

Гидродинамика

- **Гидродинамикой** – называется раздел гидравлики изучающий движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами при их относительном движении.
- Движение жидкости может быть установившимся (стационарным) или не установившимся (не стационарным)

-

Установившееся движение

- **Установившимся** – называется движение жидкости неизменное во времени, при котором давление и скорость являются функциями только координат, но не зависят от времени.

$$p = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$u = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

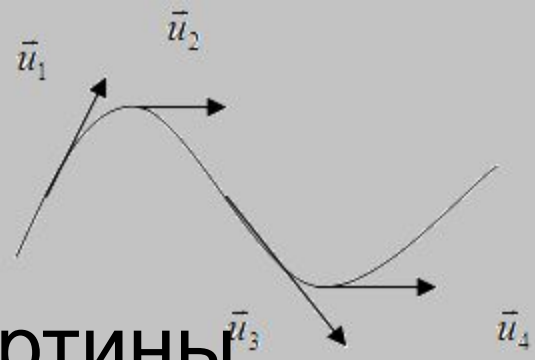
Неустановившееся движение

- **Неустановившимся** – называется движение жидкости, все или некоторые характеристики которого изменяются во времени, т. е. давление и скорость зависят как от координат , так и от времени.

$$p = f_1(x, y, z, t),$$

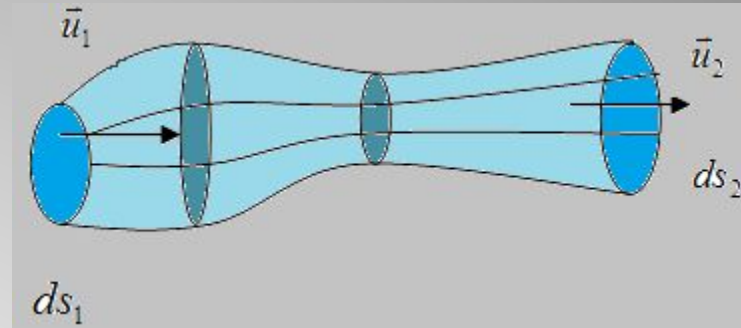
$$u = f_2(x, y, z, t).$$

Траектории частиц



- Поэтому для рассмотрения картины течения, возникающей в каждый данный момент времени, вводится понятие *линии тока*.
- Линией тока – называется кривая в каждой точке которой вектор скорости в данный момент времени направлен по касательной.

Трубка тока



- Если в движущейся жидкости взять бесконечно малый замкнутый контур и через все его точки провести линии тока, то образуется трубчатая поверхность, называемая – *трубкой тока*. Часть потока заключается внутри тока, называется – *элементарной струйкой*. При стремлении поперечных размеров струйки к нулю она в пределе стягивается в линию тока.

Методы изучения движения жидкости

- В гидромеханике существуют два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.
- Метод Лагранжа заключается в изучении движения каждой отдельной частицы жидкости. В этом случае движение определяется положением частицы жидкости в функции от времени t .
- Движение частицы будет определено, если точно определить координаты x , y , и z в заданный момент времени t , что дает возможность построить траекторию движения частицы жидкости. Величины x , y , и z являются переменными Лагранжа, а их изменения за время dt позволяет получить значение dx , dy и dz , а затем путь $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

$$\frac{dy}{Uy} = \frac{dz}{Uz}$$

Метод Лагранжа

- Проекции скорости на координатные оси определяются зависимостями $U_x = \frac{dx}{dt}$, $U_y = \frac{dy}{dt}$, $U_z = \frac{dz}{dt}$ а местная скорость

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$$

- Метод Лагранжа сводится к определению семейства траекторий движения частиц движущейся жидкости.
- Учитывая, что для установления движения линии тока совпадают с траекторией движущихся частиц, можно записать:

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}$$

-

Метод Эйлера

- Метод Эйлера основан на изучении поля скоростей, под которым понимается значение величины и скоростей во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью.
- Переменными Эйлера являются значения скоростей, которые определяются в зависимости от координат точек пространства и

времени, т. е.

$$U_x = f(x, y, z, t), \quad U_y = f(x, y, z, t), \quad U_z = f(x, y, z, t).$$

Понятие расхода

- Расходом Q называется количество жидкости, протекающее через сечение потока в единицу времени.

$$dQ = U d\omega \quad \text{или} \quad Q = \int_{\omega} U d\omega$$

Средняя скорость

- Средней скоростью называется одинаковая по всему сечению потока скорость, при которой расход равен действительному

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int U d\omega}{\omega}$$

Уравнение Эйлера для движения идеальной жидкости

- Уравнение Эйлера которое выражают условия равновесия жидкости, уже были нами получены:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + X = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z = 0$$

- Силы инерции приведенные к единицы массы, соответственно будут:

$$j_x = -1 \frac{dU_x}{dt}$$

$$j_y = -1 \frac{dU_y}{dt}$$

$$j_z = -1 \frac{dU_z}{dt}$$

Уравнение Эйлера

- Прибавляя силы инерции, к действующим силам получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + X &= \frac{dU_x}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{dU_y}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{dU_z}{dt} \end{aligned} \right\}$$

- Так как u_x , u_y , u_z являются сложными функциями, зависящими от переменных x , y , z и t , то по правилу дифференцирования получим уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \end{aligned} \right\}$$

Уравнение неразрывности

- Уравнение неразрывности или сплошности жидкости основано на законе сохранения массы и исходит из положения механики сплошных сред о том, что внутри движущейся жидкости не может произойти разрывов,
т. е. образования пустот.
- Уравнение неразрывности может быть представлено в дифференциальной форме для частицы жидкости и элементарной струйки, а также в конечных величинах для потока жидкости.

Уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \qquad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} u = 0$$

- Если пренебречь сжимаемостью жидкости, то ее плотность в любом сечении будет одинакова ($\rho = \text{const}$) и не будет зависеть от времени

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Или в краткой форме $\operatorname{div} u = 0$

Для элементарной струйки

- При установившемся движении уравнение неразрывности можно вывести исходя из свойств элементарной струйки, в соответствии с которым жидкость из струйки не вытекает в стороны и не притекает в нее извне, но в то же время местные скорости разные по длине струйки. Отсюда следует, что количество жидкости, притекающей к струйке в начальном сечении и вытекающей из нее в конечном сечении, равны между собой и общий объем жидкости в струйке не изменяется т. е.

элементарные расходы в единицу времени

равны:

$$dQ_1 = U_1 d\omega_1$$

$$U_1 d\omega_1 = U_2 d\omega_2$$

Для потока жидкости

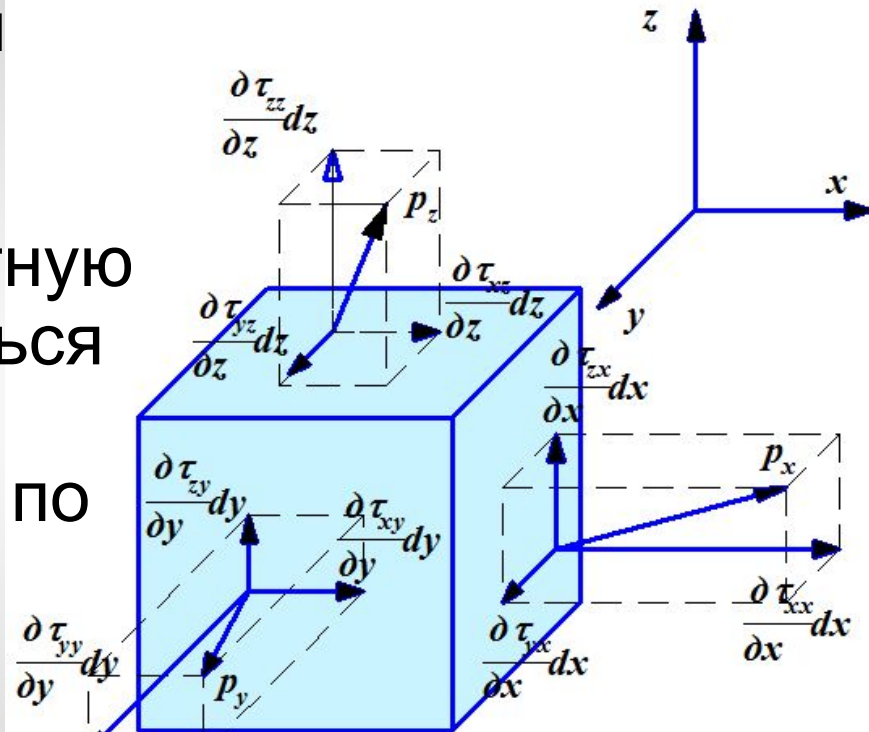
- Для потока жидкости уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$U_1 \omega_1 = U_2 \omega_2 \qquad \frac{U_1}{U_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

- Т. е. отношение средних скоростей в сечениях потока обратно пропорционально отношению их площадей.

Уравнения Навье - Стокса

- В реальной жидкости благодаря наличию трения появляются касательные напряжения. Ввиду этого напряжения p_n , действующие на поверхностную площадку, будут располагаться произвольно к выбранной площадке, а не обязательно по нормали к ней.
- Поэтому в отличие от идеальной жидкости на частицу реальной жидкости кроме сил инерции, силы тяжести и поверхностных сил давления будут действовать еще и



Уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

В векторном виде уравнение будет выглядеть так

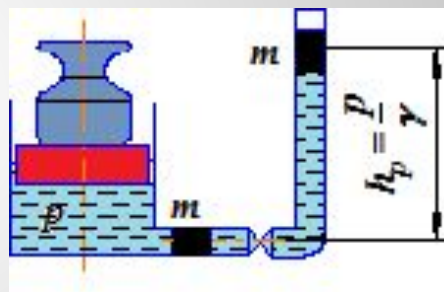
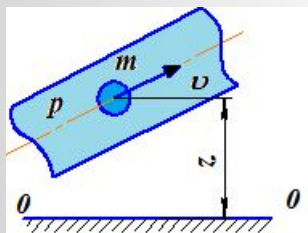
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Энергия элементарной струйки

Известно, что механическая энергия любого тела характеризуется двумя величинами: кинетической и потенциальной энергиями.

