Гидродинамика

- **Гидродинамикой**– называется раздел гидравлики изучающий движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами при их относительном движении.
- Движение жидкости может быть установившимся (стационарным) или не установившимся (не стационарным)
-

Установившееся движение

- **Установившимся –** называется движение жидкости неизменное во времени, при котором давление и скорость являются функциями только координат, но не зависят от времени.

$$\mathrm{p} = \mathrm{f}_1(x, y, z), \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{f}_2(x, y, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

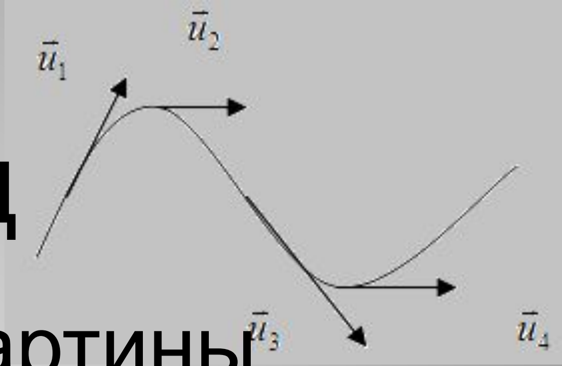
Неустановившееся движение

- **Неустановившимся** – называется движение жидкости, все или некоторые характеристики которого изменяются во времени, т. е. давление и скорость зависят как от координат , так и от времени.

$$\mathrm{p} = \mathrm{f}_1(x, y, z, t),$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{f}_2(x, y, z, t).$$

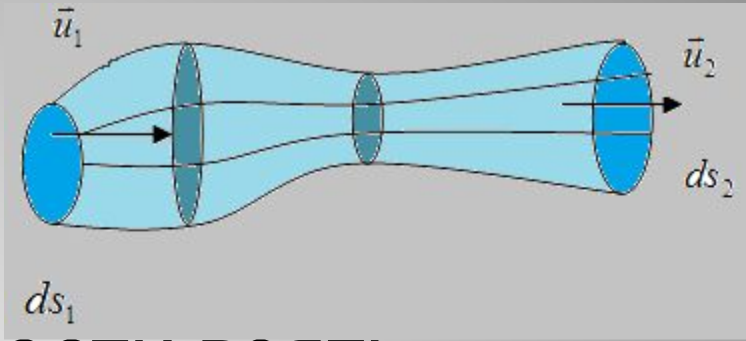
Траектории частиц



- Поэтому для рассмотрения картины течения, возникающей в каждый данный момент времени, вводится понятие *линии тока.*

- Линией тока – называется кривая в каждой точке который вектор скорости в данный момент времени направлен по касательной.

Трубка тока



- Если в движущейся жидкости взять бесконечно малый замкнутый контур и через все его точки провести линии тока, то образуется трубчатая поверхность, называемая – *трубкой тока.* Часть потока заключается внутри тока, называется – *элементарной струйкой*. При стремлении поперечных размеров струйки к нулю она в пределе стягивается в линию тока.

Методы изучения движения жидкости

- В гидромеханике существуют два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.
- Метод Лагранжа заключается в изучении движения каждой отдельной частицы жидкости. В этом случае движение определяется положением частицы жидкости в функции от времени t.
- Движение частицы будет определено, если точно определить координаты x, y, и z в заданный момент времени t, что дает возможность построить траекторию движения частицы жидкости. Величины x, y, и z являются переменными Лагранжа, а их изменения за время dt позволяет получить значение dx, dy и dz, а затем путь

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$\frac{dy}{Uy}$

$= \frac{dz}{Uz}$

Метод Лагранжа

- Проекции скорости на координатные оси определяются зависимостями $Ux = \frac{dx}{dt}$; $Uy = \frac{dy}{dt}$; $Uz = \frac{dz}{dt}$
  а местная скорость

$$U = \sqrt{Ux^2 + Uy^2 + Uz^2}$$

- Метод Лагранжа сводится к определению семейства траекторий движения частиц движущейся жидкости.
- Учитывая, что для установления движения линии тока совпадают с траекторией движущихся частиц, можно записать:
-

$$\frac{dx}{Ux} = \frac{dy}{Uy} = \frac{dz}{Uz}$$

Метод Эйлера

- Метод Эйлера основан на изучении поля скоростей, под которым понимается значение величины и скоростей во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью.
- Переменными Эйлера являются значения скоростей , которые определяются в зависимости от координат точек пространства и времени, т. е.

$$\mathrm{Ux} = \mathrm{f}(x, y, z, t), \quad \mathrm{Uy} = \mathrm{f}(x, y, z, t), \quad \mathrm{Uz} = \mathrm{f}(x, y, z, t).$$

Понятие расхода

- Расходом Q называется количество жидкости, протекающее через сечение потока в единицу времени.

$$dQ = Ud\omega$$

или

$$Q = \int_{\omega} Ud\omega$$

Средняя скорость

- Средней скоростью называется одинаковая по всему сечению потока скорость, при которой расход равен действительному

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int_{\omega} U d\omega}{\omega}$$

Уравнение Эйлера для движения идеальной жидкости

- Уравнение Эйлера которое выражают условия равновесия жидкости, уже были нами получены:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+X=0$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y=0$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z=0$$

