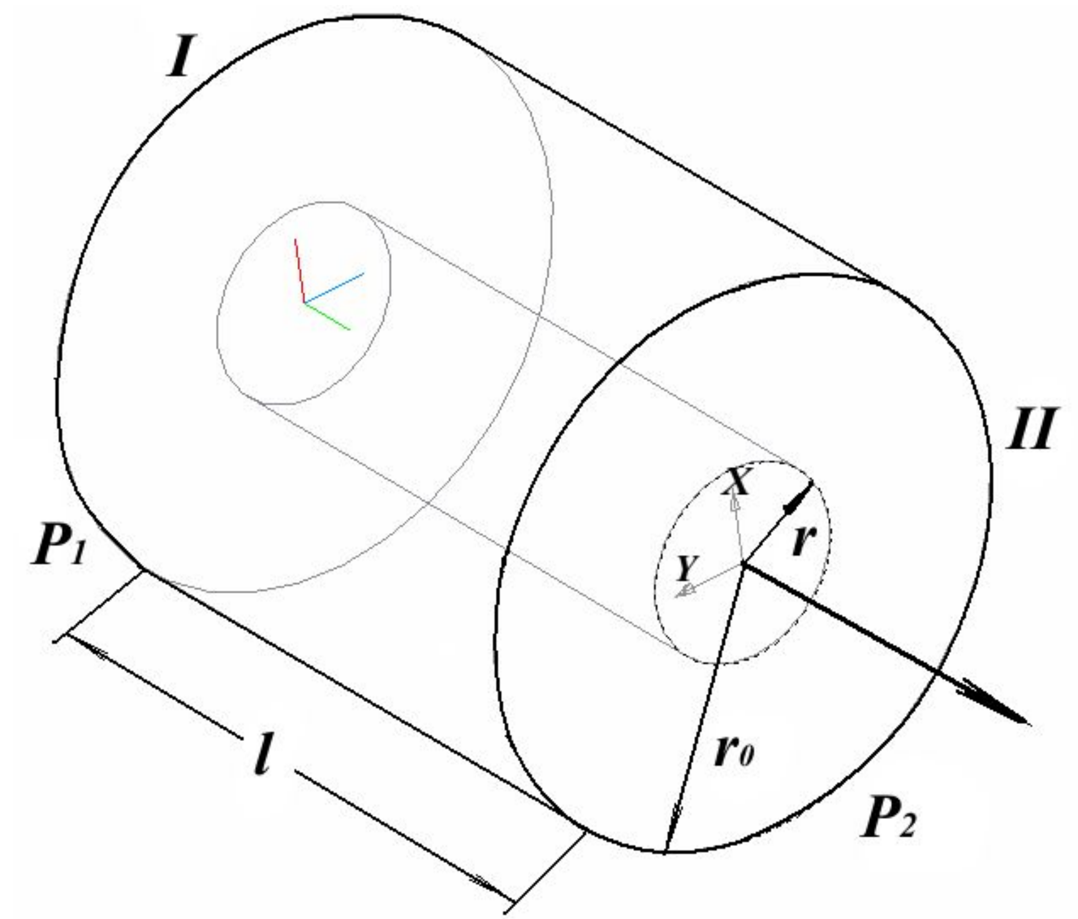


Ламинарный режим течения жидкости. Формула Стокса

Действующие силы при равномерном горизонтальном движении равны силам сопротивления.

Действующей силой будет сила давления, равная

- $P_2=(p_1 - p_2)\,\pi r^2.$



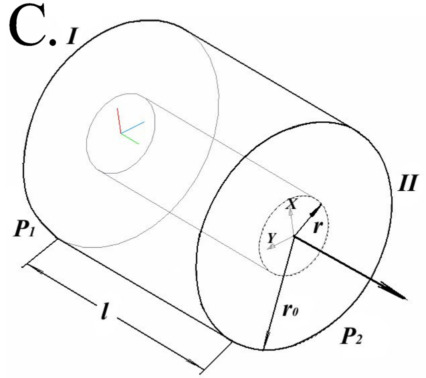
- Сила трения определяется произведением площади поверхности цилиндра $2\pi r \cdot l$ и касательного напряжения $\tau = \mu \, {dv}/{dr}$
- Сумма всех сил при равновесии должна быть равна нулю.

$$(p_1 - p_2)\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \mu \frac{dv}{dr} = 0.$$

