

Гидравлические потери энергии

Сопротивление движению

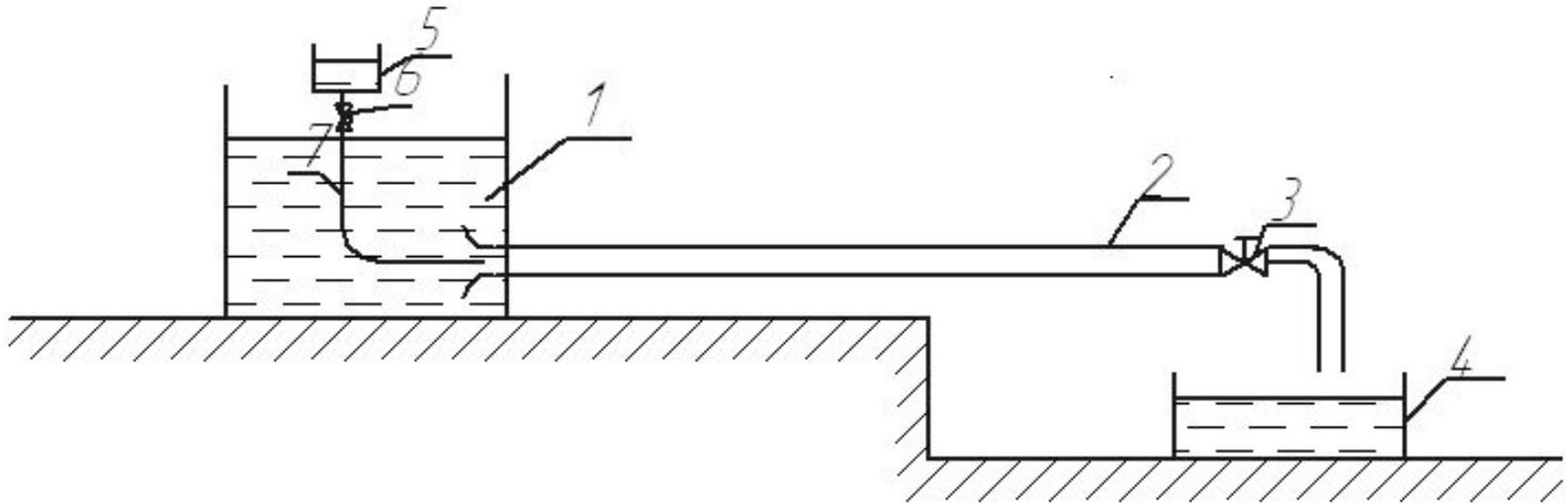
- Сопротивления могут быть обусловлены вязкостными или инерционными силами.
- **Вязкостные силы** зависят от внутреннего трения между частицами жидкости;
- **Инерционные** – от способности частиц жидкости оказывать сопротивление изменению своего движения.

- В общем случае имеют место оба вида потерь – по длине и местные, значение которых суммируют
- $h_{\Sigma} = \Sigma h_l + \Sigma h_M,$
- где Σh_l – сумма потерь по длине разных участков трубы, Σh_M – сумма всех местных потерь.
- Сила внутреннего трения