- Силы инерции приведенные к единицы массы, соответственно будут:

$$j_x=-1\frac{dUx}{dt} \qquad j_y=-1\frac{dUy}{dt} \qquad j_z=-1\frac{dUz}{dt}$$

Уравнение Эйлера

- Прибавляя силы инерции, к действующим силам получим:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+X&=\frac{dUx}{dt}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y&=\frac{dUy}{dt}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z&=\frac{dUz}{dt}\end{aligned}\right\}$$

- Так как u_x, u_y, u_z являются сложными функциями, зависящими от переменных x, y, z и t, то по правилу дифференцирования получим уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости в развернутом виде

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};
\end{aligned}\right\}
$$

Уравнение неразрывности

- Уравнение неразрывности или сплошности жидкости основано на законе сохранения массы и исходит из положения механики сплошных сред о том, что внутри движущейся жидкости не может произойти разрывов,

  т. е. образования пустот.
- Уравнение неразрывности может быть представлено в дифференциальной форме для частицы жидкости и элементарной струйки, а также в конечных величинах для потока жидкости.

Уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0 \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\,\mathrm{u} = 0$$

- Если пренебречь сжимаемостью жидкости, то ее плотность в любом сечении будет одинакова (ρ=const) и не будет зависеть от времени

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Или в краткой форме ***div u=0***

Для элементарной струйки

- При установившемся движении уравнение неразрывности можно вывести исходя из свойств элементарной струйки, в соответствии с которым жидкость из струйки не вытекает в стороны и не притекает в нее извне, но в то же время местные скорости разные по длине струйки. Отсюда следует, что количество жидкости, притекающей к струйке в начальном сечении и вытекающей из нее в конечном сечении, равны между собой и общий объем жидкости в струйке не изменяется т. е. элементарные расходы в единицу времени равны:

$$dQ_1 = U_1 d\omega_1$$

$$dQ_2 = U_2 d\omega_2$$

$$U_1 d\omega_1 = U_2 d\omega_2$$

Для потока жидкости

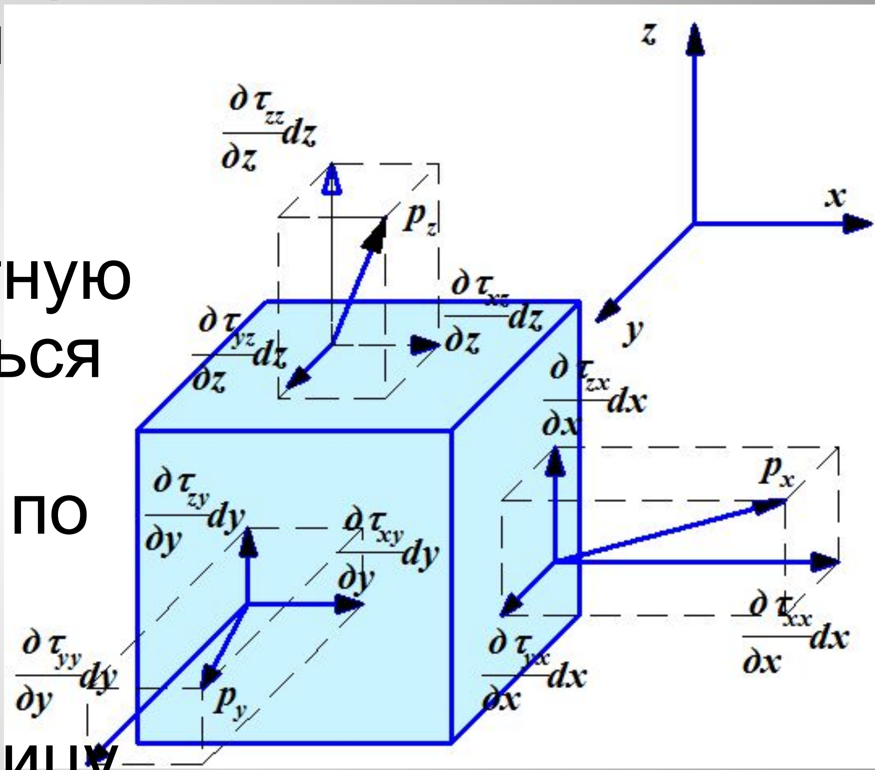
- Для потока жидкости уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$U_1\omega_1 = U_2\omega_2 \qquad \frac{U_1}{U_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

- Т. е. отношение средних скоростей в сечениях потока обратно пропорционально отношению их площадей.

Уравнения Навье - Стокса

- В реальной жидкости благодаря наличию трения появляются касательные напряжения. Ввиду этого напряжения p_n, действующие на поверхностную площадку, будут располагаться произвольно к выбранной площадке, а не обязательно по нормали к ней.



- Поэтому в отличие от идеальной жидкости на частицу реальной жидкости кроме сил инерции, силы тяжести и поверхностных сил давления будут действовать еще и

Уравнения Навье-Стокса

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\}$$

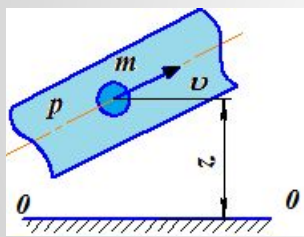
В векторном виде уравнение будет выглядеть так

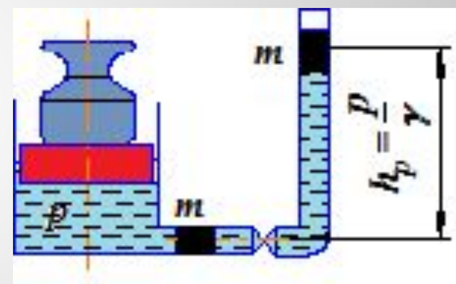
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\nabla^2\vec{v}$$