Так, если тело или частица имеет массу m и движется со скоростью u , то ее кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{mu^2}{2}$$

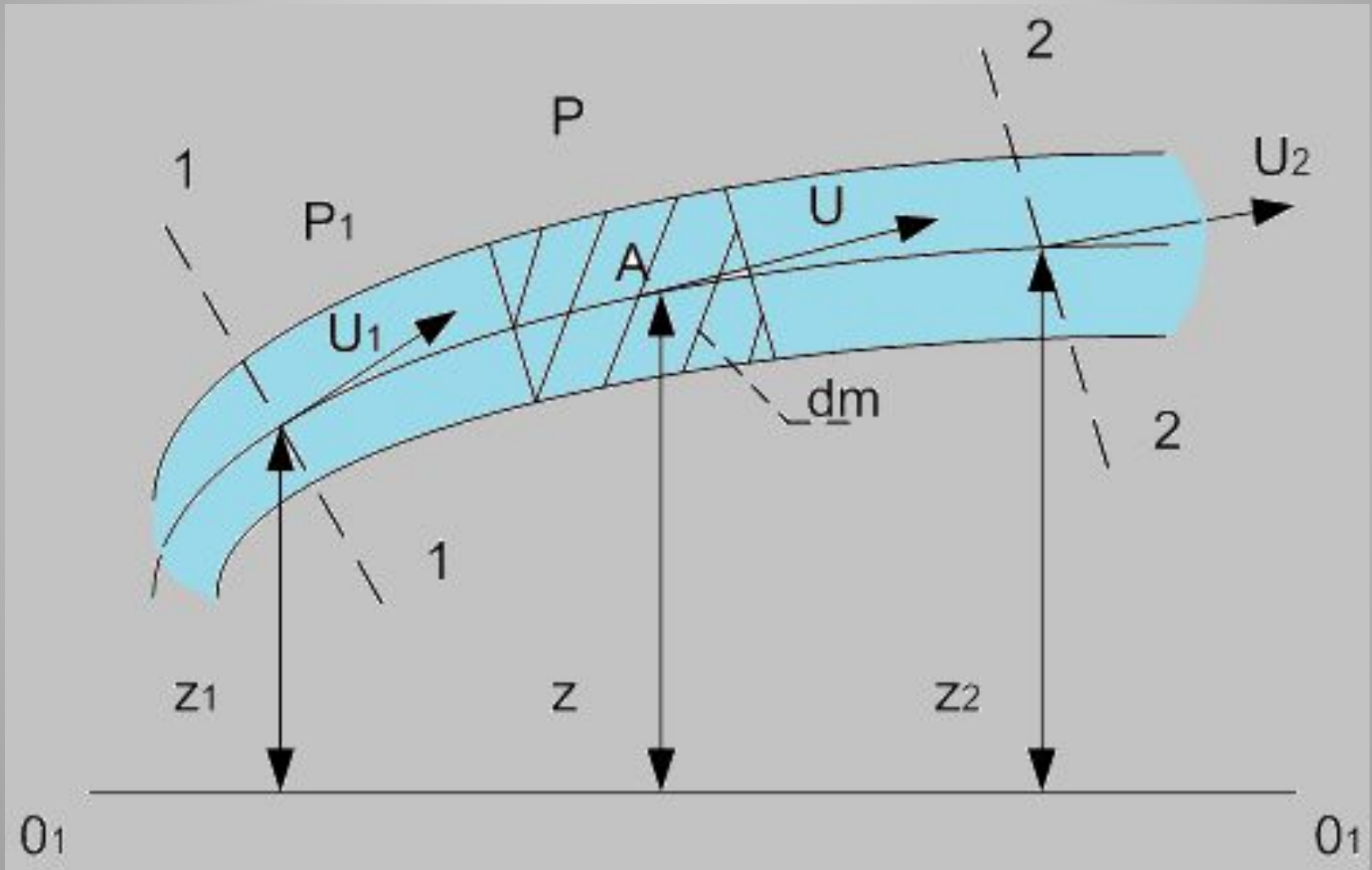


потенциальная энергия частицы m , поднятой на высоту z $E_{\text{п}} = mgz$

Кроме того, если масса частицы жидкости m занимает объем V и находится под давлением p , то это тело еще обладает потенциальной энергией давления

$$E_D = pV.$$

Элементарная струйка



- На основании изложенного полная механическая энергия элементарной струйки (частицы), имеющей массу m и некоторую скорость u , определится таким образом:

$$E = \frac{m u^2}{2} + mgz + pV. \quad \text{Так как} \quad V = \frac{m}{\rho}$$

Удельная энергия струйки, т. е. энергия, отнесенная к единице веса, определится делением всех членов последнего уравнения на вес элементарной струйки — mg :

$$\mathcal{E}_{\text{уд}} = \frac{u^2}{2g} + z + p/\rho g$$

Уравнение Бернулли для реальной струйки

- Вдоль элементарной струйки удельные кинетическая и потенциальная энергии могут изменяться, но их сумма остается постоянной.
- При движении вязкой жидкости суммарная удельная энергия движущейся жидкости вдоль струйки убывает в силу различных гидравлических сопротивлений. Следовательно, для двух сечений элементарной струйки вязкой жидкости, находящейся в установившемся движении:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} > z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g}$$

- Чтобы получить равенство левой и правой части, необходимо в правой части добавить дополнительный член h_z , обозначающий затраты удельной энергии на преодоление сопротивлений при движении реальной вязкой жидкости в пределах между первым и вторым сечениями. В этом случае уравнение Бернулли принимает вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + h_{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}$$

Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

- Рассмотрим распределение давления. В плоскости перпендикулярной направлению движения.