$$T = - \mu \omega \, dv/dn$$
- Касательное напряжение $\tau = - \mu \, dv/dn$

Режимы течения жидкости. Число Рейнольдса

- Экспериментальная установка Рейнольдса



Число Рейнольдса

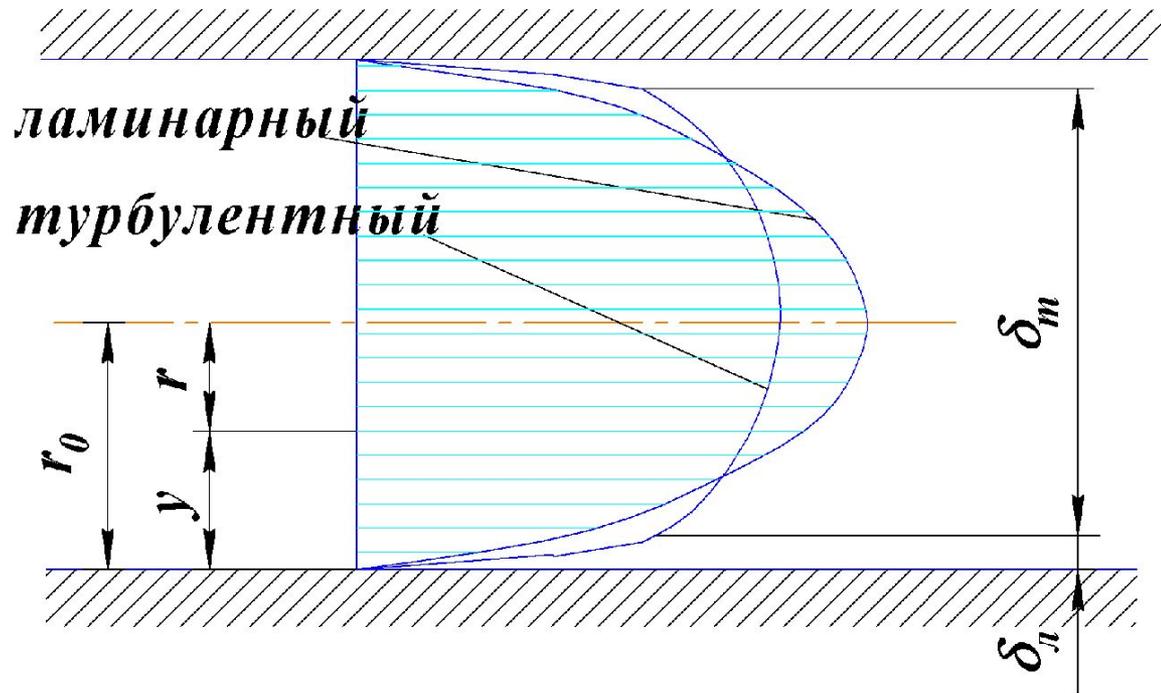
$$Re = Vd\rho / \mu = Vd / \nu \quad d = 4S / L,$$

- $Re_{кр} = 2320$ – критическое число
- При $Re < Re_{кр}$ - режим течения ламинарный;
- При $Re > Re_{кр}$ - режим течения турбулентный.
- Переходный режим считается при $Re = 2320 - 4000$.