Энергия элементарной струйки

Известно, что механическая энергия любого тела характеризуется двумя величинами: кинетической и потенциальной энергиями. Так, если тело или частица имеет массу *m* и движется со скоростью *u*, то ее кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{mu^2}{2}$$





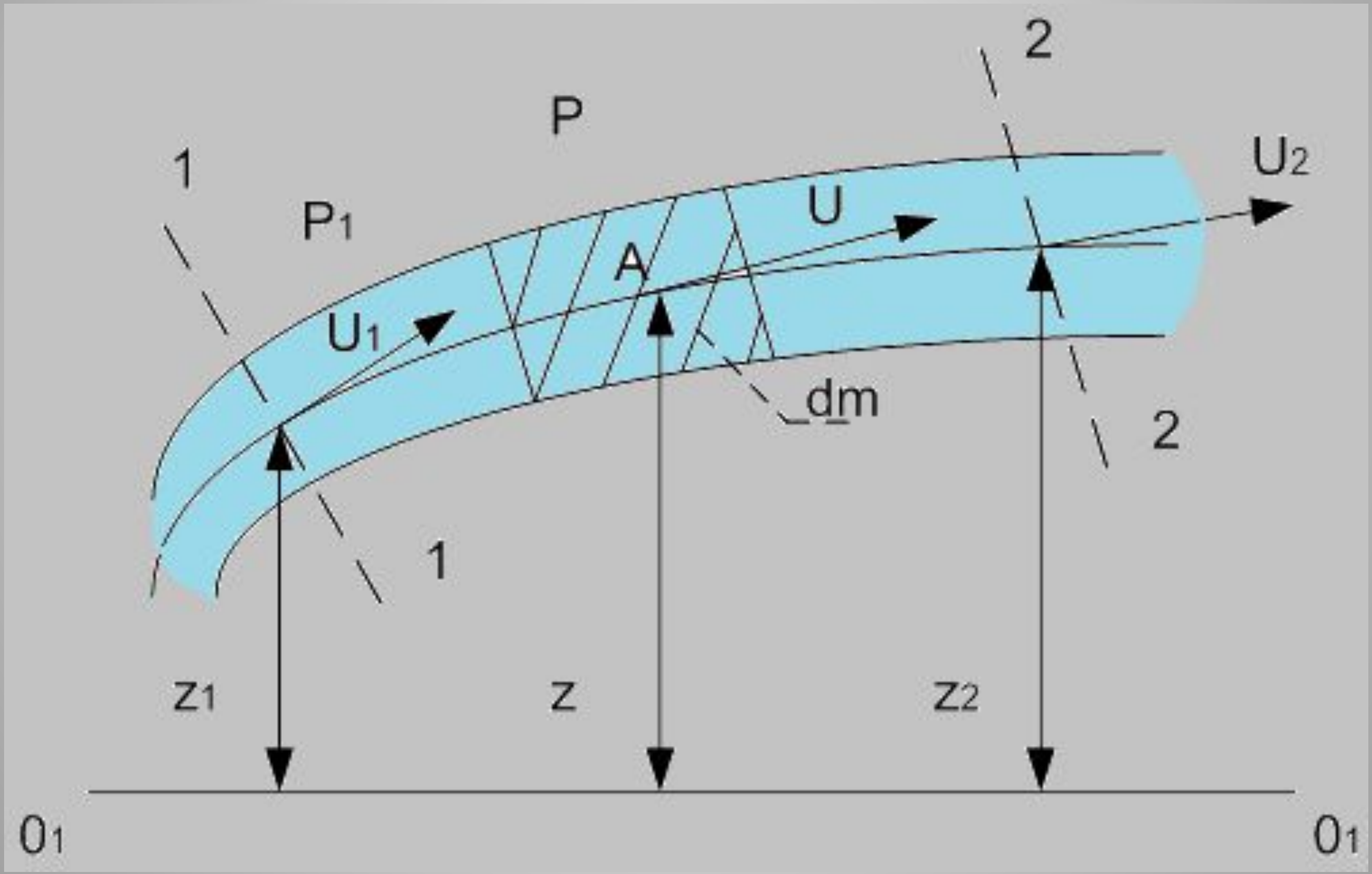
потенциальная энергия частицы *m*, поднятой на высоту *z*

$$E_П = mgz$$

Кроме того, если масса частицы жидкости *m* занимает объем *V* и находится под давлением *p*, то это тело еще обладает потенциальной энергией давления

$$E_D = pV.$$

Элементарная струйка



- На основании изложенного полная механическая энергия элементарной струйки (частицы), имеющей массу m и некоторую скорость *u*, определится таким образом:

$$E = \frac{mu^2}{2} + mgz + pV.$$

Так как

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Удельная энергия струйки, т. е. энергия, отнесенная к единице веса, определится делением всех членов последнего уравнения на вес элементарной струйки — *mg:*

$$Э_{уд} = \frac{u^2}{2g} + z + p/\rho g$$

Уравнение Бернулли для реальной струйки

- Вдоль элементарной струйки удельные кинетическая и потенциальная энергии могут изменяться, но их сумма остается постоянной.
- При движении вязкой жидкости суммарная удельная энергия движущийся жидкости вдоль струйки убывает в силу различных гидравлических сопротивлений. Следовательно, для двух сечений элементарной струйки вязкой жидкости, находящейся в установившемся движении:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{U_1{}^2}{2g} > z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{U_2{}^2}{2g}$$