Гидродинамическое давление распределяется по закону гидростатики

В связи с этим справедливо усл

$$z + \frac{P}{\rho g} = const$$

- т.е. сумма отметки z и пьезометрической высоты $\frac{P}{\rho g}$ во всех точках сечения потока остается одинаковой, хотя меняется для различных сечений.

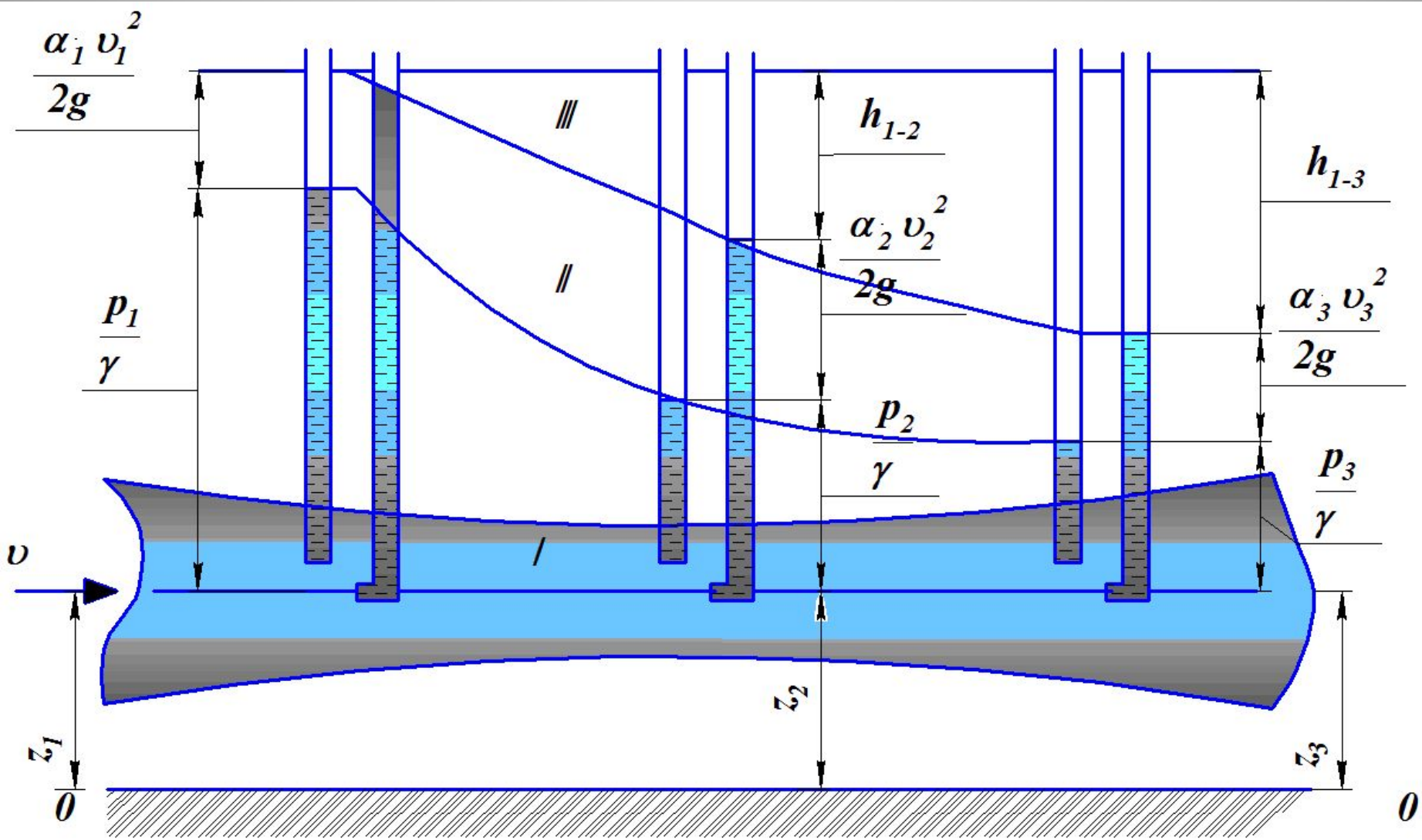
- Для наиболее распространенных случаев движения жидкости значения α следующие: при ламинарном движении в круглой трубе $\alpha = 2$, при турбулентном – зависит от режима и принимает значение $\alpha = 1,1–1,3$. Обычно α определяют опытным путем.
- С учетом вышесказанного, уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости может быть записано в виде:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_{cp2}^2}{2g} + h_{\Sigma 1-2}$$