- Разделяя переменные, получим:

$$\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r dr = -dv;$$

- интегрируя, находим $\dfrac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2 = -v + C.$

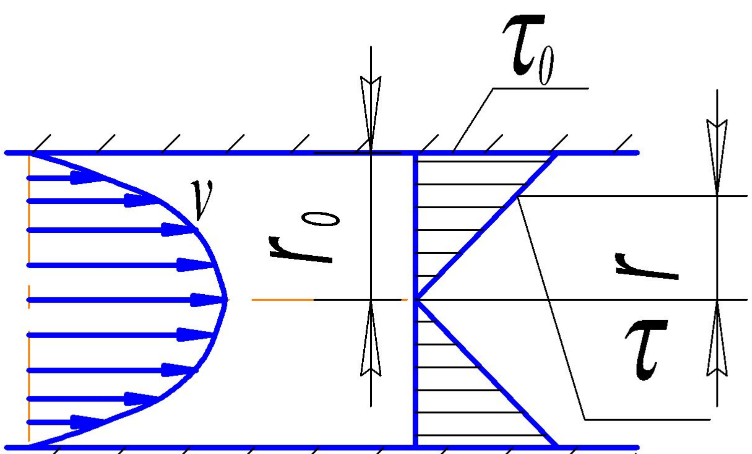


$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2 \cdot$$

- $$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(r_0^2 - r^2).$$ Закон Стокса

- При r = 0 $$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2.$$
- Тогда предыдущее выражение можно переписать так

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

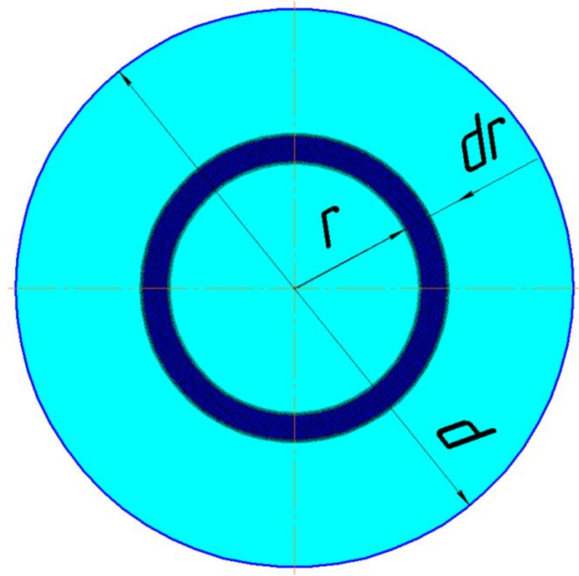


$$- p_2)\,\pi\, r^2 = 2\,\pi\, r\, l\, \tau$$

$$\tau = \tau\,\frac{p_1 - p_2}{2l}$$

Закон Гагена – Пуазейля

$ds = 2\pi r \cdot dr$ $\qquad dq = v \cdot ds$?



- Подставляя значение скорости $v = \dfrac{p_1 - p_2}{4\mu l}(r_0^2 - r^2).$

Найдем

$$dQ = \int_0^{r_0} \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(r_0^2 - r^2) 2\pi r dr \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi r_0^4$$

Или $Q = \dfrac{p_1 - p_2}{128\mu l} \pi d^4$

Это формула для расхода жидкости при ламинарном режиме течения жидкости.

Расход жидкости по тубе, выраженный через среднюю скорость $Q=\pi r_0{}^2 v_{cp}$

Приравнивая к расходу по формуле Пуазейля

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l}\pi r_0^4$$

Выразим v_{cp}

$$v_{cp} = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} r_0^2 .$$

Сравним это выражение с формулой $v_0 = \dfrac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2 .$ определяющей максимальную скорость по оси трубы

$$v_{cp} = \frac{1}{2} v_0$$

Следовательно

Потери напора при ламинарном движении

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l}\pi r_0^4 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4}$$

- или так как $h = \dfrac{p}{\rho g}$

$$h_1 - h_2 = \Delta h = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4 \rho g}$$

- Заменив $\mu = \nu\rho$, $d = 2r_0$, получим

$$\Delta h = \frac{128\nu l Q}{\pi d^4 \rho g}$$

- Выражение (6.7) называется **<u>законом Гагена-Пуазейля</u>** и позволяет определить потери энергии при ламинарном течении вязкой жидкости в круглой трубе при заданном расходе **Q** на участке длиной ***l*.**