- Чтобы получить равенство левой и правой части, необходимо в правой части добавить дополнительный член *hz*, обозначающий затрату удельной энергии на преодоление сопротивлений при движении реальной вязкой жидкости в пределах между первым и вторым сечениями. В этом случае уравнение Бернулли принимает вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{U_1{}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{U_2{}^2}{2g} + h_{\Sigma_{1\to2}}$$

Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

- Рассмотрим распределение давления. В плоскости перпендикулярной направлению движения. Гидродинамическое давление распределяется по закону гидростатики. В связи с этим справедливо усл $z + \frac{P}{\rho g} = const$

- т.е. сум $\frac{P}{\rho g}$ а отметки *z* и пьезометрической высоты во всех точках сечения потока остается одинаковой, хотя меняется для различных сечений.

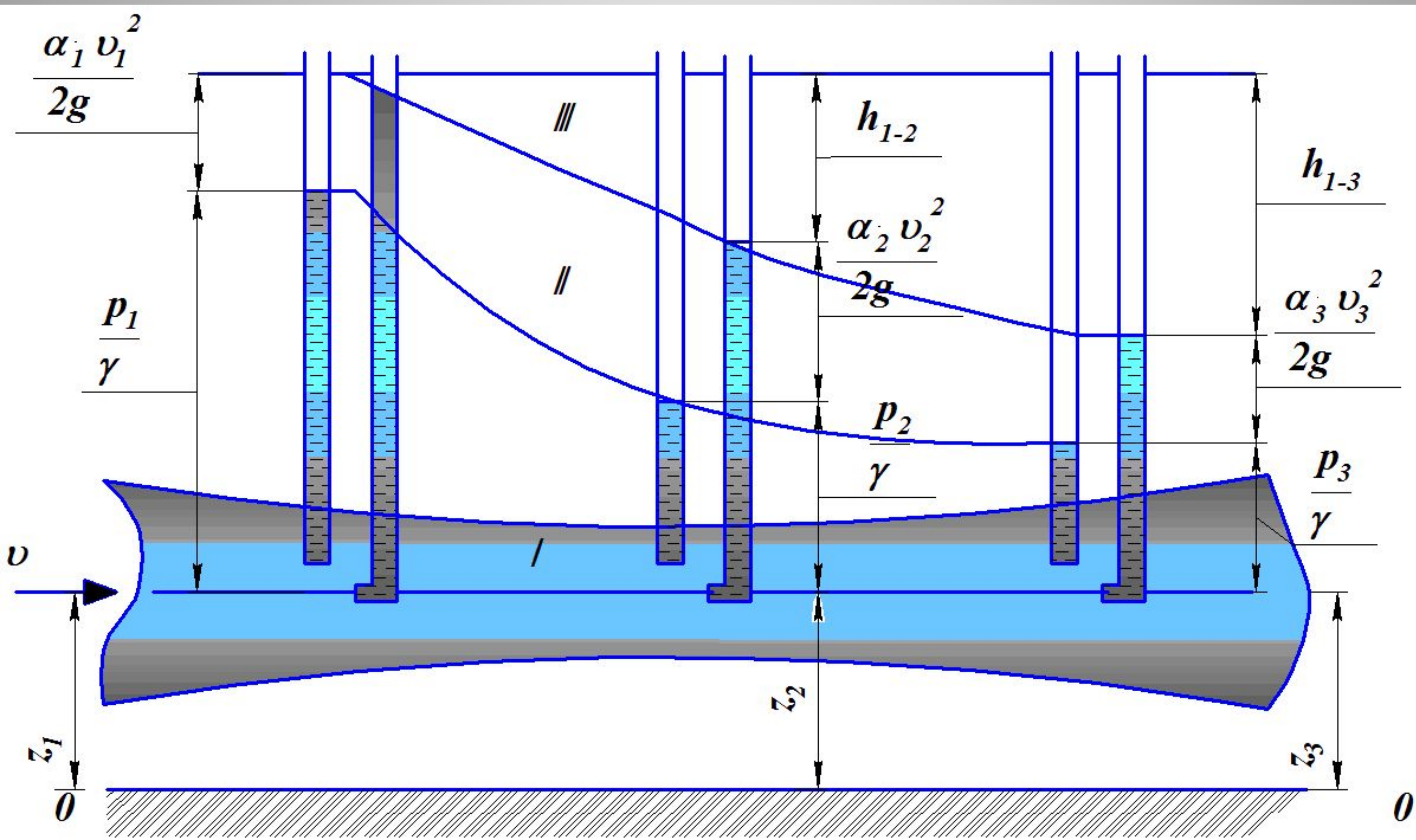
- Для наиболее распространенных случаев движения жидкости значения α следующее: при ламинарном движении в круглой трубе α = 2, при турбулентном – зависит от режима и принимает значение α = 1,1—1,3. Обычно α определяют опытным путем.
- С учетом вышесказанного, уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости может быть записано в виде:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_{\text{ср}1}{}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_{\text{ср}2}{}^2}{2g} + h_{\Sigma_{1-2}}$$