Особенности течения жидкости в трубах

Формула Шиллера $L = 0,029 \cdot d \cdot Re.$

Обычно принимают $L = (20-50) \cdot d.$

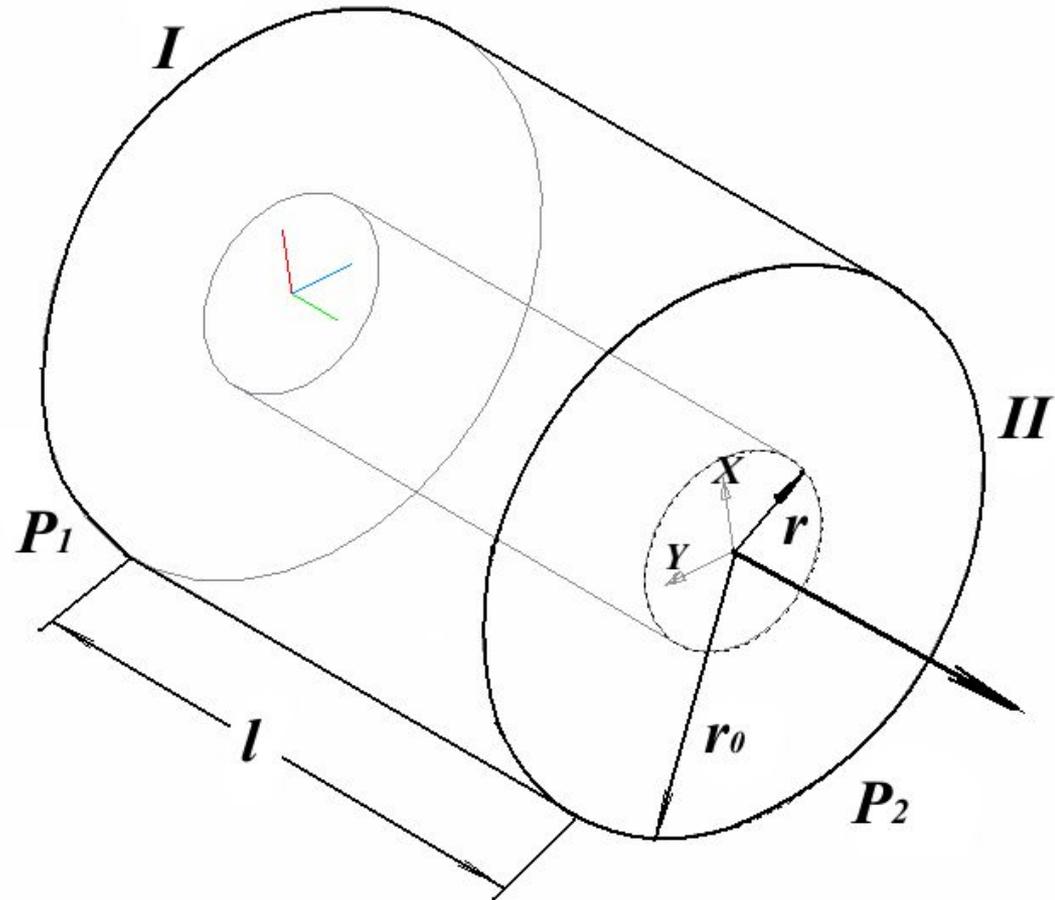


Ламинарный режим течения жидкости. Формула Стокса

Действующие силы при равномерном
горизонтальном
движении равны силам
сопротивления.

Действующей силой
будет сила давления,
равная

- $P_2 = (p_1 - p_2) \pi r^2$.



- Сила трения определяется произведением площади поверхности цилиндра $2\pi r \cdot l$ и касательного напряжения $\tau = \mu \frac{dv}{dr}$
- Сумма всех сил при равновесии должна быть равна нулю.

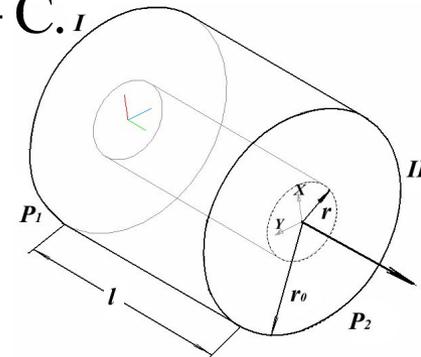
$$(p_1 - p_2)\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \mu \frac{dv}{dr} = 0.$$

- Разделяя переменные, получим:

$$\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r dr = -dv;$$

- интегрируя, находим $\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2 = -v + C.$

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2.$$

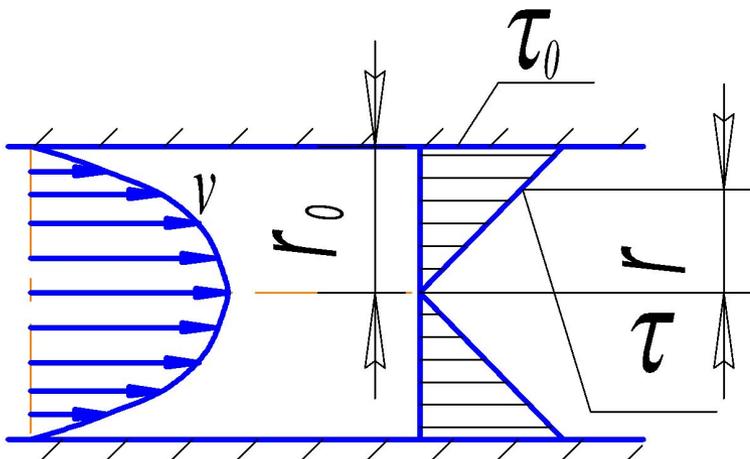


-  $v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r_0^2 - r^2)$. Закон Стокса

- При $r = 0$ $v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2$.