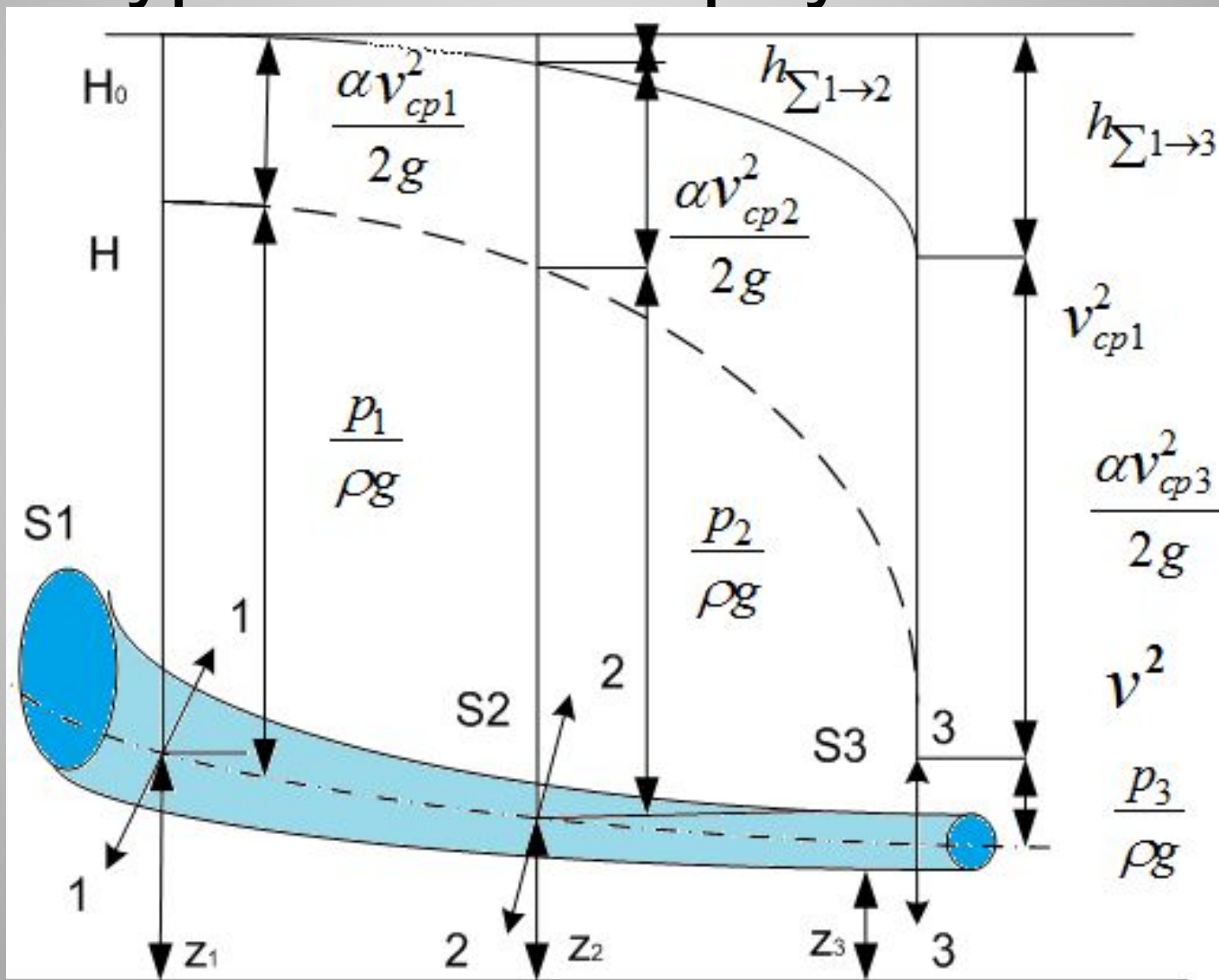
где v_{cp1} , и v_{cp2} – средние скорости в сечениях 1 и 2;

$h_{\Sigma 1-2}$ – потери энергии на преодоление сопротивлений между сечениями 1 и 2.