Если в формулу Гагена –Пуазейля $\Delta h = \frac{128\nu lQ}{\pi d^4 \rho g}$ вместо Q подставить его выражение через скорость и площадь трубы, $Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v$

то получим $\Delta h = \frac{32\nu l v_{cp}}{gd^2}$

Последнее выражение можно представить так

$$\Delta h = \frac{64\nu \cdot l \cdot v_{cp}^2}{vD \cdot D \cdot 2g} = \frac{64}{Re} \frac{1}{D} \frac{v_{cp}{}^2}{2g}$$

Учтя гидр.коэф. трения $\frac{64}{Re} = \lambda$, (коэффициент Дарси) получим формулу Дарси-Вейсбаха

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}$$

Распределение касательных напряжений

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(r_0^2 - r^2) \quad \Rightarrow \quad \tau = \pm\mu\frac{dv}{dr} \quad \Rightarrow$$

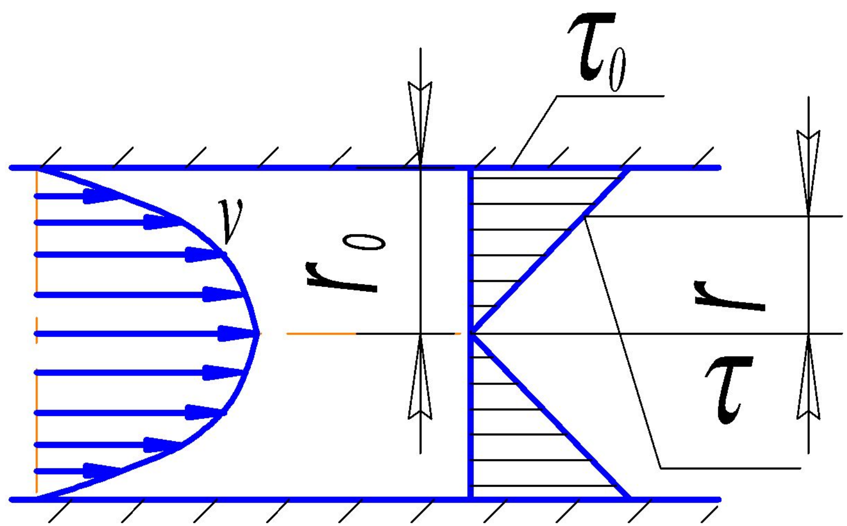
$$\tau = -\mu\frac{d}{dr}\left[\frac{p_1 - p_2}{4l}\cdot\left(r_0^2 - r^2\right)\right] = \frac{p_1 - p_2}{2\cdot l}r.$$

- Если напряжения на стенке при **$r=r_0$** принять равным **$\tau = \tau_0$**, то

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2\cdot l}r_0$$

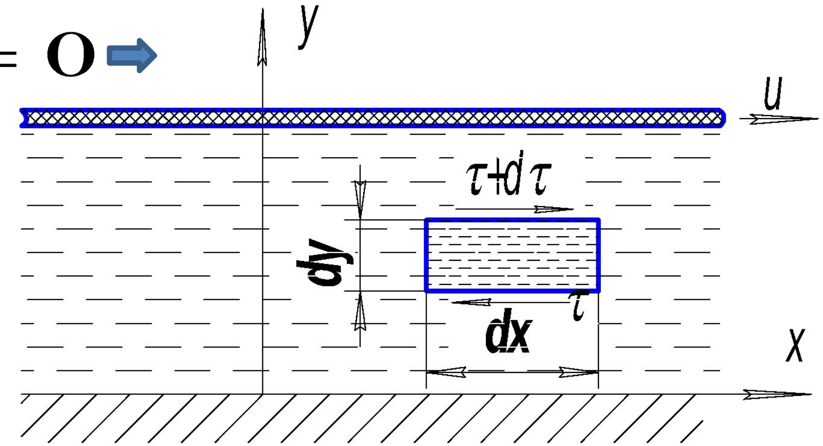
- И выражение для касательных напряжений **τ** будет иметь вид