- Тогда предыдущее выражение можно переписать так

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$



$$-p_2) \pi r^2 = 2 \pi r l \tau$$



$$\tau = \tau \frac{p_1 - p_2}{2l}$$

Закон Гагена – Пуазейля

$$ds = 2\pi r \cdot dr \quad dq = v \cdot ds ?$$

- Подставляя значение

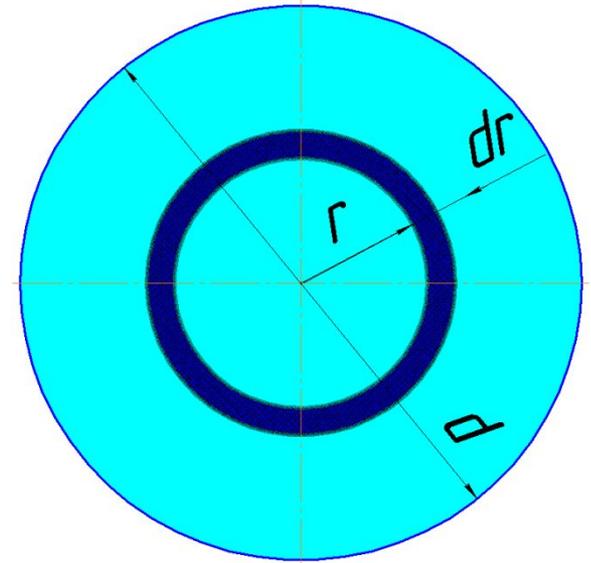
скорости $v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r_0^2 - r^2)$.

Найдем

$$dQ = \int_0^{r_0} \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi r_0^4$$

Или $Q = \frac{p_1 - p_2}{128\mu l} \pi d^4$

Это формула для расхода жидкости при ламинарном режиме течения жидкости.



Расход жидкости по трубе, выраженный через среднюю скорость $Q = \pi r_0^2 v_{cp}$

Приравнивая к расходу по формуле Пуазейля

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi r_0^4$$

Выразим v_{cp}

$$v_{cp} = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} r_0^2.$$

Сравним это выражение с формулой $v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r_0^2$ определяющей максимальную скорость по оси трубы

$$v_{cp} = \frac{1}{2} v_0$$

Следовательно

Потери напора при ламинарном

движении

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi r_0^4 \quad \longrightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4}$$

- или так как $h = \frac{p}{\rho g}$ $h_1 - h_2 = \Delta h = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4 \rho g}$
- Заменяя $\mu = \nu\rho$, $d = 2r_0$, получим

$$\Delta h = \frac{128\nu l Q}{\pi d^4 \rho g}$$

- Выражение (6.7) называется законом Гагена-Пуазейля и позволяет определить потери энергии при ламинарном течении вязкой жидкости в круглой трубе при заданном расходе Q на участке длиной l .

Если в формулу Гагена – Пуазейля $\Delta h = \frac{128\nu l Q}{\pi d^4 \rho g}$
 вместо Q подставить его

выражение через скорость и площадь трубы, $Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v$

то получим $\Delta h = \frac{32\nu l v_{cp}}{gd^2}$

Последнее выражение можно представить так

$$\Delta h = \frac{64\nu \cdot l \cdot v_{cp}^2}{\nu D \cdot D \cdot 2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{1}{D} \frac{v_{cp}^2}{2g}$$

Учтя гидр.коэф. трения $\frac{64}{\text{Re}} = \lambda$, (коэффициент Дарси) получим формулу

Дарси-Вейсбаха

$$\Delta h = \lambda \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g}$$

Распределение касательных напряжений

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \quad \longrightarrow \quad \tau = \pm \mu \frac{dv}{dr} \quad \longrightarrow$$