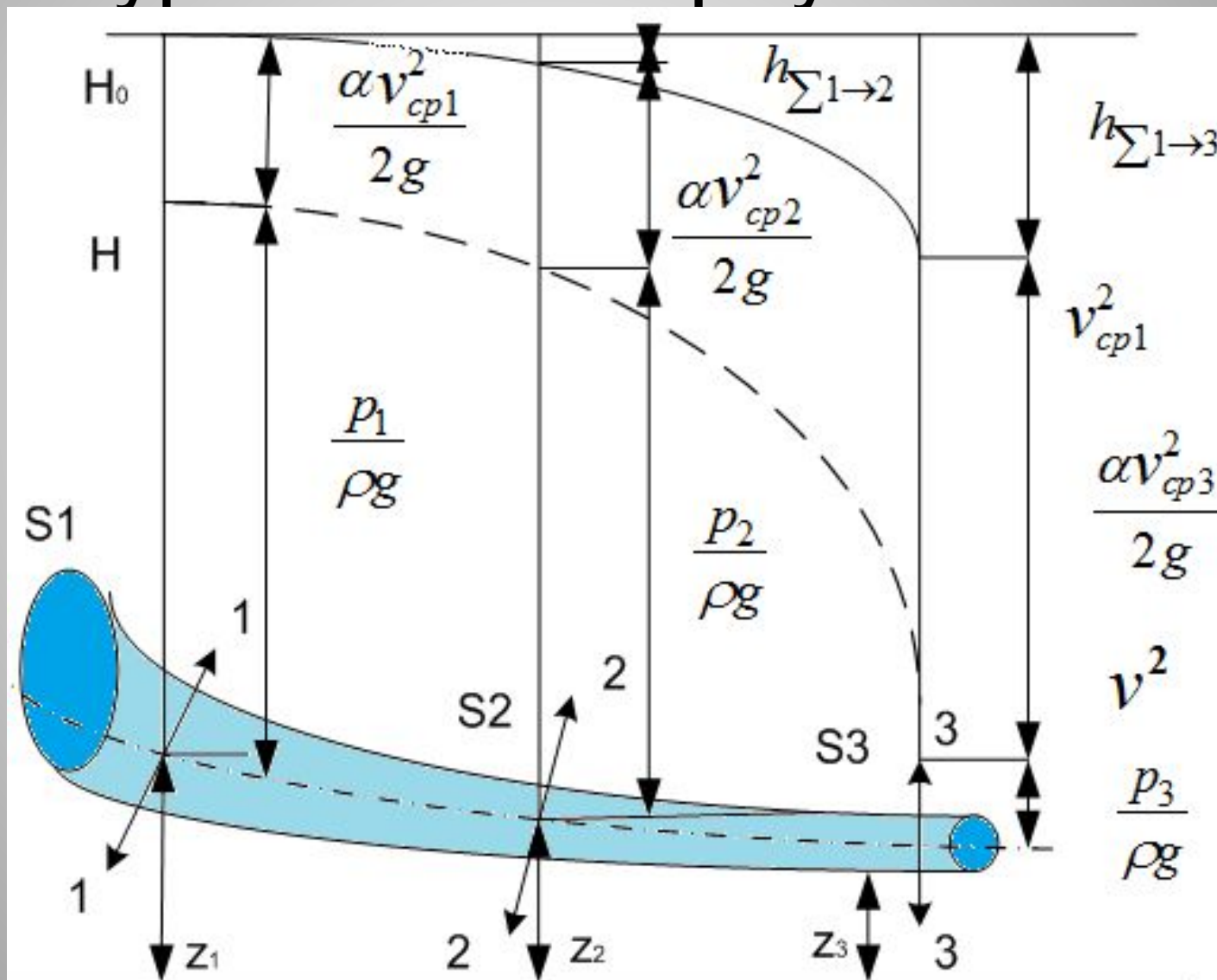
Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли



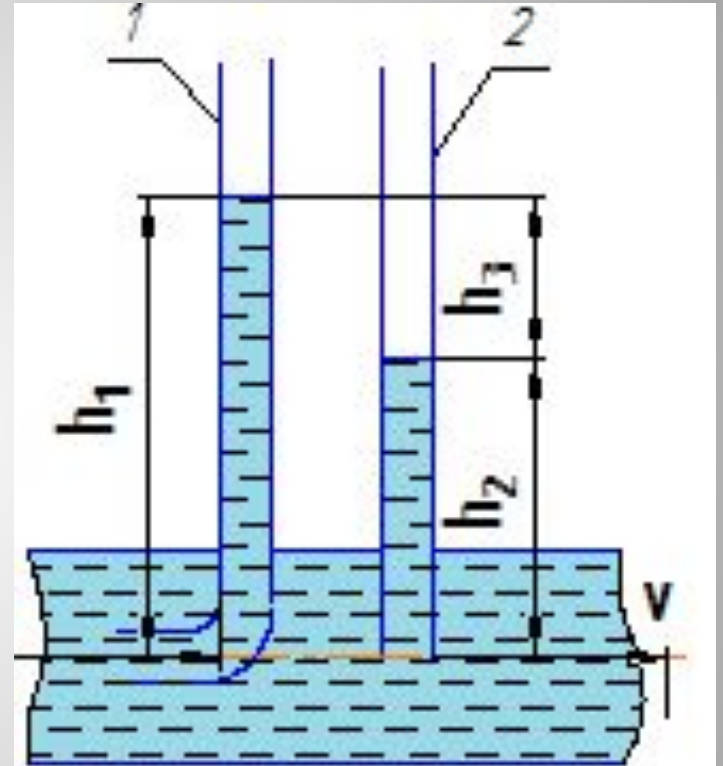
Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли



Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли



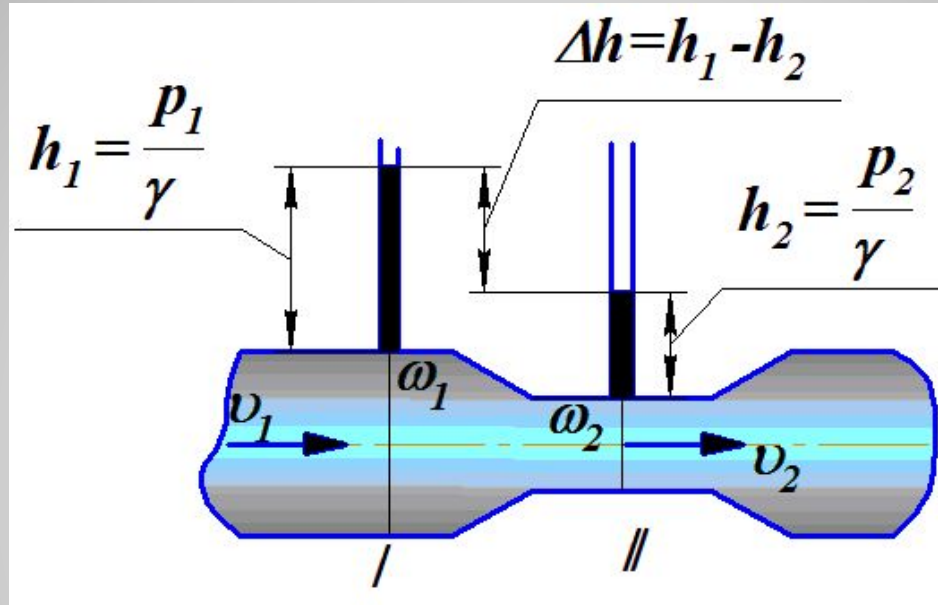
Трубка Пито и пьезометр



Практическое применение уравнения Бернулли

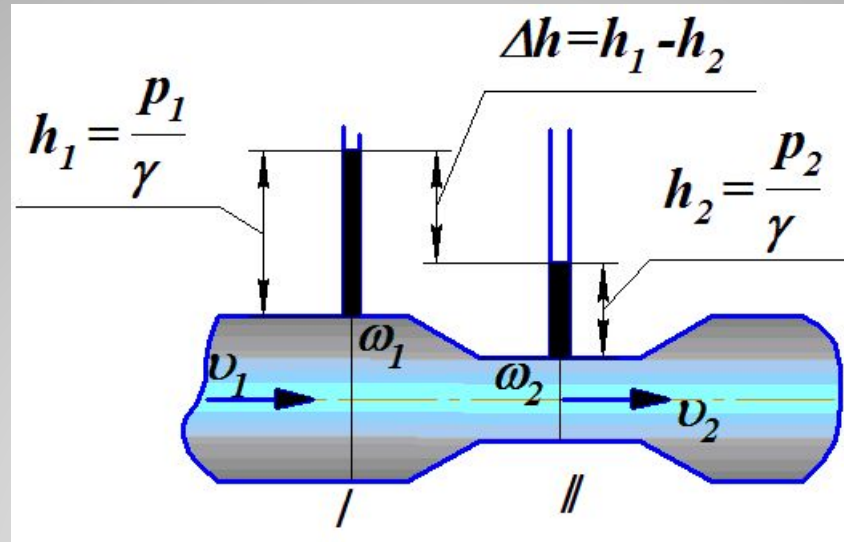
- На основании уравнения Бернулли сконструирован ряд приборов, такие, как, расходомер Вентури, водоструйный насос, карбюратор, эжектор и др.

Расходомер Вентури



$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = \frac{D^2}{d^2}$$

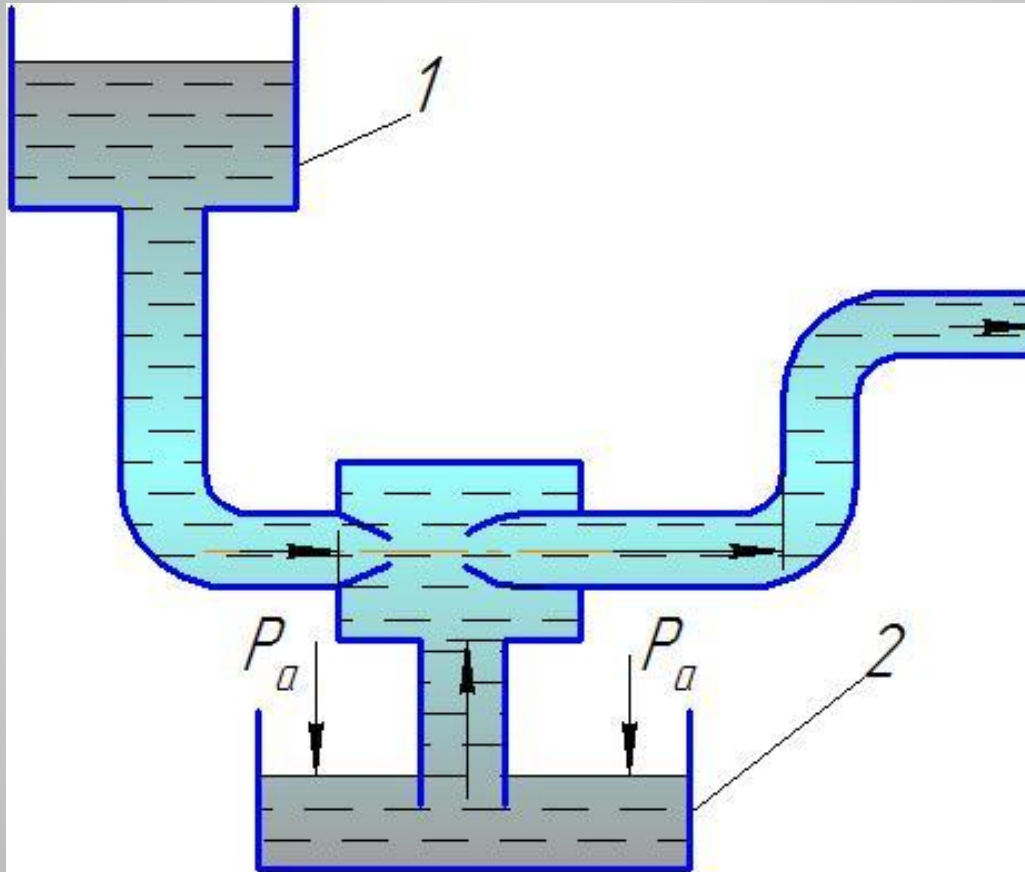


$$\left(\frac{p_1}{\rho g}\right) + \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{p_2}{\rho g}\right) + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = \frac{D^2}{d^2}$$