$$\tau = \tau_0\frac{r}{r_0}$$



Частные случаи ламинарного движения

$$(\tau + d\tau)Bdx - \tau Bdx = 0 \Rightarrow$$



откуда dτ= 0 или τ=const=C_1

Согласно закона Ньютона

$$\tau = \pm\mu\frac{dv}{dy} = C_1$$ Интегрируя,

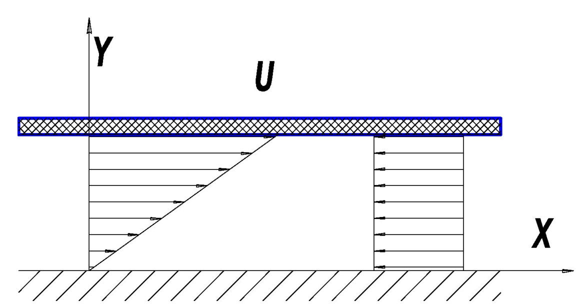
$$v = \frac{C_1}{\mu}y + C_2$$

Очевидно, что v=0 при y=0 и v=u при y=b. Отсюда

$$C_1 = \mu\frac{u}{b} \qquad C_2 = 0$$ подставляя, получим: $$v = u\frac{y}{b}$$

$$\tau = \mu\frac{dv}{dy} = \mu\frac{u}{b}$$

$$Q = \int_0^b vBdy = \frac{u}{2}Bb.$$



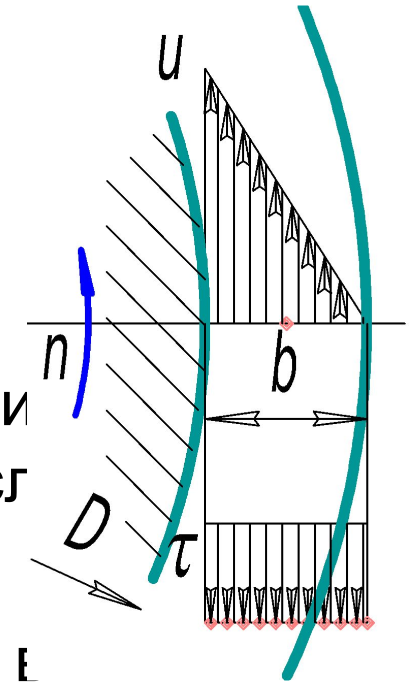
Фрикционное течение в кольцевом зазоре

- При малом относительном зазоре (b/D<<1)

$$M = \tau\pi DL\frac{D}{2} = \mu\frac{u}{2b}\pi D^2 \cdot L,$$

где L – длина подшипника

- Движение жидкости в зазоре сохраняет лами характер для чисел Рейнольдса $Re \le 30\sqrt{\frac{D}{b}}$, есл вращается вал, а подшипник неподвижен.



В противном случае ламинарный режим будет в области чисел Рейнольдса Re≤2000 , а само число определяется по выражению

$$Re = \frac{u \cdot b}{\nu}.$$

Плоское криволинейное течение жидкости

$$2\pi r \cdot 1 \cdot \tau - 2\pi(r + dr)l(\tau + d\tau) = 0 \Rightarrow$$

$d(\tau r^2) = 0$ или $\tau r^2 = A = Const$

$$bc = bb' - bc = (v + dv)t - v\frac{r + dr}{r}t = (dv - v\frac{dr}{r})t$$

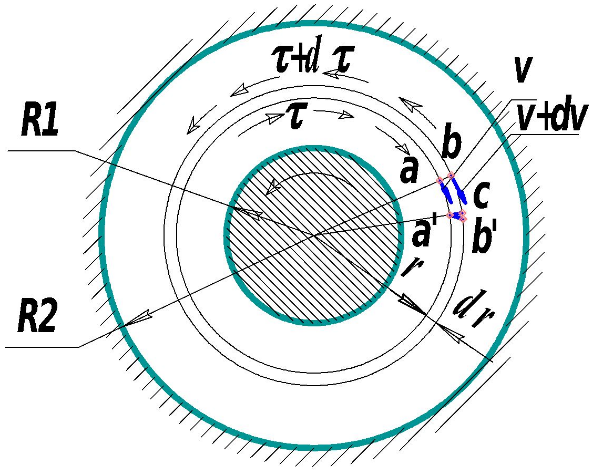
$$\frac{bc}{t} = dv - v\frac{dr}{r} \Rightarrow \tau = \mu(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}) \Rightarrow \tau r^2 = A \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} + \frac{A}{\mu r^2}, \Rightarrow$$