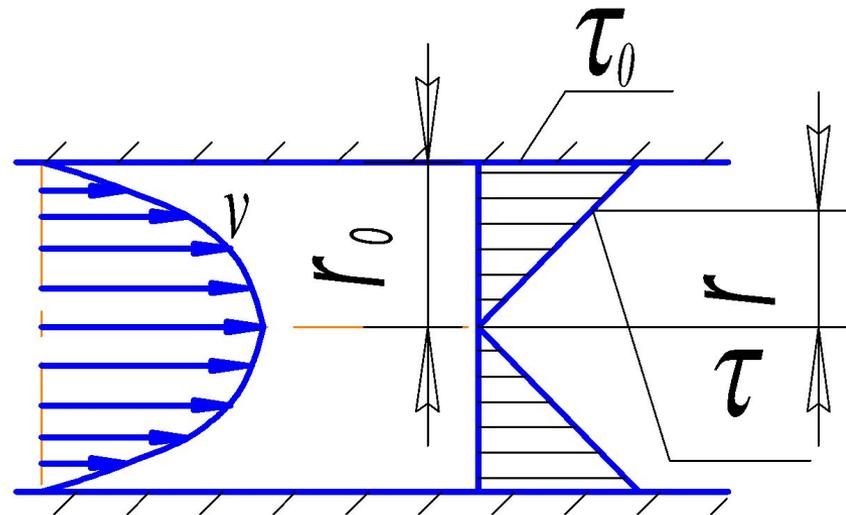
$$\tau = -\mu \frac{d}{dr} \left[\frac{p_1 - p_2}{4l} \cdot (r_0^2 - r^2) \right] = \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot l} r.$$

- Если напряжения на стенке при $r=r_0$ принять равным $\tau = \tau_0$, то

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot l} r_0$$

- И выражение для касательных напряжений τ будет иметь вид

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$



Частные случаи ламинарного движения

$$(\tau + d\tau)Bdx - \tau Bdx = 0 \rightarrow$$

откуда $d\tau = 0$ или $\tau = \text{const} = C_1$

Согласно закону Ньютона

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dy} = C_1 \quad \text{Интегрируя,}$$

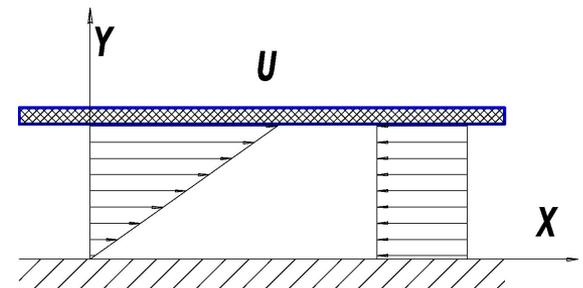
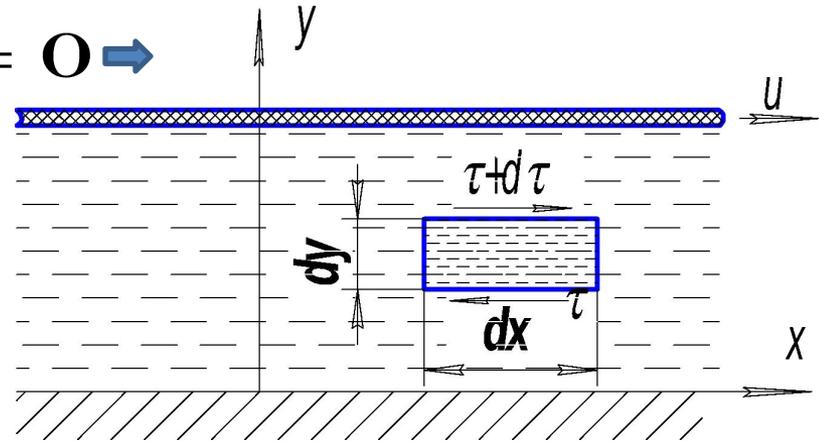
$$v = \frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