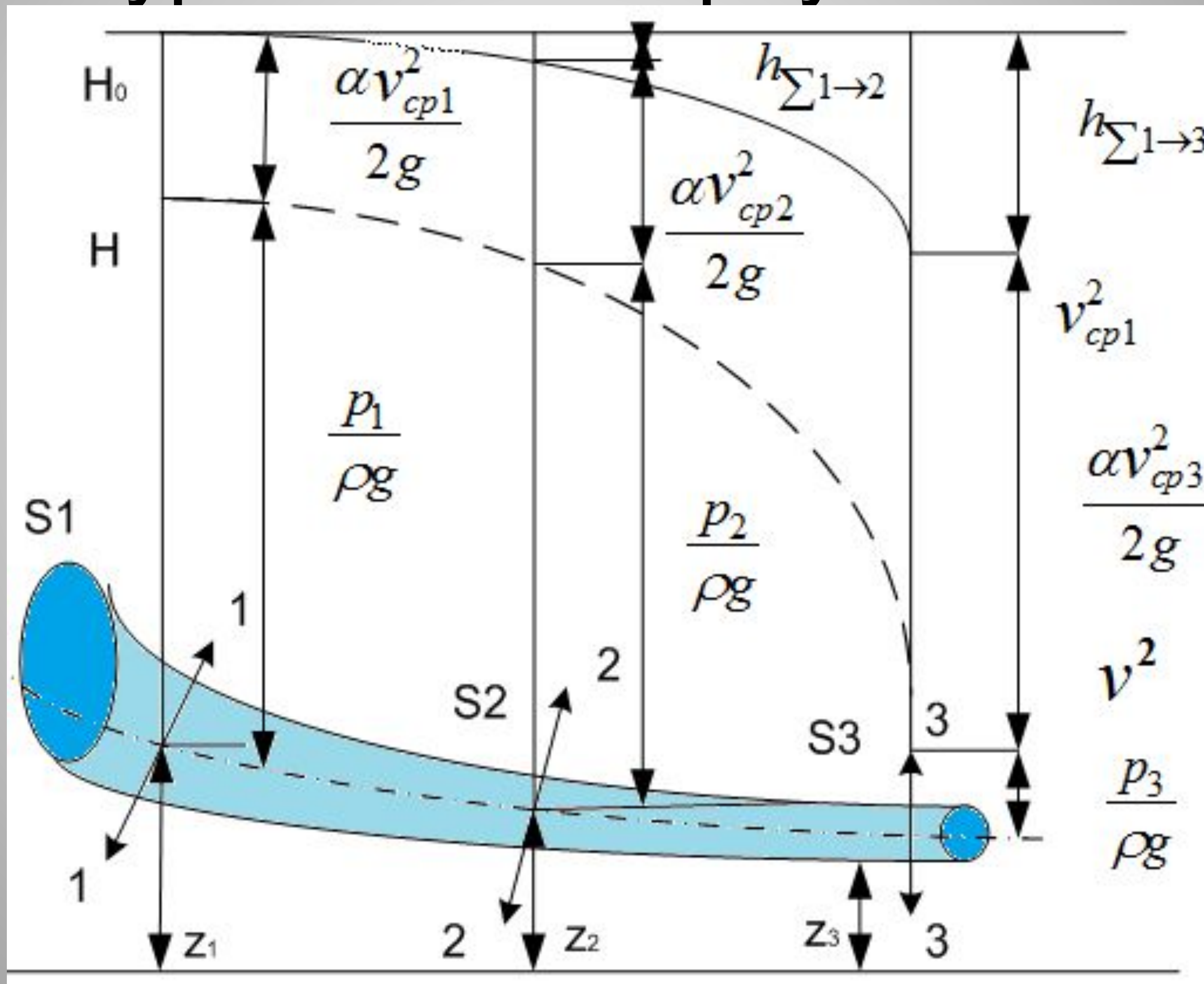
где v_{cp1}, и v_{cp2} – средние скорости в сечениях 1 и 2;

$h_{\sum 1\text{-}2}$ – потери энергии на преодоление сопротивлений между сечениями 1 и 2.