Интегрируя $v = -\frac{A}{2\mu r} + Br.$ Граничные условия v=u при $r=R_1$

V = 0 при r = R, находим распределение v, τ

$$v = \frac{R_1 R_2^2 - R_1 r^2}{(R_2^2 - R_1^2)r}u. \qquad \tau = \frac{2\mu R_2^2 u}{(R_2^2 - R_1^2)R_1}$$

$$M = 4\pi\mu l\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\omega$$



ОСЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

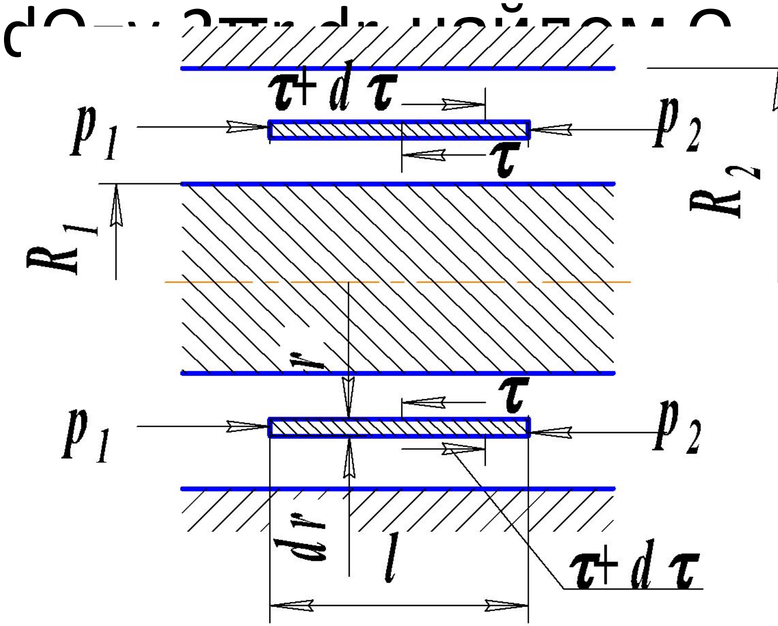
$$(p_1 - p_2)2\pi r dr - \tau 2\pi r l + (\tau + d\tau)2\pi(r + dr)l = 0$$

- $prdr + ld(\tau r) = 0$ интегрируя $\Rightarrow$ $v = -\dfrac{pr^2}{4\mu l} + C_1 \ln r + C_2.$
- Граничные условия: v= 0 при r=R_2 и v=0 при r=R_1 $\Rightarrow$

$$v = \frac{p}{4\mu l}\left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\ln\frac{r}{R_2}\right].$$

- Так как dQ = v 2πr dr найдем Q

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} v 2\pi r dr = \frac{\pi p}{8\mu l}\left[R_2^2 - R_1^2 + \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}{\ln\dfrac{R_1}{R_2}}\right].$$



Течение между неподвижными пластинами шириной В

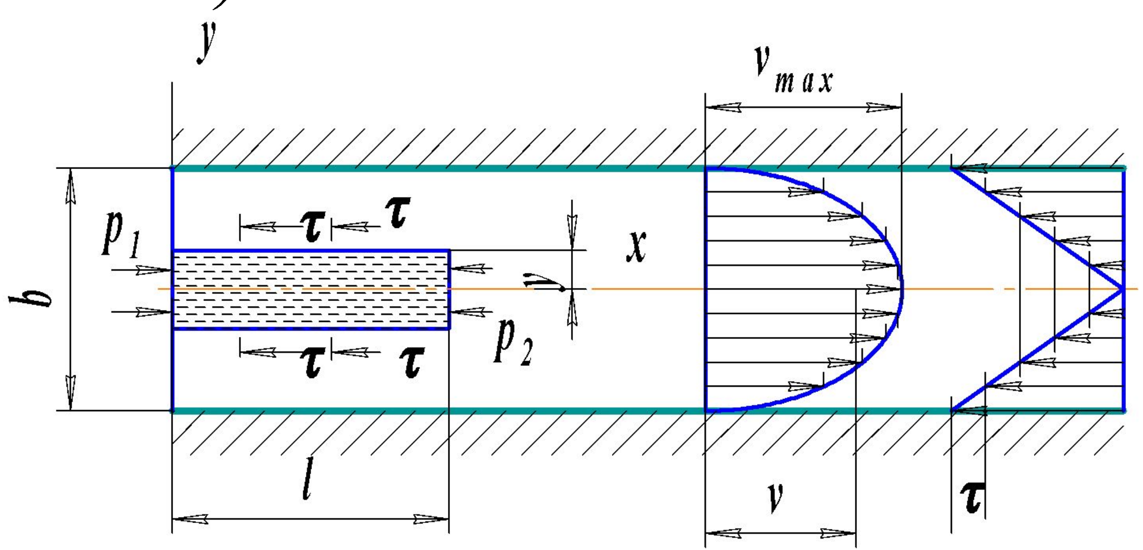
$$-\mu\cdot\frac{dv}{dy}\cdot 2\cdot B\cdot l = y(p_1 - p_2)\cdot 2\cdot B$$