Очевидно, что $v=0$ при $y=0$ и $v=u$ при $y=b$. Отсюда

$$C_1 = \mu \frac{u}{b} \quad C_2 = 0 \quad \text{подставляя, получим: } v = u \frac{y}{b}$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \frac{u}{b}$$

$$Q = \int_0^b v B dy = \frac{u}{2} B b.$$



Фрикционное течение в кольцевом зазоре

- При малом относительном зазоре ($b/D \ll 1$)

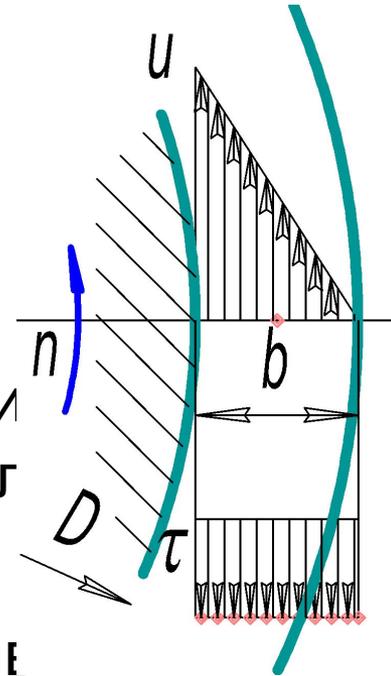
$$M = \tau \pi D L \frac{D}{2} = \mu \frac{u}{2b} \pi D^2 \cdot L,$$

где L – длина подшипника

- Движение жидкости в зазоре сохраняет ламинарный характер для чисел Рейнольдса $Re \leq 30 \sqrt{\frac{D}{b}}$, если вращается вал, а подшипник неподвижен.

В противном случае ламинарный режим будет в области чисел Рейнольдса $Re \leq 2000$, а само число определяется по выражению

$$Re = \frac{u \cdot b}{\nu}.$$



Плоское криволинейное течение ЖИДКОСТИ

$$2\pi r \cdot l \cdot \tau - 2\pi(r + dr)l(\tau + d\tau) = 0 \quad \rightarrow$$

$$d(\tau r^2) = 0 \text{ или } \tau r^2 = A = \text{Const}$$

$$bc = bb' - bc = (v + dv)t - v \frac{r + dr}{r} t = (dv - v \frac{dr}{r})t$$

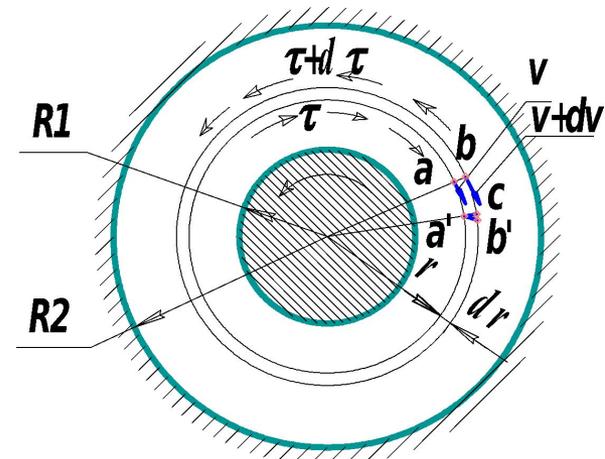
$$\frac{bc}{t} = dv - v \frac{dr}{r} \quad \rightarrow \quad \tau = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \quad \rightarrow \quad \tau r^2 = A \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} + \frac{A}{\mu r^2}, \quad \rightarrow$$