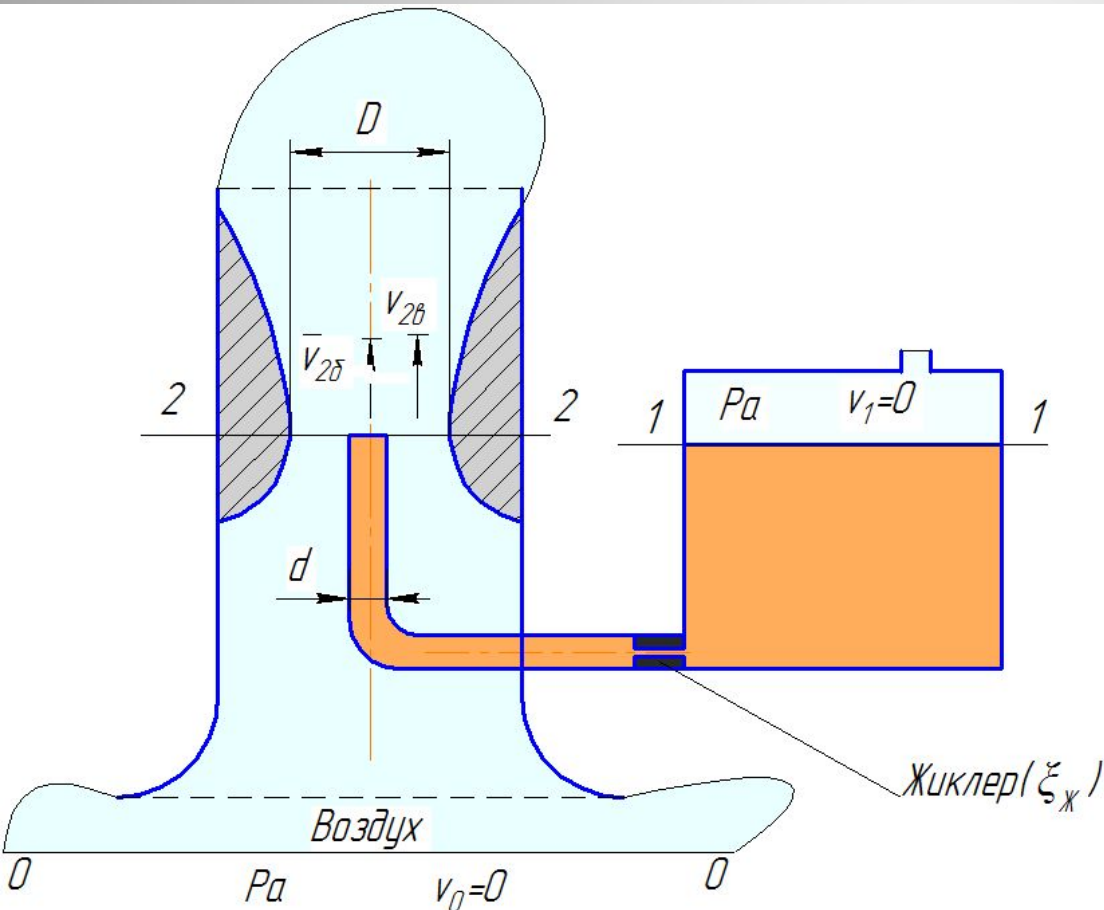
$$Q = v_1 S_1 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{S_1}{S_2} - 1}}$$

Водоструйный насос



Карбюратор

$$\frac{\rho_{\text{в}} v_{2\text{в}}^2}{2} (1 + \xi_{\text{в}}) = \frac{\rho_{\text{б}} v_{2\text{б}}^2}{2} (1 + \xi_{\text{жк}})$$



$$G_{\text{в}} = \frac{\pi D^2}{4} v_{2\text{в}} \rho_{\text{в}}$$

$$G_{\text{б}} = \frac{\pi d^2}{4} v_{2\text{б}} \rho_{\text{б}}$$

$$\frac{G_{\text{б}}}{G_{\text{в}}} = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{\rho_{\text{б}} (1 + \xi_{\text{в}})}{\rho_{\text{в}} (1 + \xi_{\text{б}})}}$$

Контрольные вопросы

- Закон неразрывности потока, его смысл?
- Повышается или понижается линия энергии в месте прохождения жидкости через насос?
- Когда линия энергии и пьезометрическая линия параллельны? Когда в направлении движения жидкости эти линии сближаются и когда удаляются одна от другой?
- Может ли быть отрицательным гидравлический уклон, пьезометрический уклон?
- Как распределяется давление по живому сечению прямолинейного равномерного потока?
- В чем заключается физический и математический смысл корректива осреднения скорости?
- Может ли равномерное движение быть неустановившимся, а неравномерное — установившимся?
- Каковы размерности и физический смысл величин X , Y и Z , входящих в уравнение Эйлера?
- Какими операциями при выводе уравнения Бернулли обуславливается применимость его к расчету только установившихся потоков?
- К каким выражениям приводится уравнение Бернулли в случаях: а) неподвижной жидкости; б) равномерного движения без местных сопротивлений;