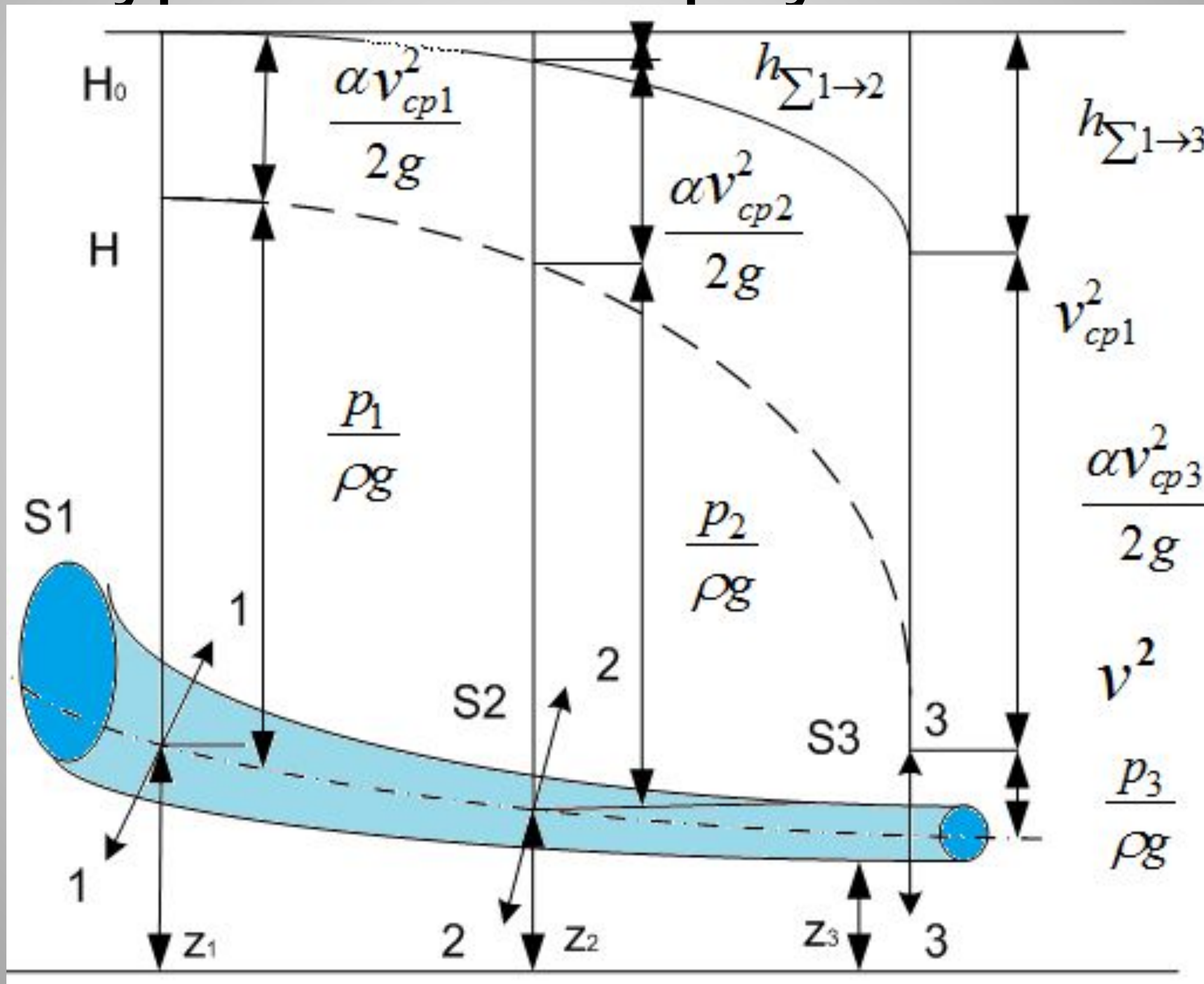
Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли



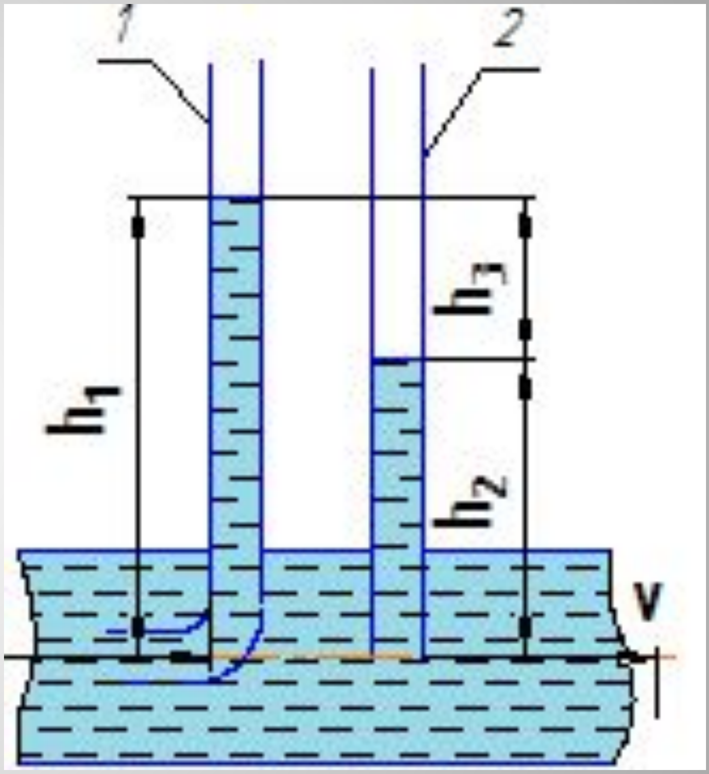
Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли



Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли



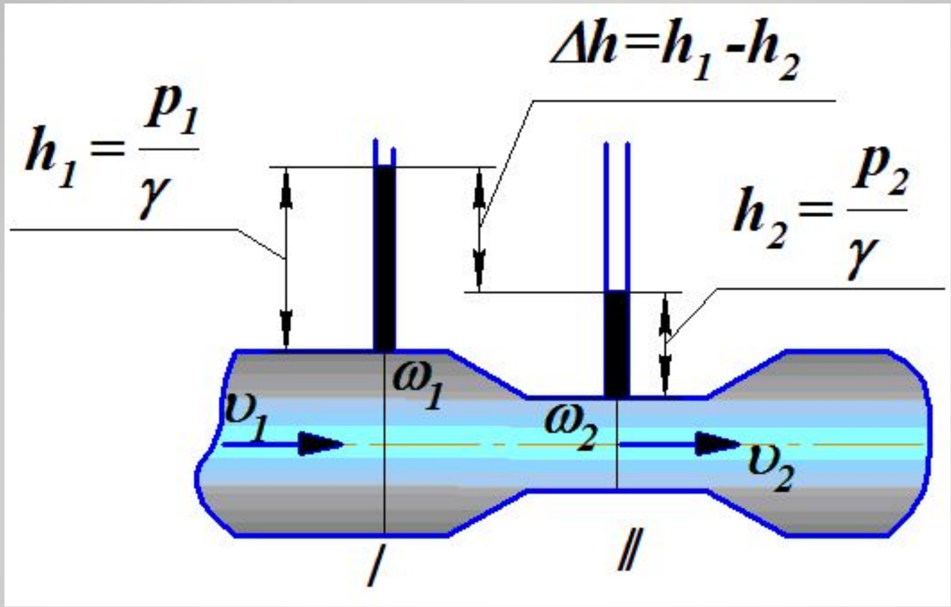
Трубка Пито и пьезометр



Практическое применение уравнения Бернулли

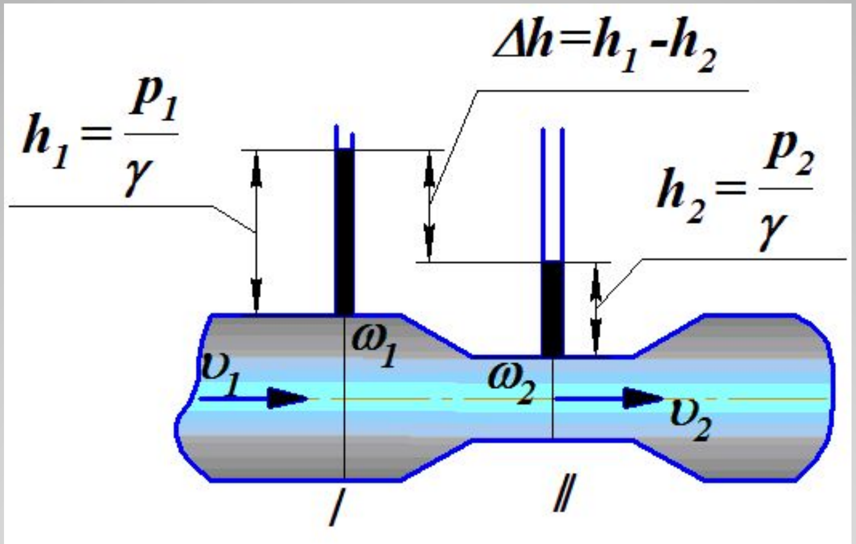
- На основании уравнения Бернулли сконструирован ряд приборов, такие, как, расходомер Вентури, водоструйный насос, карбюратор, эжектор и др.

Расходомер Вентури



$V_1S_1 = V_2S_2$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = \frac{D^2}{d^2}$$

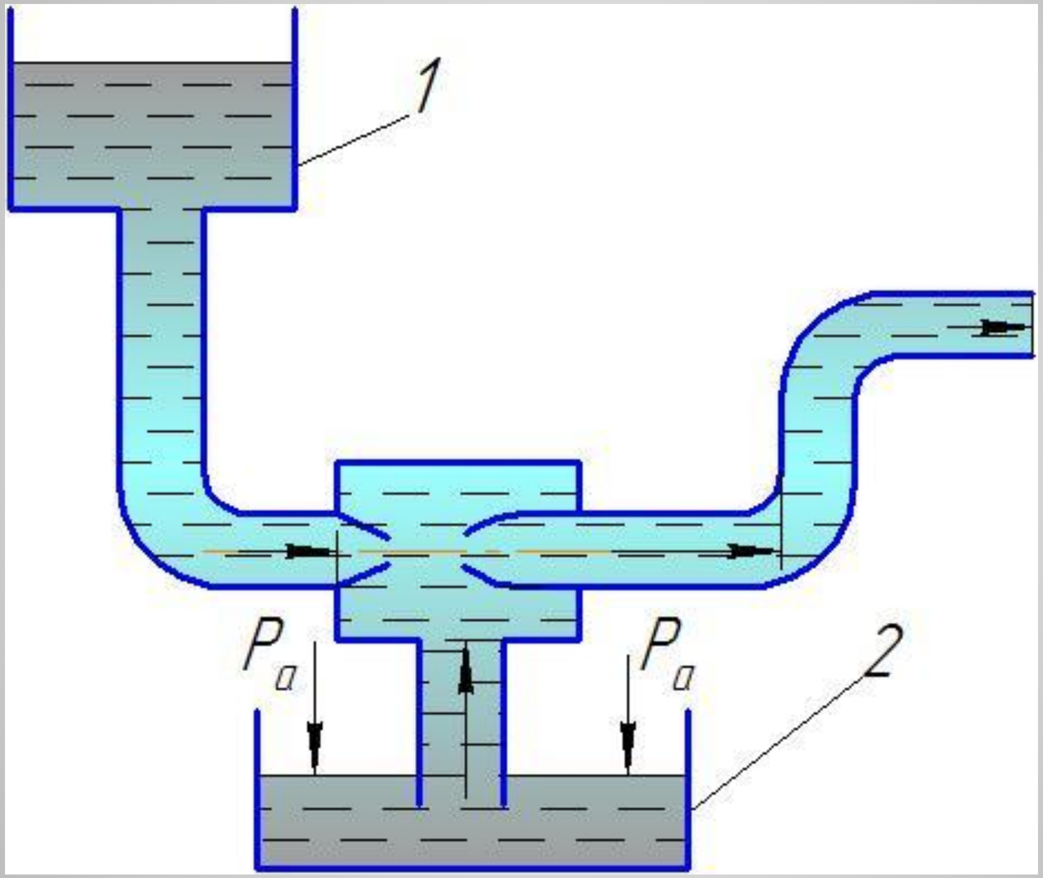


$$(p_1/\rho g) + v_1^2/2g = (p_2/\rho g) + v_2^2/2g$$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = \frac{D^2}{d^2}$$