- Принимая и вычисляя интеграл этого уравнения с учетом граничных условий – равенство нулю скорости на стенках – имеем

$$v = \frac{pb^2}{8\mu l}\left(1 - 4\frac{y^2}{b^2}\right) = v_{max}(1 - 4\frac{y^2}{b^2})$$

$$v = \frac{pb^2}{12\mu l} \qquad Q = \frac{pb^3B}{12\mu l}$$

$$h = 12\frac{\nu l}{gb^3}\frac{Q}{B}$$

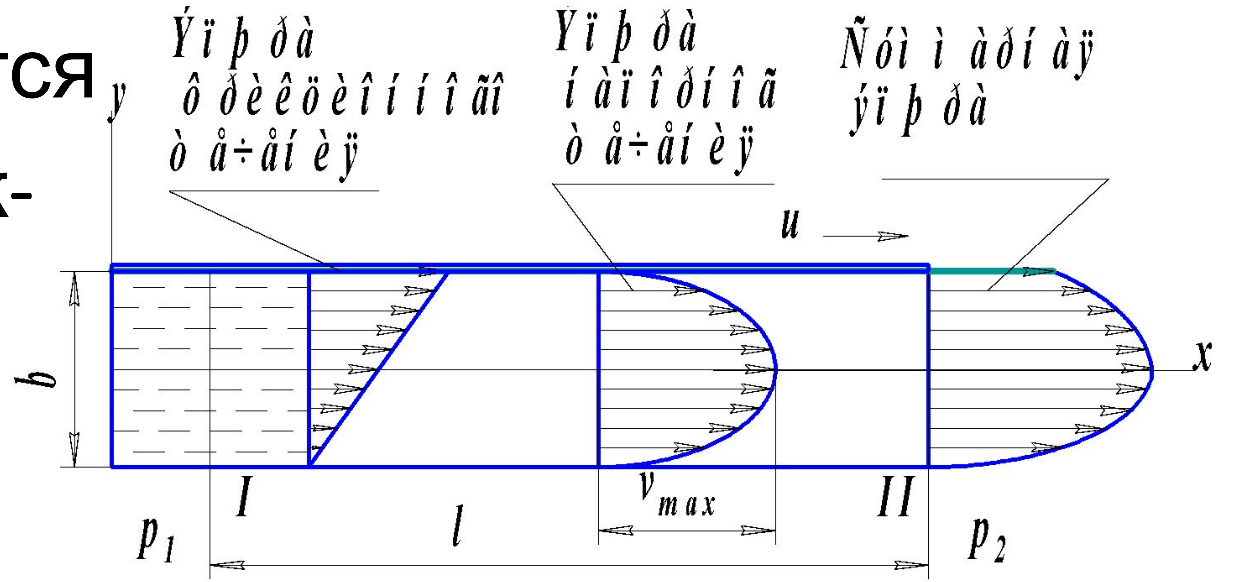


Зазор между параллельными пластинами, одна из которых подвижна

$$v = \frac{u}{b}y + \frac{u}{2} + u_{max}\left(\frac{1-4y^2}{b^2}\right)$$

- При реверсе пластины (-u), знак перед двумя первыми членами

формулы меняется на противополож-ный



Течение жидкости в зазоре между поршнем и цилиндром

- Так как зазор мал b<<D, а поршень соосен цилиндру, можно использовать формулу

$$Q = \frac{pb^3B}{12\mu l} \quad B=\pi D \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\pi b^3 D}{12\mu l}p$$

- При движущемся поршне с постоянной скоростью ±u

$$Q = \frac{\pi b^3 D}{12\mu l}p \pm \frac{u\pi DB}{2}.$$