Интегрируя $v = -\frac{A}{2\mu r} + Br$. Граничные условия $v=u$ при $r=R_1$
 $V = 0$ при $r = R_2$, находим распределение v, τ

$$v = \frac{R_1 R_2^2 - R_1 r^2}{(R_2^2 - R_1^2)r} u.$$

$$\tau = \frac{2\mu R_2^2 u}{(R_2^2 - R_1^2)R_1}$$

$$M = 4\pi\mu l \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \omega$$



ОСЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

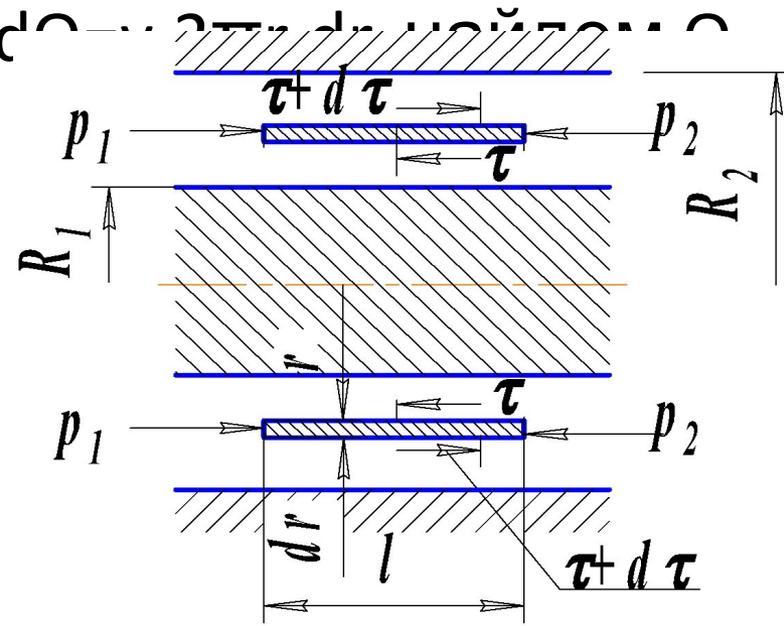
$$(p_1 - p_2)2\pi r dr - \tau 2\pi r l + (\tau + d\tau)2\pi(r + dr)l = 0$$

- $pr dr + l d(\tau r) = 0$ интегрируя $\longrightarrow v = -\frac{pr^2}{4\mu l} + C_1 \ln r + C_2$.
- Граничные условия: $v = 0$ при $r = R_2$ и $v = 0$ при $r = R_1$ \longrightarrow

$$v = \frac{p}{4\mu l} \left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_2} \right]$$

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} v 2\pi r dr = \frac{\pi p}{8\mu l} \left[R_2^2 - R_1^2 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \right]$$

Так как $d\tau = \frac{d\tau}{dr} dr$...



Течение между неподвижными пластинами шириной B

$$-\mu \cdot \frac{dv}{dy} \cdot 2 \cdot B \cdot 1 = y(p_1 - p_2) \cdot 2 \cdot B$$

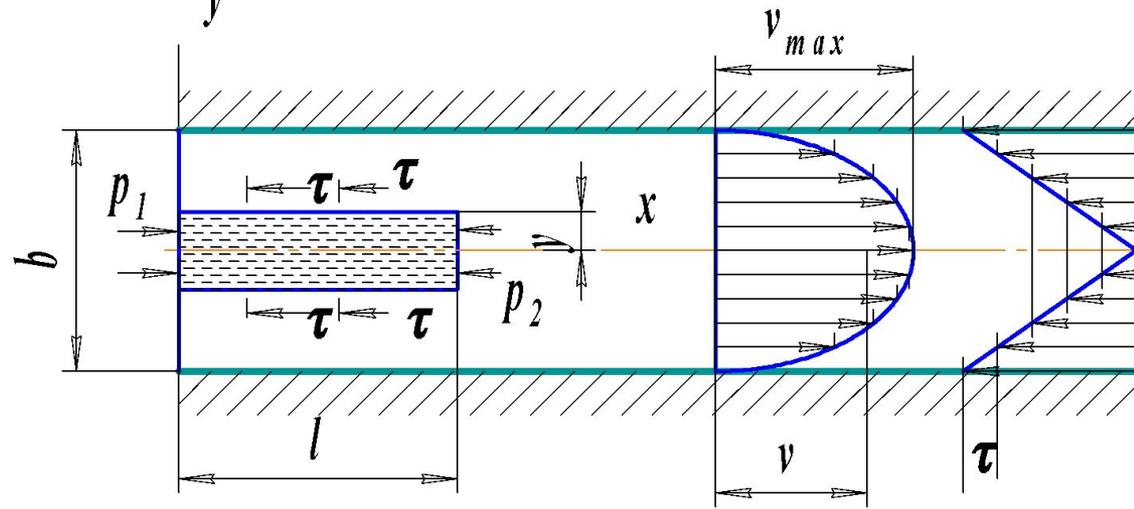
- Принимая и вычисляя интеграл этого уравнения с учетом граничных условий – равенство нулю скорости на стенках – имеем