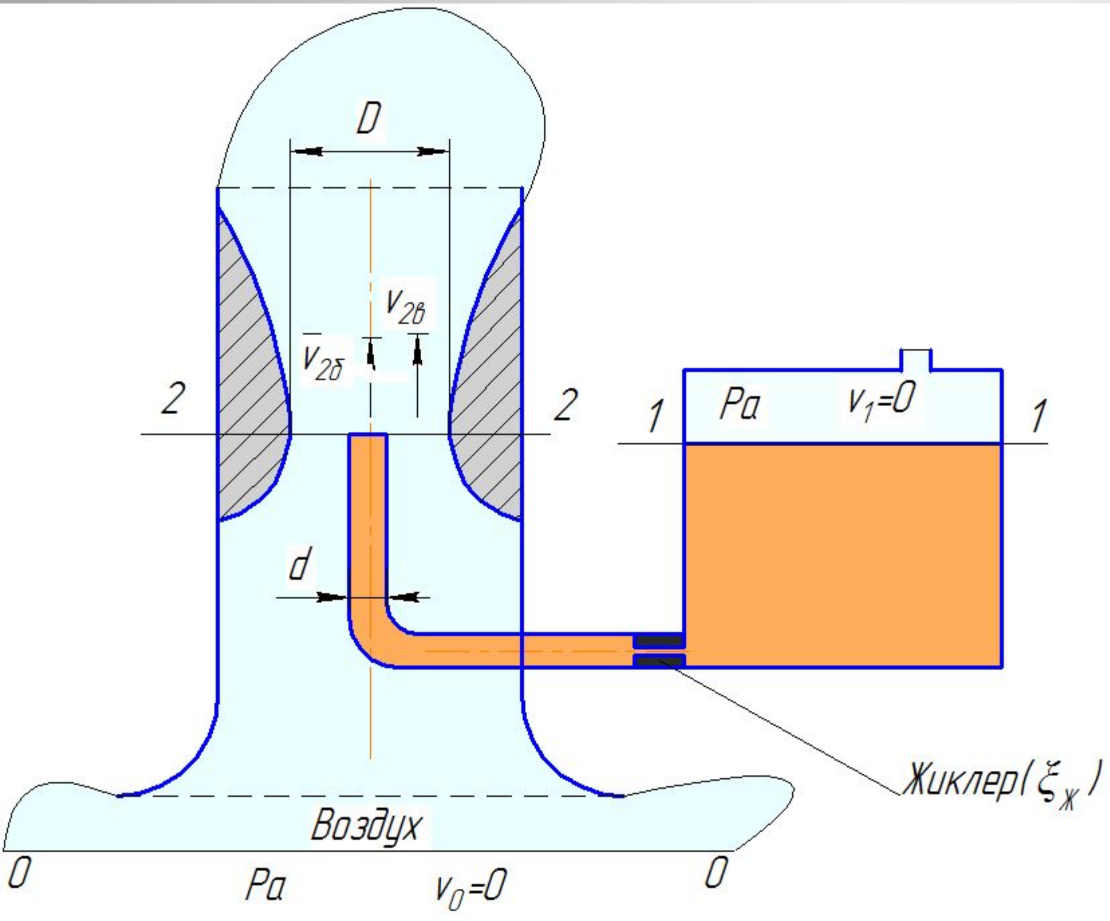
$$Q = v_1 S_1 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{S_1}{S_2} - 1}}$$

Водоструйный насос



Карбюратор

$$\frac{\rho_{в} v_{2в}{}^{2}}{2}(1+\xi_{в}) = \frac{\rho_{б} v_{2б}{}^{2}}{2}(1+\xi_{ж})$$



$$G_{в} = \frac{\pi D^2}{4} v_{2в} \rho_{в}$$

$$G_{б} = \frac{\pi D^2}{4} v_{2б} \rho_{б}$$

$$\frac{G_{б}}{G_{в}} = \frac{d}{D^2}^{2} \sqrt{\frac{\rho_{б}(1+\xi_{в})}{\rho в(1+\xi_{б})}}$$

Контрольные вопросы

- Закон неразрывности потока, его смысл?
- Повышается или понижается линия энергии в месте прохождения жидкости через насос?
- Когда линия энергии и пьезометрическая линия параллельны? Когда в направлении движения жидкости эти линии сближаются и когда удаляются одна от другой?
- Может ли быть отрицательным гидравлический уклон, пьезометрический уклон?
- Как распределяется давление по живому сечению прямолинейного равномерного потока?
- В чем заключается физический и математический смысл корректива осреднения скорости?
- Может ли равномерное движение быть неустановившимся, а неравномерное — установившимся?
- Каковы размерности и физический смысл величин X, У и Z, входящих в уравнение Эйлера?
- Какими операциями при выводе уравнения Бернулли обусловливается применимость его к расчету только установившихся потоков?
- К каким выражениям приводится уравнение Бернулли в случаях: а) неподвижной жидкости; б) равномерного движения без местных сопротивлений;