$$v = \frac{pb^2}{8\mu l} \left(1 - 4 \frac{y^2}{b^2} \right) = v_{\max} \left(1 - 4 \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$v = \frac{pb^2}{12\mu l}$$

$$Q = \frac{pb^3 B}{12\mu l}$$

$$h = 12 \frac{\nu l}{gb^3} \frac{Q}{B}$$

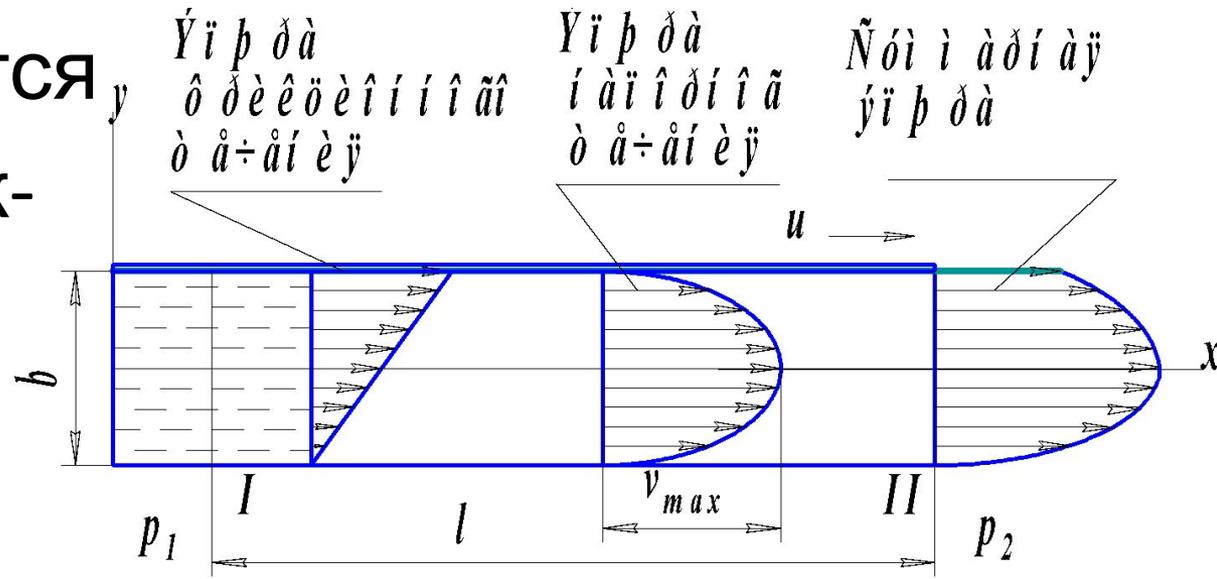


Зазор между параллельными пластинами, одна из которых подвижна

$$v = \frac{u}{b}y + \frac{u}{2} + u_{\max} \left(\frac{1 - 4y^2}{b^2} \right)$$

- При реверсе пластины (-u), знак перед двумя первыми членами

формулы меняется на противоположный



Течение жидкости в зазоре между поршнем и цилиндром

- Так как зазор мал $b \ll D$, а поршень соосен цилиндру, можно использовать формулу

$$Q = \frac{pb^3V}{12\mu l} \quad V = \pi D \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{\pi b^3 D}{12\mu l} p$$

- При движущемся поршне с постоянной скоростью $\pm u$

$$Q = \frac{\pi b^3 D}{12\mu l} p \pm \frac{u\pi D b}{2}$$